АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

# РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

## МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

3645—4685

*

№ 4 1960

ПРОИЗВОДСТВЕННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ КОМБИНАТ ВИНИТИ

МОСКВА

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

ИНСТИТУТА НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ДИРЕКТОР ИНСТИТУТА профессор *А. И. Михайлов*

ГЛАВНЫЕ РЕДАКТОРЫ СЕРИЙ: член-корреспондент АН СССР *Н. В. Агеев* (Металлургия), канд. биологич. наук *В. П. Доброхвалов* (Биология), профессор *Е. Е. Захаров* (Геология, Горное дело), профессор *С. М. Лисичкин* (Экономика промышленности), профессор *С. М. Никольский* (Математика), профессор *К. Ф. Огородников* (Астрономия и геодезия), профессор *Ю. Г. Саушкин* (География), академик *Л. И. Седов* (Механика), *В. В. Серпинский* (Химия), профессор *Б. М. Тареев* (Электротехника), канд. техн. наук *В. З. Фрейдберг* (Машиностроение), профессор *И. А. Хвостиков* (Геофизика), профессор *Э. В. Шпольский* (Физика).

## СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы . . . . . 1
История математики. Персоналия . . . . . 3
Преподавание математики . . . . . 4
Основания математики и математическая логика 6
Теория чисел . . . . . 10
Алгебра . . . . . 20
Многочлены и линейная алгебра . . . . . 20
Группы . . . . . 22
Поля, кольца и структуры . . . . . 30
Алгебраическая теория схем связи и управления . . . . . 35
Топология . . . . . —
Теория функций действительного переменного 38
Теория множеств . . . . . 40
Приближение функций полиномами и их обобщениями . . . . . 41
Теория функций комплексного переменного . . . 44
Дифференциальные уравнения . . . . . 52
Обыкновенные дифференциальные уравнения 52
Уравнения в частных производных . . . . . 58
Приложения к физике, технике и естественным наукам . . . . . 67
Интегральные уравнения . . . . . 75
Вариационное исчисление . . . . . 79
Анализ (другие вопросы) . . . . . 80
Числовые ряды . . . . . 83
Специальные функции . . . . . 85
Интегральные преобразования и операционное исчисление . . . . . 87
Приложения общих методов математического анализа . . . . . 88
Функциональный анализ . . . . . 91
Теория вероятностей . . . . . 104
Математическая статистика . . . . . 110
Теория игр, исследование операций и математическая экономика . . . . . 113
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов . . . . . 117
Геометрия . . . . . 120
Приложения геометрии . . . . . 121
Элементарная геометрия . . . . . 122
Аналитическая геометрия . . . . . 122
Проективная и неевклидовы геометрии . . . . 123
Начертательная геометрия . . . . . 124
Алгебраическая геометрия . . . . . 124
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства . . . . . 136
Геометрия $n$-мерного пространства . . . . . 141
Теория относительности . . . . . 147
Глобальная теория дифференцируемых многообразий . . . . . 148
Метрические методы в геометрии . . . . . 151
Выпуклые многообразия . . . . . 152
Численные и графические методы . . . . . 154
Таблицы . . . . . 165
Вычислительные машины и математические приборы . . . . . 168
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике . . . . . 172
Авторский указатель . . . . . 174

Адрес редакции: Москва Д-219, Балтийская ул., 14

REFERATIVNYI ZHURNAL

INSTITUTE OF SCIENTIFIC INFORMATION OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE USSR

DIRECTOR OF THE INSTITUTE professor *A. I. Mikhailov*

CHIEF EDITORS OF THE SECTIONS: Corresponding Member of the A. S., USSR *N. V. Ageev* (Metallurgy), Candidate of Biological Sciences *V. P. Dobrokhvalov* (Biology), Professor *E. E. Zakharov* (Geology, Mining), Professor *S. M. Lisichkin* (Economics of Industry), Professor *S. M. Nikolsky* (Mathematics), Professor *K. F. Ogorodnikov* (Astronomy and Geodesy), Professor *Ya. G. Saushkin* (Geography), Academician *L. I. Sedov* (Mechanics), *V. V. Serpinsky* (Chemistry), Professor *B. M. Tareev* (Electrical Engineering), Candidate of Technical Sciences *V. Z. Freidberg* (Machine Building), Professor *I. A. Khvostikov* (Geophysics), Professor *E. V. Shpolsky* (Physics)

## CONTENTS

General . . . . . 1
History. Personalia . . . . . 3
Teaching of mathematics . . . . . 4
Foundations. Mathematical logic . . . . . 6
Theory of numbers . . . . . 10
Algebra . . . . . 20
Polynomials, linear algebra . . . . . 20
Groups . . . . . 22
Fields, rings, lattices . . . . . 30
Algebraic theory of communication and control circuits . . . . . 35
Topology . . . . . —
Theory of functions of real variables . . . . . 38
Theory of sets . . . . . 40
Approximations of functions by polynomials and by their generalizations . . . . . 41
Theory of functions of complex variables . . . . . 44
Differential equations . . . . . 52
Ordinary differential equations . . . . . 52
Partial differential equations . . . . . 58
Applications to physics, technology and natural sciences . . . . . 67
Integral equations . . . . . 75
Calculus of variations . . . . . 79
Analysis (other aspects) . . . . . 80
Numerical series . . . . . 83
Special functions . . . . . 85
Integral transforms, operational calculus . . 87
Applications of general methods of mathematical analysis . . . . . 88
Functional analysis . . . . . 91
Theory of probability . . . . . 104
Mathematical statistics . . . . . 110
Theory of games, operational research, mathematical economics . . . . . 113
Applications of probabilities and statistical methods . . . . . 117
Geometry . . . . . 120
Applications of geometry . . . . . 121
Elementary geometry . . . . . 122
Analytical geometry . . . . . 122
Projective und non-euclidean geometry . . . 123
Descriptive geometry . . . . . 124
Algebraic geometry . . . . . 124
Differential geometry of 3-dimensional space 136
Geometry of *n*-dimensional space . . . . . 141
Theory of relativity . . . . . 147
Global theory of differentiable manifolds . . 148
Metric methods in geometry . . . . . 151
Convex manifolds . . . . . 152
Numerical and graphical methods . . . . . 154
Tables . . . . . 165
Computers and mathematical devices . . . . . 168
Application of computer devices . . . . . 172
Author index . . . . . 174

**Editorial Office: Moscow D-219, Baltijskaya ulitsa, 14**

# РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
# МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР профессор *С. М. Никольский*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: академик *П. С. Александров*, академик *И. Н. Векуа*, академик *А. Н. Колмогоров*, член-корреспондент АН СССР *Ю. В. Линник*, профессор *А. И. Маркушевич*, профессор *М. А. Наймарк*, профессор *В. В. Немыцкий*, член-корреспондент АН СССР *П. С. Новиков*, профессор *Д. Ю. Панов*, профессор *К. А. Рыбников*, профессор *Н. В. Смирнов*, профессор *С. П. Фиников*

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ канд. физ.-матем. наук *А. А. Конюшков*

**Рефераты 3645—4685** **№ 4** **Апрель 1960 г.**


## ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

Редактор *К. А. Рыбников*

**3645. Общее годичное собрание Академии наук СССР (26—28 марта 1959 г.).** Вестн. АН СССР, 1959, № 4, 3—78

**3646. На общих собраниях отделений Академии наук СССР.** Вестн. АН СССР, 1959, № 5, 59—84

**3647. XVII сессия Совета по координации научной деятельности Академии наук союзных республик и филиалов Академии наук СССР. (Вступительное слово). Несмеянов А. Н.,** Вестн. АН СССР, 1959, № 6, 66—77

**3648. На сессии Совета по координации.** Вестн. АН СССР, 1959, № 6, 90—97

**3649. С III Всесоюзного математического съезда. Тянь Фан-цзэн** (Tien Fang-tseng), Шусюэ цзиньчжань, 1956, **2**, № 4, 729—732 (кит.)

Информация о работе съезда, состоявшегося в Москве с 24 июня по 4 июля 1956 г. Э. И. Березкина

**3650. О ходе работы Всесоюзной конференции 1956 года по функциональному анализу и его приложениям. Гуань Чжао-чжи** (Kwan Chao-chin), Шусюэ цзиньчжань, 1956, **2** №, 4, 721—728 (кит.)

Краткая характеристика работы конференции, проходившей в Москве с 17 по 24 февраля 1956 г. Э. И. Березкина

**3651. На конгрессе по кибернетике. Ильин В. А.,** Вестн. АН СССР, 1956, № 11, 72—75

Международный конгресс по кибернетике состоялся 26—29 июля 1956 г. в Намюре (Бельгия).

**3652. Вклад математиков в теорию ядерных реакторов. Дейвисон** (Mathematicians in nuclear reactor theory. Davison B.), Canad. Math. Bull., 1959, **2**, № 1, 59—61 (англ.)

Краткий обзор развития математических методов в общей теории ядерных реакторов. Отмечается новый класс математических задач, описываемых интегро-дифференциальным уравнением Больцмана. Обсуждается развитие численных методов решения кинетических уравнений. Подчеркивается исключительная роль быстродействующей вычислительной техники в развитии математических методов расчета ядерных реакторов. Г. И. Марчук

**3653. Кибернетика и естествознание. Соболев С. Л., Ляпунов А. А.,** Вопр. философии, 1958, № 5, 127—138

В связи с характеристикой предмета кибернетики рассматриваются отдельные проблемы естествознания (кибернетика и биология, моделирование биологических процессов, кибернетика и генетика) и делаются выводы относительно задач философии в области науки. Вопросы естествознания рассматриваются исключительно в аспекте кибернетики, без специального, конкретного анализа проблем физики, химии, биологии. При рассмотрении меры количества информации используется формула Шеннона. Научная проблематика кибернетики группируется вокруг вопросов о передаче и переработке информации, о реализации управления. Задача философии состоит в изучении этого круга научных интересов, выяснении того, что в нем особенно важно с точки зрения философской, выяснении вопроса о том, с какими областями человеческой деятельности эта новая проблематика может соприкасаться. Вопрос о различиях и сходстве в работе мозга и вычислительной машины, по мнению авторов, относится не столько к философии, сколько к кибернетике.

**3654. Советские кибернетики. Уолтер** (Soviet cybernetics. Walter W. Grey), Discovery, 1958, **19**, № 12, 518 (англ.)

Рецензия на статью советского ученого Л. Сухаревского, опубликованную в газете «Sowiet News» 10 июля 1958 г. Отмечается растущий интерес советских ученых к вопросам кибернетики. При этом советская точка зрения, по мнению автора, в основном совпадает с той, которой придерживаются многие, хотя и не все, западные кибернетики. В сущности автор согласен также с тем положением д-ра Сухаревского, что «. . . как бы мы ни увеличивали число электронных ламп в кибернетической машине, мы не получим ни человеческого мозга, ни чего-нибудь эквивалентного ему»,— однако при этом допускает возражения философского характера, свидетельствующие о его механистических позициях. В силу своих философских убеждений автор предполагает, что кибернетические машины «могли бы исследовать мир в пределах своей рецепторной системы, создавать новые ассоциации, приобретать предчувствия (hunches), исследовать их при помощи эксперимента, приобретать новую информацию, корректировать и объяснять предчувствия и создавать приемлемые опыты философии мира в соответствии с их чувствующими механизмами (sensing devices)». П. Е. Сивоконь

**3655. Применение кибернетики в биологии и социологии. Эшби У. Росс,** Вопр. философии, 1958, № 12, 110—117

Кибернетика определяется как наука, занимающаяся изучением причинно-следственных связей, особенно в тех случаях, когда они представлены длинными цепями событий, где действие каждой стадии служит в свою очередь причиной следующей стадии. Дается определение машины как любой материальной системы, деятельность которой полностью детерминирована внутренним состоянием и внешними для нее условиями. Отмечается огромная сложность, разнообразие биологических и социальных систем, их нелинейный стохастический характер. В этой связи рассматриваются проблемы новой, общей, по существу математической науки,—«логики механизмов», которая разрабатывает теоретические следствия, вытекающие из особенностей, присущих любой машине, относящейся к типу нелинейных, весьма сложной и свободно рассеивающей энергию. Гомеостат приводится в качестве примера такой стохастической машины, которая может восстанавливать свои функции после повреждения. а следовательно, моделировать работу мозга и вести себя подобно животному. П. Е. Сивоконь

**3656. Реальный смысл проблем кибернетики и их извращение в буржуазной науке. Уёмов А. И.,** Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та, 1955 (1956), 8, 166—199

Исходным моментом статьи служит критика буржуазных философских извращений в области кибернетики, а также критика недооценки рационального содержания этой науки некоторыми советскими авторами. Приводится аналогия между механическим устройством и живым организмом, между математическими и логическими операциями. Рассматривается специально значение метода аналогии для развития современной науки. Используется материал математической логики.

Статья может привлечь к себе внимание как философа, интересующегося кибернетикой, так и математика-кибернетика, интересующегося философией, однако ее научный материал в большей степени устарел.

П. Е. Сивоконь

**3657. Некоторые особенности организмов как «систем» с точки зрения физики, кибернетики и биологии. Кремянский В. И.,** Вопр. философии, 1958, № 8, 97—107

Попытка внести бо́льшую точность в определение отличий живых существ, рассматриваемых как материальные системы особых типов. Объективный критерий прогресса, «исчисление прогресса»— автор видит в усложнении и примате (ведущем значении) специфических свойств системы. Для открытых систем с периодическим или непрерывным обменом элементами и энергией со средой вводится понятие органичных систем. При этом принадлежность животного и системы автоматов к органичным системам не означает действительно фундаментального сходства между ними. Превосходство организма состоит в его организации и преемственности. Это «двойное превосходство» автор исследует исторически и логически. Подчеркивается «необходимость исторического и дифференцированного подхода к вопросу об отношении внешнего и внутреннего». В качестве методологической работы по философским вопросам кибернетики статья представляет интерес для математики, хотя специального математического материала в себе не содержит.

П. Е. Сивоконь

**3658. Геометрия отвесной линии. Брёйнс** (The geometry of the plummet. Bruins E. M.), Simon Stevin, 1959, 33, № 1, 38—60 (англ.)

Опираясь на очевидные издавна факты (существование прямого угла, выражение площади прямоугольника произведением длины на ширину и разбиение прямоугольника диагональю на равные части), автор получает соотношения между сторонами прямоугольного треугольника. Далее он строит «безугловую геометрию», названную им «геометрией отвесной линии», в которой излагается теория трехсторонников, выпуклых четырехсторонников и правильных $n$-сторонников.

А. Е. Раик

**3659. О математической строгости. Штейнхаус** (O ścisłości matematycznej. Steinhaus Hugo), Matematyka, 1958, 11, № 3, 1—11 (польск.)

Критика взглядов Л. Шварца, изложенных в работе (РЖМат, 1958, 3478), написанной для учителей математики. Шварц говорит только о формально логическом содержании математики, не интересуясь связанными с ним вопросами о предмете математики, ее интуитивной основе и приложениях. Такая трактовка математики не является новой и нанесла уже большой вред математическому образованию молодежи. Подвергается критике тезис о свободе математического творчества, ограниченной лишь требованиями формальной непротиворечивости. В. Ф. Рогаченко

**3660. Математическое определение дня недели. Майр** (Wochentag-Mathematik. Mayr Joachim), Elem. Math., 1958, 13, № 5, 109—111 (нем.)

Два правила определения дня недели любой даты по юлианскому и григорианскому календарям и любой даты до н. э. Правила сформулированы в виде алгебраических формул. Л. Е. Майстров

**3661 К. Избранные статьи по математике. Ортогональные функции и ортогональные полиномы. Короус** (Vybrané stati z matematiky. Ortogonální funkce a ortogonální polynomy. Korous Josef. Praha, SNTL, 1958, 326 s., 26.20 Kčs.), Bibliogr. katal. ČSR. České knihy, 1958, № 52, 1213 (чешск.)

**3662 К. Быстрее мысли (Кибернетика). Кобринский Н., Пекелис В. М.,** «Молодая гвардия», 1959, 389 стр., илл., 8 р. 50 к.

**3663 К. Финансовая математика в профессиональной жизни коммунальных секретарей, бухгалтеров и землемеров. Стуани** (La matematica finanziaria nella vita professionale del segretario comunale, ragioniere e geometra. Stuani Luigi. Mantova, I. C. A., 1958, 112 p.), Bibliogr. naz. ital., 1958, 1, № 7, 261 (итал.)

**3664 К. Справочник по аналитическим функциям. Жико, Удар** (Aide-mémoire des fonctions analytiques. Giqueaux M., Oudart A., Paris — Liège, Polytechn. Ch. Béranger, 1958, 35 p., ill.) (франц.)

Небольшая по объему книжка содержит основные определения, теоремы и формулы теории аналитических функций одной переменной. Первая часть посвящена общей теории. Во второй части, которая занимает около половины объема, даются основные формулы конформных отображений. К. А. Карпов

**3665 К. Французская энциклопедия. Т. 1** (Encyclopédie francaise. T. 1. L'outillage mental. Pensée. Langage. Mathématique. Paris, Soc. gestion encyclopédie franc., 1937, 586 p., ill.) (франц.)

Значительная часть данного тома энциклопедии посвящена математике. Приводятся основные математические термины с подробными объяснениями. Термины в основном относятся к высшей математике.

К. А. Карпов

## ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. ПЕРСОНАЛИЯ

**3666. Введение в курс истории математики. Фрайезе** (Introduzione ad un corso di storia della matematica. Frajese Attilio), Archimede, 1957, 9, № 2, 91—94 (итал.)

Вводная лекция к курсу, прочитанному в Римском университете в 1957 г. Автор определяет задачи курса: не скрупулезное изучение множества отдельных фактов, а исследование наиболее показательных и типичных моментов и примеров. В. П. Зубов

**3667. Числовая арифметика как вклад математики в человеческую культуру. Штрубеккер** (Das Zahlenrechnen, ein Beitrag der Mathematik zur menschlichen Kultur. Strubecker Karl), Phys. Bl., 1958, 14, № 7, 289—296 (нем.)

В подтверждение того, что анализ математических знаний древних народов всегда дает достаточно ясный и надежный масштаб для определения степени их развития, автор излагает историю возникновения понятия «число», появления цифр и позиционной системы, распространения их в Европе, создания логарифмических таблиц. Он делает вывод, что как открытие логарифмов способствовало политическому и культурному развитию человечества, так и современная техника счета, создание электронных вычислительных машин представляет человечеству могущественное и эффективное вспомогательное средство для научного и технического продвижения. Н. А. Киселева

**3668. О происхождении числа. Хуссер** (Zur Genealogie der Zahl. Husser F. F.), Dialectica, 1958, 12, № 2, 146—184 (нем.; рез. англ.)

Вопрос о происхождении чисел и ряда натуральных чисел, о применении их рассмотрен на основе учета практической их необходимости для жизни человека. Приведен анализ методов счета у южноавстралийских племен. Отвергается идея о происхождении числа только из мышления, как и идея о божественном и априорном происхождении числа. Н. А. Киселева

**3669. Панорама китайской науки и некоторых ее отраслей. Юар** (Panorama de la science chinoise et de quelques-unes des ses disciplines. Huard Pierre), Rev. synthèse, 1956, 77, № 3, 419—518 (франц.)

Справка, в которой перечисляются китайские математики и математические сочинения. Сопровождается указателем имен астрономов и математиков Китая. В примечаниях дана библиография работ по истории китайской математики (до 1951 г.). Э. И. Березкина

**3670. Вклад Ли Е (1178—1265) в математику. Сюй Чунь-фан,** Шусюэ тунбао, 1956, № 10, 9—13 (кит.)

**3671. Великий математик Мэй Вэнь-динь. Чжэн Дэн,** Шусюэ цзяосюэ, 1957, № 8, 7—8 (кит.)

Сведения о китайском ученом Мэй Вэнь-дине (1633—1721). Написал 86 томов работ, в которых решает вычислительные проблемы, связанные с календарем. Был хорошо знаком не только с традиционными китайскими методами, но и с методами западной математики, проникшими в это время в Китай. Э. И. Березкина

**3672. Классики японской математики провинций Ицу и Сагами. Фудзии,** J. History Sci. Japan, Кагакуси кэнкю, 1956, № 38, 35—36 (японск.)

**3673. О развитии планетных теорий в древней и средневековой астрономии. Нёйгебауэр** (The transmission of planetary theories in ancient and medieval astronomy. Neugebauer O.), Scripta Math., 1957, 22, № 3-4, 165—192 (англ.)

См. РЖАстр, 1959, № 2, 805.

**3674. Астрономические и математические инструменты в Германском музее в Мюнхене. Виснер** (Astronomische und mathematische Instrumente im Deutschen Museum zu München. Wissner Adolf), Sudhoffs Arch. Geschichte Med. und Naturwiss., 1958, 42, № 3, 227—236 (нем.)

Описание и фото приборов: линейки лейпцигского математика Боэциуса, описанной в книге Я. Лейпольда (1727), и счетной машины Брауна (2-я половина XVIII в.). Остальные приборы относятся к астрономии. В. П. Зубов

**3675. «Оселок ума» Роберта Рекорда (1557). Санфорд** (Robert Recorde's Whetstone of witte, 1557. Sanford Ver), Math. Teacher, 1957, 50, 4, 258—266 (англ.)

Статья посвящена 400-летию со дня выхода в свет сочинения Рекорда: The whetstone of witte whiche is the seconde parte of Arithmetike: containyng the extraction of Rootes: the Cossike practise, with the rule of Equation: and the woorkes of Surde Nombers. Роберт Рекорд (1510—1558) опубликовал еще три сочинения: 1) The Grovnd of Artes (1542), 2) The Pathewaie to Knowledge (1551), 3) The Castle of Knowledge (1551). Первое из них являлось сочинением по практической арифметике, неоднократно переиздавалось в течение 150 лет. Второе представляло собой введение в геометрию с определениями и теоремами в первой части и доказательствами во второй, 3-я и 4-я части, содержащие приложения, никогда не были опубликованы. Третье посвящено вопросам теоретической и практической астрономии. Здесь впервые в Англии пропагандируется учение Коперника.

Основное внимание в статье уделено сочинению «The whetstone of witte», состоящему из трех частей, в которых идет речь соответственно об извлечении корней, о решении уравнений I и II степени, об иррациональных числах. В книге впервые введен современный знак равенства. По этому поводу сам Рекорд писал следующее: «Я поставлю, подобно тому же как я часто делаю в своих работах, пару параллельных линий одинаковой длины так: =, ибо никакие две вещи не могут быть более равными». А. А. Гусак

**3676. Основные принципы динамики и их применение у Христиана Гюйгенса. Сиггелор** (Christiaan Huygens' dynamiske grundprincipper og de anvendelser han gjorde deraf. Ziggelaar A.), Fis. tidsskr., 1958, 56, № 2-3, 66—76 (датск.)

Анализ принципов динамики, принимаемых Хр. Гюйгенсом в работах по механике, в сопоставлении с таковыми у Галилея и Ньютона; Гюйгенса автор считает основным связующим звеном между ними.

Большую роль в системе динамики Гюйгенса играет механический принцип относительности. В отличие от Ньютона Гюйгенс не признает никакого абсолютного движения и абсолютного пространства, вводя вместо последнего понятие инерциальной системы отсчета. Гюйгенс показывает, что закон инерции может не иметь места вне инерциальной системы. Сам закон инерции (в той его части, которая относится к случаю движения) Гюйгенс считает следствием своего принципа относительности. Автор статьи отвергает, однако, попытки некоторых авторов усмотреть в высказываниях Гюйгенса прямое предвосхищение идей общей теории относительности Эйнштейна и отмечает, что Гюйгенс не дал достаточного обоснования своего принципа, усматривая в нем простое следствие самого понятия движения.

**3677. Исторический очерк развития алгебры. Дюбрей** (Apercu historique sur le développement de l'algèbre. Dubreil Paul), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1959, 38, № 196, 85—94 (франц.)

Краткий очерк развития алгебры за период с 1770 (год опубликования Лагранжем «Рассуждения о решении алгебраических уравнений») по 1910 г. (год появления в свет мемуара Э. Штейница «Алгебраическая теория тел»).

Автор останавливается на жизни и деятельности в области алгебры Лагранжа, Абеля, Гаусса, Галуа, Жордана и Штейница (1871—1928). А. А. Гусак

**3678. Бетти, Бриоски, Казорати — три аналиста и три подхода к математическому анализу. Вольтерра** (Betti, Brioschi, Casorati: tre analisti e tre modi di considerare le questioni di analisi. Volterra V.), Archimede, 1957, 9, № 2, 82—90 (итал.)

Этой статьей, представляющей извлечение из книги Вольтерра «Saggi scientifici» (Bologna, 1920), открывается новый отдел журнала «Archimede», посвященный выдающимся математикам Италии. Приводятся краткие биографии Бетти (1823—1892), Бриоски (1824—1897) и Казорати (1835—1890). Бриоски интересовался приложениями анализа и воспринимал его в первую очередь как аппарат. Он много сделал для пропаганды высших разделов анализа в итальянских университетах, в частности ввел изучение теории эллиптических и гиперэллиптических функций. Отмечается стремление Бетти к алгебраизации анализа и влияние, которое на него оказал Риман, посетивший Пизу в 1863 г. (Бетти возглавлял кафедру математики Пизанского университета с 1857 г. до своей смерти). Если Бриоски интересовался прикладной математикой, а Бетти был чистым математиком, то Казорати останется в истории преимущественно как преподаватель анализа, автор учебников и монографий. В. И. Левин

**3679. Деятельность Неймана в области электронных цифровых машин. Тарьян** (Neumann János elektronikus számológépekkel kapcsolatos munkássága. Tarján Rezső), Mat. lapok, 1958, **9**, № 1-2, 6—18 (венг.)

Описывается деятельность Неймана за последние 12 лет его жизни в области электронных вычислительных машин и участие его в создании первых электронных цифровых машин в США. А. А. Бовди

**3680. Уильям Роуэн Гамильтон. (К 150-летию со дня рождения). Полак Л. С.**, Тр. Ин-та истории естествознания и техн. АН СССР, 1956, **15**, 206—276

**3681. Эдмунд Уиттекер — математик и историк. Дингл** (Edmund T. Whittaker, mathematician and historian. Dingle Herbert), Science, 1956, **124**, № 3214, 208—209 (англ.)

**3682. Джон Уишарт, 1898—1956. Пирсон** (John Wishart, 1898—1956. Pearson E. S.), Biometrika, 1957, **44**, № 1—2, 1—8 (англ.)

**3683. К истории почетного присуждения ученой степени Готхольду Эйзенштейну. К 135-летию со дня рождения, 16 апреля 1958 г. Бирман** (Zur Geschichte der Ehrenpromotion Gotthold Eisensteins. Zu dessen 135. Geburtstag am 16. April 1958. Biermann Kurt-R.), Forsch. und Fortschr., 1958, **32**, № 11, 332—335 (нем.)

Присуждение звания почетного доктора философии Г. Эйзенштейну (1823—1852) происходило во Вроцлаве 15 февраля 1845 г. Эйзенштейн в это время заканчивал 3-й семестр учебы в Берлинском университете. Воспроизведен текст ходатайства Э. Куммера (1810—1893) и Н. Фишера (1782—1850) от 7 февраля 1845 г., где высоко оценены заслуги Эйзенштейна в области математики и приведены названия его статей. Н. П. Бибикова

**3684. Из истории создания учебника геометрии для средней школы. Дидык** (З історії утворення підручника геометрії для середньої школи. Дідик В. Ю.), Наук. зап. Львівськ. держ. пед. ін-т, 1958, **10**, 103—114 (укр.)

Краткий обзор важнейших курсов элементарной геометрии от Евклида до конца XIX в. В. Ф. Рогаченко

**3685 К. Мухаммед Насирэддин Туси о теории параллельных линий и теории отношений. Мамедбейли Г. Д.** Баку, АН АзербССР, 1959, 100 стр., илл., 2 р. 70 к.

**3686 К. Приемы счета. 6 изд. Берман Г. Н.**, М., Физматгиз, 1959, 88 стр., 1 р. 30 к.

**3687 К. Научные статьи, представленные Академиям наук Франции, Голландии и Италии за полстолетия (1907—1956 гг.). Данжуа** (Un demi-siècle (1907—1956) de notes communiquées aux académies de Paris, d'Amsterdam, des Lincei. I. La variable complexe. Denjoy Arnaud. Paris, Gauthier-Villars, 1957, 202 p. — Observ. et comment., 58, p., 2200 fr.) (франц.)

Приводятся тексты заметок автора по теории функций одной комплексной переменной (всего 166 названий), напечатанные в изданиях Академий наук Франции, Голландии и Италии. В конце книги помещены дополнения и замечания автора к некоторым из статей. К. А. Карпов

**3688 К. Научные статьи, представленные Академиям наук Франции, Голландии и Италии за полстолетия (1907—1956 гг.) Данжуа** (Un demi-siècle (1907—1956) de notes communiquées aux académies de Paris, d'Amsterdam, des Lincei. Denjoy Arnaud. Paris, Gauthier-Villars, 1957, p. 223—589. — Observ. et comment., p. 59—99, 3100 fr.) (франц.)

Тексты заметок автора по теории множеств, теории функций действительного переменного, топологии, теории вероятностей и теоретической механике, напечатанные в изданиях Академий наук Франции, Голландии, Италии (всего 104 названия).

Статьи снабжены примечаниями и дополнениями автора. К. А. Карпов

**3689 К. Собрание сочинений. Хар. Под ред. Сёкефалви-Надя** (Összegyüjtött munkák. Haar Alfréd. Szerk. Szökefalvi-Nagy Béla. Budapest, Akad. Kiadó, 1959, 662 l, ill.) (венг., нем., франц.)

Приведены полные тексты всех работ Хара (1885—1933). Часть статей, написанных на венгерском языке, приводится с немецкими переводами. Ко всем статьям сделаны краткие комментарии, указывающие дальнейшее развитие идей Хара. В книгу включены также фотография, краткая биография Хара и тексты двух его писем. Всего 35 работ. Распределены они по разделам: 1. Теория множеств (2 работы); 2. Ортогональные ряды и сингулярные интегралы (7 работ); 3. Аналитические функции (2 работы); 4. Дифференциальные уравнения с частными производными (5 работ); 5. Вариационное исчисление (7 работ); 6. Приближение функций и линейные неравенства (3 работы); 7. Дискретные группы и функциональные алгебры (6 работ); 8. Непрерывные группы (2 работы). Не включены курсы лекций Хара, которые остались не опубликованными в виде отдельных книг, но которыми до сих пор пользуются в венгерских университетах. К. А. Карпов

## ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ

**3690. Взгляды на сущность аксиоматической теории и их влияние на формирование основ преподавания в средней школе. Фессель** (Poglądy na istotę teorii aksjomatycznej oraz ich wpływ na kształtowanie się podstaw nauczania matematyki w szkole średniej. Fessel Abraham), Matematyka, 1959, **12**, № 1-2, 25—45 (польск.)

Предлагается проект программы по математике, в который включены фрагменты аксиоматических теорий из отдельных разделов арифметики, планиметрии и стереометрии. В примечаниях к проекту говорится, что еще нужно было бы включить в программу комплексные числа, основные сведения из аналитической геометрии и математического анализа, применение их к исследованию свойств функций, определению площадей и объемов и т. д., однако это невозможно сделать без увеличения срока обучения. Автор указывает, что предложенный проект является лишь основой для дискуссии и отправным пунктом для дальнейших исследований. А. А. Гусак

**3691. Проблема модернизации программного материала по математике в общеобразовательных школах. Яськовский** (Problem modernizacji materiału programowego matematyki w szkołach ogólnokształcą-

cych. Jaśkowski Stanisław), Matematyka, 1959, 12, № 1-2, 46—55 (польск.)

Предложения автора направлены на модернизацию программы без существенного увеличения ее объема. Автор считает необходимым включить в программу старших классов некоторые сведения из анализа, математической логики, теории множеств, абстрактной алгебры и т. д. Предлагается изъять из программы устаревший и не имеющий уже актуального значения материал, устранить элементы концентричности в обучении.

А. А. Гусак

**3692. Введение некоторых понятий теории множеств в средней школе. Ример** (Introducerea unor noţiuni de teoria mulţimilor în şcoala medie. II. Rimer D.), Gaz. mat. şi fiz., 1959, A11, № 1, 23—34 (рум.)

Автор дает понятие эквивалентных, счетных и несчетных множеств, которые могут быть введены в программу средней школы. Даются также определения, примеры и доказательства некоторых теорем. А. Н. Гливич

**3693. Математика в инженерных учебных планах. Хортон** (Mathematics in the engineering curriculum. Horton Robert E.), Math. Mag., 1959, 32, № 3, 137—149 (англ.)

Обзор учебных планов и программ по математике, действующих ныне в технических колледжах США, а также рассмотрение основных форм математической подготовки инженеров. Информация собрана из 50 колледжей. Отмечаются значительные отличия в постановке математического образования инженеров. Автор систематизирует собранные сведения в виде рассмотрения следующих основных вопросов: 1) преобладающие формы современных учебных планов по математике в технических колледжах Америки; 2) какие намечаются тенденции в изменении программ для инженеров; 3) в каком направлении могут быть пополнены математические курсы; 4) о месте математики в общеобразовательных инженерных учебных планах.

В. А. Добровольский

**3694. Общество по усовершенствованию математических понятий и терминологии. Хайерс** (S. I. M. N. T. Hyers D. H.), Math. Mag., 1959, 32, № 4, 203—206 (англ.)

Отмечается трудность многих математических понятий для учащихся средней школы и колледжей (США). Указаны случаи нечеткости терминологии. Например, знак равенства в зависимости от постановки задачи может иметь различный смысл. Символ $dx$ тоже можно понимать по-разному. Различны значения некоторых терминов в топологии. Вносится предложение об организации Общества по усовершенствованию математических понятий и терминологии. Е. В. Вандышева

**3695. Обучение математике при помощи телевизора. Олкайр** (Mathematics instruction via television. Alkire G. Don), Math. Teacher, 1959, 52, № 2, 84—90 (англ.)

Речь идет об удачных результатах подобной формы преподавания. Организации курсов по телевидению разнообразны: 1) общий курс «телевизионный»; 2) курс для занимающихся только летом; 3) курс для занимающихся круглый год; 4) «продленный» курс. Описанная форма обучения имеет в виду главным образом студентов.

П. Я. Дорф

**3696. К вопросу о преподавании учения о числе в педагогических институтах. Литвинов Н. Н.,** Уч. зап. Тобольск. гос. пед. ин-та, 1958, вып. 1, 119—140

Большинство оканчивающих среднюю школу знает учение о числе недостаточно хорошо (приведено много примеров). Поскольку преподавание математики в педвузах не предполагает предварительного построения строгой теории вещественных чисел, это, по мнению автора, снижает качество освоения студентами аналитической геометрии и математического анализа. Предлагается начинать изложение математики в педвузах с систематического учения о вещественных числах.

В. Н. Молодший

**3697. О некоторых вопросах применения комплексных чисел в элементарной математике. Литвинов Н. Н.,** Уч. зап. Тобольск. гос. пед. ин-та, 1958, вып. 1, 188—194

Рассматриваются: определение тригонометрических функций; вывод основных формул для решения треугольников и выпуклых четырехугольников; построение правильных многоугольников. Изучение таких применений комплексных чисел помогает учащимся глубже освоить содержание этого раздела учения о числе.

В. Н. Молодший

**3698. Выявление потенциальных ученых (многообразный подход). Кули** (Identifying potential scientists: a multivariate approach. Cooley Willaim W.), School Sci. and Math., 1959, 59, № 5, 381—396 (англ.)

Описание исследования, путем которого автор предлагает выявить из числа учащихся средних школ и колледжей будущих ученых. Фотография и описание модели, с помощью которой начинается это исследование. Указывается, как производить анализ данных. Приведены таблицы с результатами исследований.

Е. В. Вандышева

**3699. К основным теоремам тригонометрии. Куст** (K hlavním větám trigonometrickým. Kůst Jiří), Mat. škole, 1956, 6, № 10, 592—602 (чешск.)

Пусть множество $(P)$ вещественных чисел $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ удовлетворяет неравенствам $a>0$, $b>0$, $c>0$, $0<\alpha<\pi$, $0<\beta<\pi$, $0<\gamma<\pi$. Алгебраическим путем доказывается основная теорема:

Для того чтобы числа множества $(P)$ были основными элементами треугольника, необходимо и достаточно, чтобы эти числа были решениями любой из систем:

1) $a:\sin\alpha=b:\sin\beta=c:\sin\gamma$,

2) $a=b\cos\gamma+c\cos\beta$ и 2 аналогичных,

3) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ и 2 аналогичных.

В. Ф. Рогаченко

**3700. Символическая запись теорем. Клаф** (Symbolized theorems. Clough Meriam A.), Math. Teacher, 1959, 52, № 2, 107—108 (англ.)

Предлагается схема символической записи теорем в средней школе. Например, теорема: „Если две стороны треугольника равны, то углы, лежащие против этих сторон, равны" — может быть символически записана так:

„Если $\triangle$, то $\triangle$".

Н. П. Бибикова

**3701. Вопросы с необычными ответами. Болд** (Questions with unusual answers. Bold Benjamin), Math. Teacher, 1959, 52, № 2, 95—96 (англ.)

Обычно учащимся предлагают вопросы, имеющие определенный ответ. Автор рекомендует задавать также вопросы, которые на первый взгляд „не имеют ответа" или имеют бесконечно много ответов. Приведены примеры. Полезно провести исследование, выясняющее условия, при которых задача возможна, или истолковывающее полученный ответ. Н. П. Бибикова

**3702. В школьном математическом кружке при МГУ. Арнольд В. И.,** Матем. просвещение, вып. 3, 1958, 241—250

Окончание предыдущей публикации (РЖМат, 1959, 3420). Тема — гармонические функции. Наиболее характерные задачи: 4. Вычислить среднее значение,

$$K=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_0^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{n}$$

функции $\sin x$ на отрезке $[0;\pi]$.

5. Доказать, что среднее значение произвольного многочлена с комплексными коэффициентами относительно

$n$ вершин правильного многоугольника на комплексной плоскости, где $n$ больше степени данного многочлена, равно значению многочлена в центре этого многоугольника. 6. Доказать, что если многочлен не имеет корней внутри или на окружности, то его среднее геометрическое на этой окружности равно модулю его значения в центре окружности. Ю. М. Смирнов

**3703. Библиография по математическому образованию в высшей школе. Форсайт** (Bibliography on high school mathematics education. Forsythe George E.), Computers and Automat., 1959, 8, № 5, 17—19 (англ.)

**3704 К. Математика для химиков. Пидек-Лопушанская, Слободзинский, Урбаник** (Matematyka dla chemików. Pidek-Łopuszańska H., Słebodziński W., Urbanik K., Warszawa, PWN, 1958, 476 s., il., 38 zł.) (польск.)

Учебник по математике, предназначенный для химических специальностей университетов и частично для аспирантов-химиков. В книге излагаются: избранные вопросы элементарной математики, векторная алгебра, аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве, дифференциальное исчисление, теория рядов, интегральное исчисление, функции многих переменных, кратные интегралы, теория поля и т. п. Один раздел посвящен рядам Фурье. Далее идут комплексные числа, сведения по высшей алгебре, обыкновенные дифференциальные уравнения, элементы вариационного исчисления, элементы теории функции комплексной переменной, теория определителей и матриц, векторный анализ, элементы теории вероятностей, элементы теории линейных операторов, дифференциальных уравнений в частных производных, теории групп. Книга заканчивается краткой справкой из истории математики.

Изложение сопровождается большим числом примеров и задач. К. А. Карпов

**3705 К. Сборник задач по высшей математике. [Для втузов] Изд. 5-е, стереотипн. Минорский В. П.** М., Физматгиз, 1959, 359 стр., илл., 6 р. 10 к.

**3706 К. Курс высшей математики. Для техникумов. Изд. 3-е, переработ. Зайцев И. Л.** М., Физматгиз, 1959, 372 стр., илл., 6 р. 45 к.

**3707 К. Плоская и сферическая тригонометрия. Хессенберг** (Ebene und sphärische Trigonometrie. Hessenberg Gerhard. 5. durchges. Aufl. Kneser Hellmuth. Berlin, de Gruyter, 1957, 172 S., ill., 2.40 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, A, № 8, 622 (нем.)

**3708 К. Пифагоровы треугольники. Серпинский В.** Пособие для учителей. Перевод. с польск. Ред. и примеч. С. И. Зетеля. М., Учпедгиз, 1959, 112 стр., илл., 1 р. 90 к.

Изложены сведения о треугольниках, стороны которых $x$, $y$, $z$ — целые числа, удовлетворяют соотношению $x^2+y^2=z^2$. Кроме того, в § 11 (всего в книге 14 параграфов) рассматриваются треугольники, стороны и площади которых выражаются натуральными числами, рациональные треугольники (стороны которых — рациональные числа).

Прямоугольные треугольники, стороны которых выражаются числами, обратными натуральным числам, рассмотрены в § 14. Не все утверждения снабжены доказательствами. Многие доказательства отнесены в примечания. Основной текст и примечания иллюстрируются многочисленными примерами. Книга доступна ученикам старших классов, дает богатый материал для кружковой работы. А. А. Гусак

**3709 К. Математическая смекалка. Изд. 6-е, стереотипн. Кордемский Б. А.** М., Физматгиз, 1959, 575 стр., илл., 9 р. 30 к.

---

См. также: 4408 К, 4420, 4431

## ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Редакторы *П. С. Новиков, С. И. Адян*

**3710. О второй теореме Гёделя. Есенин-Вольпин А. С.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 84—85

Пусть Con — формула $\neg\exists x\, B(x, r)$, выражающая непротиворечивость формального исчисления $S$, удовлетворяющего условиям второй теоремы Гёделя; здесь $r$ — цифра, соответствующая гёделеву номеру $r$ формулы $1=0$, $B(m, n)$ — формула, нумерически выражающая (С. К. Клини, Введение в метаматематику, стр. 176) предикат $B(m, n)$: „$m$ есть номер доказательства в $S$ формулы с номером $n$". В реферируемой заметке показано, что при определенном выборе вида формулы $B(m, n)$ Con становится доказуемой в $S$. Это приводит к необходимости добавления в условии второй теоремы Гёделя требования, чтобы для формулы $B(m, n)$ была доказуема в $S$ эквивалентность $\exists x\, B(x, n) \sim \sim\exists x\, \mathfrak{B}(x, n)$; здесь $\mathfrak{B}(m, n)$ — формула, естественным образом отображающая обычное рекурсивное определение предиката $B(m, n)$ (D. Gilbert, P. Bernays, Grundlagen der Mathematik, 1932, 2, 283). Если формула $B(m, n)$, входящая в Con и $\omega$-Con, удовлетворяет сформулированному условию, то из второй теоремы Гёделя вытекают следующие результаты:

1. Пусть формула $\omega$-Con выражает $\omega$-непротиворечивость $S$. Тогда формула Con $\equiv$ $\omega$-Con недоказуема в $S$, если непротиворечиво исчисление $S'$, полученное присоединением Con к $S$ в качестве аксиомы (в частности, если $S$ $\omega$-непротиворечиво). 2. Пусть $S$ — классическая арифметика. Тогда формула $\omega$-Con, определенная в 1, не может быть доказана при помощи индукции до $\varepsilon_0$ (но может быть доказана путем индукции до $\varepsilon_1$).

Утверждения 1 и 2 можно также перенести на понятие $\omega^k$-непротиворечивости, означающее непротиворечивость по отношению к $k$-кратному применению правила Карнапа. Ю. А. Гастев

**3711. Аксиома фундирования и аксиома выбора. Мендельсон** (The axiom of fundierung and the axiom of choice. Mendelson Elliott), Arch. math. Logik und Grundlagenforsch., 1958, 4, № 3-4, 65—70 (англ.)

Пусть $A$, $B$, $C$ и $D$ — аксиомы описанной Гёделем (Успехи матем. наук, 1948, 3, № 1, 96—149) теоретико-множественной системы $\Sigma$. Будем называть аксиомой фундирования следующее утверждение: не существует такой определенной на $\omega$ функции $h$, что для всех $i\varepsilon\omega$ $h(i+1)\varepsilon h(i)$. Слабой аксиомой выбора назовем аксиому выбора, примененную к счетному множеству различных неупорядоченных пар. Множество назовем транзитивным, если каждый его элемент является его подмножеством. Пусть, наконец, аксиома $K$ есть следующее утверждение: существует такая функция $f$, определенная на $\omega$, что для любого $n\varepsilon\omega$ $f(n)$ есть счетное транзитивное множество, плотно упорядоченное посредством отношения $\varepsilon$ (причем для любых двух элементов $y$ и $z$ такого множества $y\varepsilon z \vee z\varepsilon y$), без первого

или последнего элемента и такая, что для $i \neq j$ $f(i), f(j) = 0$.

В реферируемой работе доказано (теорема 2), что если аксиомы $A$, $B$ и $C$ непротиворечивы, то как слабая аксиома выбора, так и аксиома $D$ не выводимы из $A$, $B$, $C$ и аксиомы фундирования (для доказательства эквивалентности аксиомы фундирования и аксиомы $D$ требуется, кроме $A$, $B$ и $C$, принцип полного упорядочения). Доказательство проводится методом, аналогичным использованному в предыдущей работе автора (РЖМат, 1959, 1365). При построении требуемой модели используется выводимость аксиомы $K$ из аксиом $A$, $B$ и $C$ в предположении непротиворечивости последних (теорема 2). В заключение статьи в том же предположении доказана невыводимость из $A$, $B$, $C$ и аксиомы фундирования следующих предложений:

1) любое множество либо конечно, либо содержит счетное подмножество;

2) если элементами множества $x$ являются различные непустые множества, то теоретико-множественная сумма $x$ содержит подмножество, эквивалентное $x$.

Ю. А. Гастев

**3712. Замечание об исчислениях с несколькими сортами переменных. Гилмор** (An addition to «logic of many-sorted theories». Gilmore P. C.), Compositio math., 1958, **13**, № 3, 277—281 (англ.)

Ван Хао (Wang Hao, J. Symbolic Logic, 1952, **17**, 105—116) доказал теорему Шмидта (Schmidt A., Math. Ann., 1938, **115**, 485—506) о соответствии между исчислениями с одним и несколькими сортами переменных, используя следующее ограничение. Каждое аргументное место в элементарных предикатах исчисления с несколькими сортами переменных может замещаться переменными лишь одного определенного сорта. В реферируемой заметке показано, что это ограничение может быть снято: на аргументные места элементарных предикатов исчисления с несколькими сортами переменных можно, оказывается, подставлять переменные произвольного сорта (в частности, какого-либо определенного сорта); при этом выбор сорта переменной, вообще говоря, зависит от сортов переменных, замещающих другие аргументные места в предикате. Приводится пример — простая теория типов, рассматриваемая как исчисление с несколькими сортами переменных и несколькими или одним отношением принадлежности. Ю. А. Гастев

**3713. Характеризация исчисления высказываний с переменными функторами в терминах структур. Роз** (Caractérisation, au moyen de la théorie des treillis, du calcul de propositions à foncteurs variables. Rose Alan), Collect. logique math., 1952, Paris, 1954, **A5**, 87—88 (франц.)

Лешневский дал обобщение классической логики высказываний, введя в нее переменный функтор $\delta$. Лукашевич (Łukasiewicz J., Proc. Roy. Irish. Acad., 1951, **A54**, 25—35) и Мередит (там же, стр. 37—47) рассматривали формализацию логики Лешневского. В реферируемой заметке автор предлагает интерпретацию функтора $\delta$, при которой указанное исчисление Лукашевича — Мередита получает интерпретацию в булевой алгебре. Ю. Т. Медведев

**3714. Об универсальных машинах Тьюринга. Дейвис** (A note on universal Turing machines. Davis M. D.), Ann. Math. Studies, 1956, № 34, 167—175 (англ.)

Автор определяет универсальную машину Тьюринга как такую машину, для которой множество $E$ гёделевых номеров всех начальных положений, приводящих к окончанию работы машины, полно (т. е. обладает тем свойством, что всякое рекурсивно перечислимое множество может быть взаимно однозначно отображено в $E$ посредством рекурсивно перечислимой функции).

Для оправдания такого определения показывается, что 1) любое вычисление может быть осуществлено на такой машине, 2) всякая машина, на которой можно осуществить порождение любого рекурсивно перечислимого множества, является такой машиной. S. Gorn

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 2, 103

**3715. Вычислимость на вероятностных машинах. Леу, Мур, Шеннон, Шапиро** (Computability by probabilistic machines. Leeuw K. de, Moore E. F., Shannon C. E., Shapiro N.), Ann. Math. Studies, 1956, № 34, 183—212 (англ.)

Рассматриваются машины, удовлетворяющие следующим условиям:

1) для всякого входа, состоящего из конечной последовательности нулей и единиц, имеется выход, состоящий из конечного числа символов, выбираемых из множества $S$;

2) функциональное соотношение между входными и выходными последовательностями вычислимо;

3) выход, соответствующий начальному отрезку некоторого входа, должен быть начальным отрезком выхода, соответствующего рассматриваемому входу.

Если дана такая машина, то это значит, что имеется вычислимая функция $f(A)$, множество значений которой есть подмножество множества всех бесконечных последовательностей, выбранных из $S$, а область определения есть множество бесконечных последовательностей нулей и единиц $A$. Любая такая машина вместе с фиксированной входной последовательностью $A$ называется $A$-машиной. Множество выходных символов $S$ некоторой $A$-машины называется $A$-перечислимым. Рекурсивно перечислимыми множествами являются те множества, которые $A$-перечислимы, где $A$ содержит одни единицы; авторы называют их также 1-перечислимыми, а перечисляющую машину 1-машиной.

Если входная последовательность порождается случайным устройством с вероятностью $p$ порождения единицы, то комбинация случайного устройства и машины называется $p$-машиной. $S$ называется сильно $p$-перечислимым, если существует $p$-машина, производящая множество $S$ (в любом порядке) с ненулевой вероятностью. Если $S_M$ есть множество выходных символов, выдаваемых $p$-машиной $M$ с вероятностью $>1/2$, то $S_M$ называется $p$-перечислимым. Пусть $A_p$ есть двоичное разложение числа $p$, где $0<p<1$. Авторы показывают, что понятия «$p$-перечислимости», «сильной $p$-перечислимости» и «$A_p$-перечислимости» эффективно эквивалентны.

Если $p$ вычислимо, то всякое $p$-перечислимое или сильно $p$-перечислимое множество является 1-перечислимым; тогда как если $p$ не вычислимо, то найдутся $p$-перечислимые и сильно $p$-перечислимые множества, которые не являются 1-перечислимыми.

В силу указанного выше условия 3, эти понятия и результаты легко переносятся на случай, когда $S$ есть фиксированная последовательность символов.

«Стохастической машиной» авторы называют машину с начальным состоянием $X_0$, счетной последовательностью состояний $X_1X_2,...$, счетным множеством выходных символов $s_1s_2,...$ и (не обязательно вычислимой) вероятностной функцией

$$P(X_{j_1}, \ldots, X_{j_n}; X_p; s_q),$$

дающей вероятность того, что машина, пройдя через состояния $X_{j_1},..., X_{j_n}$, запишет символ $s_q$ и придет в состояние $X_p$. Если функция $P$ вычислима, то машина называется вычислимо стохастической. С любой $p$-машиной $M$ можно связать эквивалентную ей стохастическую машину, причем она будет вычислимо стохастической машиной тогда и только тогда, когда $p$

вычислимо. Авторы показывают, наконец, что любая вычислимо стохастическая машина эффективно эквивалентна $^1/_2$-машине и любое вычислимо стохастическое множество является эффективно 1-перечислимым.
S. Gorn

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 2, 104

**3716. Степень полноты $m$-значного импликативного исчисления высказываний Лукашевича. Роз** (Le degré de saturation du calcul propositionnel implicatif à $m$ valeurs de Łukasiewicz. Rose Alan), C. r. Acad. sci., 1955, **240**. № 24, 2280—2281 (франц.)

Доказывается следующая теорема о $m$-значном исчислении высказываний Лукашевича (Łukasiewicz J., Compt. rend. (Varsovie), Cl. III, 1930, **23**, 30): Если формализация этого исчисления является полной в слабом смысле (см. Math. Ann., 1955, **122**, 296) и имеет в качестве правил вывода только правило подстановки и правило заключения, то степень полноты этой формализации равна $n$ (Compt. rend. (Varsovie), Cl. III, 1930, **23**, 22—29). Ю. Т. Медведев

**3717. О дизъюнкциях и экзистенциональных предложениях в интуиционистских системах. Харрон** (On disjunctions and existential statements in intuitionistic systems of logic. Harrop R.), Math. Ann., 1956, **132**, № 4, 347—361 (англ.)

Работа содержит доказательства следующих предложений: 1. В интуиционистском исчислении высказываний Хейтинга ($P$) дизъюнкция доказуема тогда и только тогда, когда доказуем по крайней мере один ее член. 2. В системе формальной арифметики (N) (см. стр. 77 книги Клини, РЖМат, 1957, 7591 К): а) замкнутая формула вида $X \vee Y$ доказуема тогда и только тогда, когда доказуема по крайней мере одна из формул $X$ или $Y$; б) замкнутая формула вида $(Ea)X(a)$ доказуема тогда и только тогда, когда при некотором $n_0$ доказуема формула $X(n_0)$.

Первое из этих предложений (сформулированное впервые без доказательства Гёделем) доказывалось различными методами многими авторами. Второе предложение является существенным усилением результата Расёвой (РЖМат, 1956, 6335).

Метод, использованный автором, основан на рассмотрении вводимых им формальных систем $P_1$ и $N_1$, первая из которых эквивалентна системе $P$, а класс доказуемых формул второй совпадает с классом замкнутых формул, доказуемых в $N$. Модификацией этого метода могут быть получены аналогичные результаты, относящиеся к интуиционистскому исчислению предикатов. Автор отмечает, что эти результаты несколько слабее соответствующих результатов Шютте (Math. Ann., 1950, **122**, 47—65). Ю. Т. Медведев

**3718. Упрощенная система аксиом для $n$-значного исчисления предикатов. Туркетт** (Simplified axioms for manyvalued quantification theory. Turquette Atwell R.), J. Symbolic Logic, 1958, **23**, № 2, 139—148 (англ.)

Описана упрощенная по сравнению с системой Россера и Туркетта $RT$ (Rosser J. B., Turquette A. R., Manyvalued logics, Amsterdam, 1952) система постулатов $T$ для $n$-значного исчисления предикатов, состоящая из девяти схем аксиом (в $RT$ — десять) и единственного правила вывода — modus ponens. Система $T$ более прозрачно связана с обычным двузначным исчислением предикатов, чем $RT$. Будем предполагать, что $RT$ и $T$ определены с использованием одинаковых условий истинности. Тогда любая теорема $T$ доказуема в $RT$ (теорема 1). Обратное справедливо лишь при условии доказуемости в $T$ аксиом $A2$ и $A3$ системы $RT$ (теорема 2). Требование доказуемости в $T$ двух аксиом $RT$ в условии теоремы 2 существенно — системы $RT$ и $T$ не являются дедуктивно эквивалентными. Описанную ситуацию автор называет «практической эквивалентностью» систем $RT$ и $T$. Ю. А. Гастев

**3719. Формальное построение теории порядковых чисел. Ори** (Formal development of ordinal number theory. Orey Steven), J. Symbolic Logic, 1955, **20**, № 2, 95—104 (англ.)

В работе проводится формальное построение теории порядковых чисел для системы Куайна $ML$(Quine W. V., Mathematical logic, rev. ed., Cambridge, 1951). Широко используются понятия, введенные Россером (Rosser J. B., Logic for mathematicians, New York, 1953), и полученные им результаты по построению теории порядковых чисел для системы Куайна $NF$, являющейся подсистемой $ML$ (W. V. Quine, Amer. Math. Monthly, 1937, **44**, 70—80). Определяемый автором класс порядковых чисел ORN оказывается собственным подклассом определенного Россером в $NF$ класса порядковых чисел NO. Множества, вполне упорядоченные в смысле указанной монографии Россера, автор называет слабо вполне упорядоченными — их порядковые типы образуют класс NO. Порядковые типы множеств, удовлетворяющих более сильным условиям полного упорядочения в $ML$ и называемых автором сильно вполне упорядоченными, образуют класс ORN. По элементам ORN обосновывается трансфинитная индукция в доказательствах (теорема 2.1) и определениях (теорема 2.2). Для класса ORN имеет место теорема 3.1 (несправедливая для NO) о том, что сегмент ORN ограниченный числом $\alpha$, имеет порядковое число $\alpha$.

Парадокс Бурали — Форти в $ML$ не возникает — ORN есть собственный класс, т. е. не является множеством (теорема 3.9). Однако полное построение „ординальной арифметики" в рамках $ML$ оказывается невозможным — в предположении непротиворечивости $ML$ в ней не может быть доказано, что $\omega_0 \in$ ORN (теорема 3.10; функция $\omega_\alpha = \omega(\alpha)$ определяется как обычно). Поэтому рассматривается вопрос о возможных усилениях системы $ML$. Первое из них — система $ML'$ отличается от $ML$ наличием дополнительной аксиомы „NN $\in$ V" (NN — индуктивно определенный класс натуральных чисел, V — универсальный класс). В $ML'$ доказуемо, что для произвольного порядкового числа (в смысле Рос ера) $\beta$ второго рода $\omega_\beta$ входит в ORN (теорема 4.1). Однако доказательство в $ML'$ предложения „$\omega_1 \in$ ORN" автору неизвестно. Система, получающаяся присоединением к $ML$ в качестве аксиомы формулы

$$\text{„}\forall \alpha(\alpha \in \text{ORN} \supset \omega_\alpha \in \text{ORN})\text{"},$$

называется $ML''$. В $ML''$ имеют место все обычные теоремы теории порядковых чисел (см., например, Sierpinski W., Leçons sur les nombres transfinits, Paris, 1928).

В заключение рассматриваются и сравниваются другие возможные способы усиления системы $ML$ и намечается аналогичный описанному для $ML$ метод усиления системы $NF$ и построения в ней теории порядковых чисел, отличной от россеровской. Ю. А. Гастев

**3720. Об относительной непротиворечивости теории множеств. Ори** (On the relative consistency of set theory. Orey Steven), J. Symbolic Logic, 1956, **21**, № 3, 280—290 (англ.)

Статья примыкает к предыдущей работе автора (реф. 3719). Методом, аналогичным методу известной работы Гёделя об аксиоме выбора и обобщенной континуум-гипотезе, показана относительная непротиворечивость аксиоматических систем теории множеств $\Sigma$ (Гёделя) и $\Sigma'$ (Цермело) относительно системы $ML''$, рассмотренной в цитированной работе автора. В построенной модели определение функции, соответствующей функции Гёделя $F$, несколько отличается от определения Гёделя,

Во втором разделе статьи обсуждается вопрос об использовании в качестве моделей для $\Sigma$ других систем. Отмечается, что пригодные для этой цели системы несколько сильнее простой теории типов или систем Куайна *ML* и *NF* (см. реф. 3719). При этом возможность использования этих систем в неусиленном виде остается невыясненной. Ю. А. Гастев

**3721. Формализация теории множеств с точки зрения комбинаторной логики. Коган** (A formalization of the theory of sets from the point of view of combinatory logic. Cogan Edward J.), Z. Math. Logik Grundlagen Math., 1955, **1**, 198—240 (англ.)

Начало этой диссертации служит введением в комбинаторную логику и, по словам самого автора, представляет собой скорее описание, чем формальное построение системы, называемой комбинаторной логикой. Комбинаторная логика, следуя Карри, строится как формальная система, в которой определен класс высказываний. В классе высказываний выделяется класс теорем, получаемых из заданных аксиом с помощью определенных правил вывода. Для любой конечной последовательности высказываний возможно в конечное число шагов определить, является ли эта последовательность выводом своего последнего члена. Высказывания системы суть высказывания о некоторых объектах, природа которых, вообще говоря, произвольна. Эти объекты называются «обами» (obs). Единственная основная операция над обами состоит в приписывании названия одного оба к названию другого оба справа. Так обам $x$, $y$ соответствуют обы с названиями $xy$, $yx$. Для простоты название оба $(xy)z$ записывается без скобок: $xyz$. Знак $\vdash$ служит для обозначения высказываний; элементарное высказывание имеет вид: $\vdash x$.

Предикат равенства для обов строится с помощью некоторого оба $Q$ таким образом, что высказывание $\vdash Qxy$ интерпретируется как утверждение равенства: $x=y$. Строятся также специальные обы, с помощью которых в рассматриваемой системе формализуется исчисление предикатов, а затем и система аксиом теории множеств, приведенная в работе Гёделя «The consistency of the continuum hypothesis», Princeton, 1940. P. Lorenzen Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 11, 1171.

**3722. Дедуктивная наука с отдельными неприводимыми базами. Куэста** (Ciencia deductiva con bases irreducibles separadas. Cuesta N.), Collect. math., 1955—1956, **8**, 73—84 (исп.)

Определения см. РЖМат, 1959, 4382. Строится пример математической науки $A\bar{\varphi}$ без постулатов, среди баз которой, содержащихся в $A$, имеется ровно 10 неприводимых; каждая из этих 10 баз состоит из трех предложений, и ни одно предложение не является общим для всех 10 баз. Предложениями рассматриваемой математической науки служат предложения о равенстве слов в ассоциативном исчислении с алфавитом $\{0, 1, 2\}$ и определяющими соотношениями: $00=0$, $01=1$, $02=2$, $10=1$, $11=2$, $12=0$, $20=2$, $21=0$, $22=1$. Роль операции $\bar{\varphi}$ играет обычный вывод равенства в ассоциативном исчислении; $A$ есть множество определяющих соотношений. А. В. Гладкий

**3723. Замечания о дескрипциях и натуральной дедукции. Части 1 и 2. Монтагью, Калиш** (Remarks on descriptions and natural deduction. Montague Richard, Kalish Donald), Arch. math. Logik und Grundlagenforsch., 1957, **3**, № 1-2,—3-4, 50—75 (англ.)

В 1-й части строится новая аксиоматическая теория дескрипций, т. е. формальная система (гильбертовского типа) для узкого исчисления предикатов с равенством и дескриптивными термами вида $\neg\alpha\varphi$ ($\alpha$ — переменная, $\varphi$ — предикат, зависящий от $\alpha$), т. е. термами „тот, который"; содержательно эти термы понимаются в референтируемой работе в смысле Фреге — Карнапа (Карнап Р., Значение и необходимость, М., 1959, § 8): если существует единственное $z$ такое, что $\varphi z$, то $\neg\alpha\varphi$ есть это $z$, а для всех предикатов $\varphi$, для которых такого $z$ нет или оно не единственно, $\neg\alpha\varphi$ есть некоторый фиксированный индивидуум $x$. Формальная система строится по методу Тарского (Tarsky A., Bull. Amer. Math. Soc., 1951, **57**, 81—82) без использования каких-либо подстановок. Схемы аксиом для дескриптивных термов имеют вид $\forall\alpha(\varphi\leftrightarrow\alpha=\beta)\rightarrow\alpha=\neg\alpha\varphi$ и $N\exists\beta\forall\alpha(\varphi\leftrightarrow\alpha=\beta)\rightarrow\neg\alpha\varphi=\neg\gamma\gamma=\gamma$, где $\beta$ не входит в $\neg\alpha\varphi$ ($N$ — знак отрицания). Доказывается полнота построенной системы. В конце части производится сравнение с другими теориями дескрипций (при этом не упоминается работа Шрётера (РЖМат, 1960, 2679).

Во 2-й части строится некоторая формальная система генценовского типа для узкого исчисления предикатов с равенством и дескриптивными термами и доказывается эквивалентность этой системы системе 1-й части.

А. В. Гладкий

**3724. Метод Генцена для модальных логик высказываний. I*. Мацумото, Ониси, Риддер** (Die Gentzenschen Schlussverfahren in modalen Aussagenlogiken. I*. Matsumoto K., Ohnishi M., Ridder J.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1957, **A60**, № 5, 481—491; Indagationes math., 1957, **19**, № 5, 481—491 (нем.)

Добавление к части I работы одного из авторов (Риддера) (РЖМат, 1956, 5045). А. В. Гладкий

**3725. Метод Генцена для модальных логик высказываний. II*, III*. Риддер** (Die gentzenschen Schluszverfahren in modalen Aussagenlogiken. II*, III*. Ridder J.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1958, **A61**, № 1, 16—27; Indagationes math., 1958, **20**, № 1, 16—27 (нем.)

Добавления к частям II и III, соответственно, работы автора (РЖМат, 1956, 5045). А. В. Гладкий

**3726. Фикция несчетности. Лоренцен** (Die Fiktion der Überabzählbarkeit. Lorenzen Paul), Proc. Internat. Congr. Mathematicians 1954. Vol. 3. Groningen—Amsterdam, 1956, 273—279 (нем.)

Выдвигается и обосновывается тезис, что удовлетворительное определение понятия «несчетное множество» невозможно. Предлагается заменить использование в математике понятий «счетное» и «несчетное» использованием понятий «первичное» и «вторичное», определяемых без выхода за пределы счетного. Кроме «первичных» и «вторичных» множеств, различаются «первичные» и «вторичные» отношения и функции (в частности, последовательности). Дается краткий набросок построения на такой основе теории меры и интеграла Лебега; упоминается также о возможностях построения других разделов математики. Обсуждается вопрос о том, может ли быть потеряно при таком построении математики что-либо существенное. Доклад заканчивается словами Сколема: «Мы не должны рассматривать все, что написано в традиционных учебниках, как нечто священное».

А. В. Гладкий

**3727. Аксиоматическое исследование пространственно-временных структур. Пименов Р. И.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. Т. **4**, М., АН СССР, 1959, 78—79

Аксиоматизируется пространство с рассматриваемыми в нем движениями и временем. Сначала вводятся 15 аксиом сочетания и 8 аксиом движения, составляющие аксиомы абсолютной геометрии. Время фигурирует в аксиомах движения. Затем рассматриваются 3 взаимно исключающие друг друга аксиомы однородности, являющиеся тремя мыслимыми ответами на вопрос: можно ли всякую прямую совместить с любой другой путем движения. Далее вводятся 3 взаимно исключающие друг

друга аксиомы эквидистантности, являющиеся тремя мыслимыми ответами на вопрос: сближаются ли два перпендикуляра к одной прямой. Беря 23 аксиомы абсолютной геометрии и по одной из аксиом однородности и эквидистантности, автор получает 9 геометрий, которые рассматриваются в геометрическом и физическом аспектах. Ю. И. Соркин

**3728 К. О функциональной полноте в трехзначном исчислении. Яблонский** (On the functional completeness in three-valued calculus. Iablonskii S. B. Transl. from the Russ., Newtonville, Mass., 1957, 5 pp.) Перевод с русского (РЖМат, 1955, 27).

**3729 К. Логические основания математики. Бет** (Les fondements logiques des mathématiques. Deuxième édition. Beth E. W. Paris, Gauthier—Villars; Louvain, E. Nauwelaerts; 1955, XV+241; 2500 fr.) (франц.)

Второе издание книги, вышедшей в 1950 г. Книга представляет собой обзор основных идей и методов оснований математики. Излагаются взгляды различных школ и авторов.

Первые две части носят неформальный характер. В первой из них дается краткое описание аристотелевой теории науки. Вторая посвящена обоснованию элементарного анализа (т. е. той части анализа, в которой теория множеств не играет существенной роли). Обоснование этой части анализа проводится в два приема: сначала на базе теории натуральных чисел строится теория целых чисел (теория пар), рациональных чисел (поле), действительных чисел (поле, замкнутое относительно перехода к пределу при выполнении критерия Коши), комплексных чисел (поле, замкнутое относительно перехода к пределу и алгебраически замкнутое); затем строится теория действительных чисел (по Дедекинду). Автор отмечает, что хотя арифметизация элементарного анализа допускает сведение понятия действительных чисел к понятию натуральных чисел, но не все теоремы о действительных числах сводятся к теоремам о натуральных числах.

Третья часть книги посвящена формальной аксиоматике. Она начинается с краткой исторической справки. Затем следует описание узкого исчисления; на примерах показывается, как в терминах узкого исчисления с индивидуальными предикатами можно записывать математические утверждения. Отмечается недостаточность узкого исчисления, и ставится вопрос о возможности создания «большой логики», в которой были бы формализуемы все основные понятия и постулаты, обычно кладущиеся в основу математических теорий (невозможность решения этой задачи показывается в частях, посвященных вопросам существования и парадоксам, ч. IV и V).

В главе о теории доказательства описываются метаматематические методы исследования, доказывается непротиворечивость узкого исчисления, теорема Линденбаума (Lindenbaum) (о существовании нормальных матриц, адэкватных данному множеству формул) и теорема дедукции Эрбрана (Herbrand) для узкого исчисления; рассматривается вопрос о независимости и полноте, об аксиоматизируемости дедуктивных теорий, решается проблема разрешения для исчисления с отношением порядка.

Далее следует глава о синтаксисе, содержащая, в частности, краткое описание теорем неполноты Гёделя (Gödel), и глава о семантике, в которой приводится топологическое доказательство теорем Лёвенхейма (Löwenheim), Сколема (Skolem) и Гёделя о нормальных моделях; теорема Гёделя переносится на дедуктивные теории, построенные на базе узкого исчисления с равенством и на базе интуиционистского узкого исчисления; описывается исчисление второй ступени; рассматривается вопрос об определимости и излагается метод Падоа (Padoa) для решения вопроса о зависимости или независимости системы первоначальных неопределяемых понятий.

Четвертая часть посвящена вопросам существования. Она состоит из трех глав: логистика, теория множеств, интуиционизм.

Основную часть глав о логистике и интуиционизме занимает изложение рациональных частей учений Фреге (Frege) (в частности, его теория натуральных чисел) и Брауэра (Brouwer). Весьма кратко излагаются основные идеи других представителей этих школ. В главе о теории множеств дается представление об аксиоматиках Цермело (Zermelo), Френкеля (Fraenkel) и Сколема. Наконец, пятая часть посвящена парадоксам. В ней приводятся основные типы парадоксов и способы их устранения (в частности, теория типов). В заключение приводится 49 задач и большая библиография (213 назв.). Каждая глава содержит дополнительные задачи, а также литературу по каждому из затронутых в этой главе вопросов. Б. Ю. Пильчак

**3730 К. Разрешимые случаи проблемы разрешения. Аккерман** (Solvable cases of the decision problem. Ackermann Wilhelm. Studies in logic and the foundations of mathematics. North-Holland publ. Co., 1954, 114 pp., 12 fr.), Cumul. Book Index, 1955, 58, № 6, 1 (англ.)

**См. также:** 3713, 3902.

## ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Редактор *Ю. В. Линник*

**3731. О распределении сумм Гаусса. Лемер** (On the location of Gauss sums. Lehmer Emma), Math. Tables and Other Aids Comput., 1956, **10**, № 56, 194—202 (англ.)

Под обобщенной суммой Гаусса порядка $k$ будем понимать сумму

$$S_k = \sum_{m=0}^{p-1} \exp(2\pi i m^k/p),$$

где $p = kf + 1$ — простое.

Проводится подробный разбор случаев, когда $k = 3, 4, 5$. Для каждого из случаев приводятся частоты распределения сумм Гаусса в определенных интервалах для простых $\leqslant 10000$. Вычисления проводились на машине СВАК вычислительного центра Калифорнийского университета. К работе приложена блок-схема программы, по которой проводились вычисления. М. А. Пробст

**3732. Оценка некоторых тригонометрических сумм, коэффициенты которых являются арифметическими функциями. Киселев А. А., Онуфриева Л. А.**, Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, **197**, 5—8

В одной из работ Давенпорта ( Davenport, Quart. J. Math., Oxford, 1937, ser. 8, № 32) изучаются и оцениваются суммы вида $\sum_{n=1}^{x} \mu(n) \exp(2\pi i n\theta)$, где $\mu(n)$ — функция Мёбиуса. Статья содержит обобщение этих результатов. В частности, доказывается, что для любого $s$

$$\sum_{n=1}^{x} \mu(n)\chi(n)\exp(2\pi i n\theta) = O\{x(\log x)^{-s}\}$$

при любом $\theta$. Здесь $\chi(n)$ — произвольный характер mod $k$, а $O$ зависит лишь от $k$. В статье много опечаток и пропусков. И. Ш. Славутский

**3733. О знаке некоторых тригонометрических сумм. Вьеторис** (Über das Vorzeichen gewisser trigonometrischer Summen. Vietoris L.), Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss. Math.—naturwiss. Kl., 1958, Abt, 2, **167**, № 1-4, 125—135 (нем.)

Доказывается следующее утверждение: если $a_0 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$ и для $1 \leqslant k \leqslant n/2$ $a_{2k} \leqslant [(2k-1)/2k]\,a_{2k-1}$, то для $0 < x < \pi$ и $m = 1, 2, \ldots, n$ справедливы неравенства $s_m(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_m \sin mx > 0$, $t_m(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_m \cos mx > 0$, частные случаи которых были доказаны раньше. Е. П. Ожигова

**3734. О дробных долях $\Theta x^2$ и $\Phi x^2$. Даничич** (On the fractional parts of $\Theta x^2$ and $\Phi x^2$. Danicic I.), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 3, 353—357 (англ.)

Обозначим через $\|\alpha\|$ расстояние от $\alpha$ до ближайшего целого. Доказывается существование для любого $\varepsilon > 0$ такого числа $C(\varepsilon)$, что для любых действительных $\theta$ и $\Phi$ и любого $N \geqslant 1$ разрешимы с целым $x$ неравенства

$$1 \leqslant x \leqslant N,$$

$$\|\theta x^2\| < CN^{-1/8+\varepsilon}, \quad \|\Phi x^2\| < CN^{-1/8+\varepsilon}.$$

В. И. Нечаев

**3735. О некоторых задачах аддитивной теории чисел. Эрдёш** (Über einige Probleme der additiven Zahlentheorie. Erdös P.), Leonhard Euler 250. Geburtstag. Berlin, Akad. Verl., 1959, 116—119 (нем.; рез. русск.)

В небольшом докладе рассматриваются некоторые простые задачи аддитивной теории чисел.

1) Отвечая на один вопрос Сидона, автор построил последовательность целых чисел, $0 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots$ такую, что для всех $n$ выполняется неравенство

$$c_1 \log n < f(n) < c_2 \log n,$$

где через $f(n)$ обозначено число решений уравнения $n = a_i + a_j$. Автор и Туран выдвинули гипотезу, что $\limsup_{n\to\infty} f(n) = \infty$, коль скоро $f(n) > 0$ для $n > n_0$.

2) С Мозером автор поставил следующую задачу: существуют ли такие $n+2$ числа $1 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+2} \leqslant 2^n$, чтобы все $2^{n+2}$ сумм вида

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k, \quad \varepsilon(k) = 0 \text{ или } 1,$$

были различны? Этот вопрос кажется очень трудным.

3) Следующий вопрос был поставлен Ханани. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots$ и $b_1 < b_2 < \ldots$ — две бесконечные последовательности целых чисел. Пусть $A(x)$ есть число $a_i < x$, $B(x)$ — число $b_j \leqslant x$. Предполагается, что любое $n > n_0$ представимо в виде $a_i + b_j$. Верно ли тогда, что

$$\limsup_{x\to\infty} A(x)\,B(x)/x > 1?$$

До сих пор автор не смог решить этот вопрос.

По резюме автора

**3736. Об аддитивной задаче с растущим числом слагаемых. Сираждинов С. Х.**, УзССР Фанлар Акад. докладлари, Докл. АН УзССР, 1959, № 1, 5—7 (рез. узб.)

Без доказательства дается следующее утверждение: Пусть $r_{n,p}(k)$ — количество представлений заданного целого положительного числа $k$ в виде $x_1^s + x_2^s + \ldots + x_n^s = k$, где $0 \leqslant x_i \leqslant p$; $i = 1, 2, \ldots, n$; $x_s = (k - na_s)/\sigma_s\sqrt{n}$, где $a_s = (p+1)^{-1}\sum_{m=1}^{p} m^s$ и $\sigma_s^2 = (p+1)^{-1}\sum_{m=0}^{p}(m^s - a_s)^2$. Тогда при $n \to \infty$ и $1 < x_s = o(\sqrt{n})$ ($p$ фиксировано)

$$r_{n,p}(k) = \frac{(p+1)^n}{\sqrt{2\pi n}\sigma_s}\exp\left\{\frac{x_s^2}{\sqrt{n}} + \frac{x_s^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(\frac{x_s}{\sqrt{n}}\right)\right\}\left[1 + o\left(\frac{x_s}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

где $\lambda(t) = \frac{\gamma_{3s}}{6\sigma_s^3} + \frac{\gamma_{4s}\sigma_s^2 - 3\gamma_{3s}^2}{24\sigma_s^6}t + \ldots$

ряд, сходящийся при малых $t$,

$$\gamma_{3s} = (p+1)^{-1}\sum_{m=0}^{p}(m^s - a_s)^3,$$

$$\gamma_{4s} = (p+1)^{-1}\sum_{m=0}^{p}(m_s - a_s)^4 - 3\sigma_s^4.$$

Эта теорема получается путем использования локальной предельной теоремы для больших уклонений (РЖМат, 1959, 7175). Утверждение автора усиливает одно замечание, имеющееся в статье референта (РЖМат, 1957, 5316).

Примечание референта. В выражении $\gamma_{3s}$ есть описка (правильное выражение дано в настоящем реферате). А. Г. Постников

**3737. Об одном предложении аддитивной теории чисел. Лаврик А. Ф.**, Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 1, 197—198

В связи с теоремой Ю. В. Линника, согласно которой каждое четное число $N > N_0$ можно представить в виде суммы двух простых чисел и ограниченного количества степеней заданного целого $g \geqslant 2$, и теоремой Н. П. Романова о том, что последовательность, составленная из суммы простого числа и степени данного целого $g \geqslant 2$, является последовательностью положительной плотности, была высказана гипотеза:

Существует постоянное число $k$ (хотя бы сколь угодно большое, но фиксированное) такое, что „почти" все четные (или нечетные) числа можно представить в виде

$$p + g^{x_1} + \ldots + g^{x_k}, \tag{1}$$

где $p$ — простое, $g \geqslant 2$ — данное целое, $x_i \geqslant 1$ — целые, т. е. асимптотическая плотность последовательности в ее целых чисел, представимых в форме (1), равна 1/2. Доказывается, что указанная гипотеза неверна всегда, кроме, может быть, случая $g = 2$.

Е. П. Ожигова

**3738. О представлении чисел в виде суммы квадрата и произведения. Хули** (On the representation of a number as the sum of a square and a product. Hooley Christopher), Math. Z., 1958, **69**, № 3, 211—227 (англ.)

Пусть $n > 0$ не квадрат, $\varkappa(n)$ — число представлений числа в виде $n = \lambda\mu + \nu^2$, т. е. $\varkappa(n) = \sum_{|\nu| < \sqrt{n}} \tau(n - \nu^2)$ ($\tau(n)$ — число делителей $n$).

Тогда при $n \to \infty$ имеем

$$\varkappa(n) = 4\sqrt{n}\left\{1 + O\left(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right)\right\}\{(\ln\sqrt{n} + \gamma) f_n(1) + f_n'(1)\},$$

где

$$f_n(s) = \frac{K(s)}{\zeta(2s)} \sum_{d^2 \mid n,\ d \text{ нечетно}} d^{1-2s} L_{(n/d^2)}(s),$$

$L_{(n/d^2)}(s)$ — ряд с действительным характером и $K(s)$ — некоторый ряд Дирихле, не зависящий от $n$.

Примечание референта. Более глубокие результаты в том же направлении (асимптотику разложений $n = \lambda\mu + \nu^2$ при наличии довольно произвольных геометрических условий на $(\lambda, \mu, \nu)$ можно получить методом Гекке (см. реферата (РЖМат, 1956, 1944).

Ю. В. Линник

**3739. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами с четырьмя и более переменными. I. Малышев А. В.**, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1959, 23, № 3, 337—364

Исследуется вопрос о представлении целых чисел целочисленными положительными квадратичными формами с $s \geqslant 4$ переменными. Результаты настоящей работы при $s = 4$ были опубликованы ранее (РЖМат, 1958, 3526).

Основным результатом является следующая теорема: Пусть $f(x_1, \ldots, x_s)$ — целочисленная положительная квадратичная форма определителя $\Delta$, $s \geqslant 4$, $m$ — целое положительное число, $\Omega$ — выпуклая область эллипсоида $f(x_1, \ldots, x_s) = m$ с эллиптическим телесным углом $\omega > 0$, $g$, $b_1, \ldots, b_s$ — заданные целые числа, удовлетворяющие сравнению $f(b_1, \ldots, b_s) \equiv m \pmod g$. Далее, пусть $r(f, \Omega, g; m)$ обозначает число целых точек, лежащих в $\Omega$ и сравнимых с $(b_1, \ldots, b_s) \bmod g$. Тогда при $m \to \infty$

$$r(f, \Omega, g; m) = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\pi^{s/2}}{\sqrt{\Delta}\,\Gamma(s/2)} m^{s/2-1} H(f, g; m) + O\left(m^{s/2-1+(s-3)/(6s+2)+\varepsilon}\right),$$

где $\omega_0$ — полный телесный угол $s$-мерного пространства, $H(f, g; m)$ — сингулярный ряд проблемы. Постоянные, входящие в $O$, зависят только от $\Delta$, $g$ и произвольного $\varepsilon > 0$.

Доказательство основано на обобщенных автором методах Клостермана и Тартаковского. При доказательстве этой теоремы автор попутно уточняет остаточный член одной формулы В. А. Тартаковского (Изв. АН СССР, 1929, 111, 122).

Из этой теоремы автор непосредственно получает также и теорему о числе целых примитивных точек в $\Omega$ и сравнимых с $(b_1, \ldots, b_s) \bmod g$. Из этой последней теоремы автор выводит формулу для числа примитивных примарных кватернионов, опубликованную ранее (РЖМат, 1958, 3526).

Г. А. Ломадзе

**3740. Аналог проблемы Тарри для показательной функции. Постников** (Ein Analogon des Tarryschen Problems für die Exponentialfunktion. Postnikov A. G.), Leonhard Euler 250. Geburtstag. Berlin, Akad. Verl., 1959, 281—283 (нем.; рез. русск.)

Доказывается асимптотическая формула для величины $A_n(P)$ — количества решений диофантова уравнения

$$g^{x_1} + \ldots + g^{x_n} = g^{y_1} + \ldots + g^{y_n}$$

в числах $0 \leqslant x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \leqslant P - 1$ ($g$ — целое $\geqslant 2$) — при $P \to \infty$

$$A_n(P) = n!\,P^n + O(P^{n-1}).$$

Резюме автора

**3741. Об одном разностном уравнении теории разбиений. Берг** (Über eine Differenzengleichung aus der Theorie der Partitionen. Berg Lothar), Wiss. Z. Univ. Rostock. Math.-naturwiss. Reihe, 1955—56, 5, № 2, 269—278 (нем.)

**3742. Арифметические функции. Бертрандиас** (Fonctions arithmétiques. Bertrandias F.), Sémin. P. Dubreil, M.-L. Dubreil—Jacotin et Pisot. Fac. Sci. Paris, 1957—1958, 11 année, Vol. 1. Paris, 1958, 11-1—11-14 (франц.)

Пусть арифметические функции $f(x)$ удовлетворяют условиям (A):

$$\text{(A)}\quad \begin{cases} f(x) \text{ — аналитическая внутри угла } |\arg x| < \delta, \\ f(x) \text{ — экспоненциального типа } w, \\ \text{т. е. } \lim\limits_{|x| \to \infty} \log|f(x)|/|x| = w < \infty. \end{cases}$$

Решается следующая задача: найти все арифметические функции $f(x)$, удовлетворяющие условиям (A), с $w < w_0$.

Будем обозначать через $l(s)$ преобразование Лапласа функции $f(x)$; через $S$ — множество особенностей функции $l(s)$ и через $T(u(s))$ — множество $\{z : z = u(s), s \in S\}$. Теперь определим трансфинитный диаметр $\tau$ замкнутого точечного ограниченного множества

$$E : \tau = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\max_E |T_n(z)|},$$

где $T_n(z)$ — полином Чебышева степени $n$ со старшим коэффициентом, равным 1.

Доказывается: 1) Если $f(x)$ — арифметическая функция, удовлетворяющая условиям (A), и если $\tau$ множества $T(e^s)$ меньше 1, то тогда

$$f(n) = \alpha_1^n P_1(n) + \ldots + \alpha_k^n P_k(n), \qquad (1)$$

где $P_1(n), \ldots, P_k(n)$ — полиномы и $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — целые алгебраические фигуранты со всеми своими сопряженными, принадлежащие $T(e^s)$. В частности, если $f(x)$ — целая арифметическая функция экспоненциального типа $w < 0{,}843$, то она представляется в форме (1). 2) Если $f(x)$ — целая функция экспоненциального типа арифметическая вместе с $f(-x)$ и если $\tau$ множества $T(e^s + e^{-s})$ меньше 1, то

$$f(n) = \eta_1^n P_1(n) + \eta_1^{-n} Q_1(n) + \ldots + \eta_k^n P_k(n) + \eta_k^{-n} Q_k(n), \qquad (2)$$

где $\eta_1, \ldots, \eta_k$ — алгебраические единицы со всеми своими сопряженными, принадлежащие $T(e^s + e^{-s})$. В частности, все целые функции $f(x)$ экспоненциального типа $w < 0{,}9984\ldots$ арифметические вместе с $f(-x)$ представляются в форме (2). 3) Все функции $f(x)$ целые вместе со своими производными $f^n(x)$ и тип, которых $r < 0{,}7$, представляются в следующей форме: $f(x) = \sum_{i=1}^{k} P_i(x)\, e^{\alpha_i x}$, где $\alpha_i e^{\alpha_i}$ — целые алгебраические числа со всеми своими сопряженными, принадлежащие $T(se^s)$.

Р. В. Уждавинис

**3743. Об одной проблеме Турана. Утияма** (Sur un problème posé par M. Paul Turán. Uchiyama S.), Acta arithm., 1958, 4, № 3, 240—246 (франц.)

Обозначим через $Z(m, n)$ совокупность систем $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ из $n$ комплексных чисел, обладающих тем свойством, что

$$s_{m+1} = s_{m+2} = \ldots = s_{m+n-1} = 0, \text{ где } s_\nu = z_1^\nu + z_2^\nu + \ldots + z_n^\nu$$

и $m \geqslant 0$ — целое. Очевидно, что $Z(m, n)$ содержит тривиальную систему $(0, 0, \ldots, 0)$. Согласно данному определению, две нетривиальные системы $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ и $(z_1', z_2', \ldots, z_n') \in Z(m, n)$ взаимно эквивалентны, если существует комплексное число $\lambda \neq 0$, удовлетворяющее следующему условию

$$\prod_{j=1}^{n} (x - z_j) = \prod_{j=1}^{n} (x - \lambda z_{j'}).$$

Пусть $B(m, n)$ обозначает число всех нетривиальных и взаимно неэквивалентных систем из $Z(m, n)$. Доказывается, что

$$\sum_{d\,(m,\,n)} a(d)\, B\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) = \frac{(m+n-1)!}{m!\,n!}, \qquad (1)$$

где $a(1) = 1$ и $a(l) = \prod_{p|l} (1-p)/l$ $(l > 1)$. Из (1) немедленно следует, что $B(m, n) = B(n, m)$ имеет место для всех $n > 0$, $m > 0$ — целых. Р. В. Уждавинис

**3744. О дзета-функции Римана и числе простых чисел, меньших заданной границы. Валле-Пуссен** (Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée. Vallée Poussin Ch.-J. de la), Colloq. théorie nombres, Bruxelles, 1955. CBRM. Liège-Paris, 1956, 9—66 (франц.)

**3745. Элементарное доказательство теоремы простых чисел для бинарных квадратичных форм. Элих** (Ein elementarer Beweis des Primzahlsatzes für binäre quadratische Formen. Ehlich Hartmut), J. reine und angew. Math., 1959, **201**, № 1-2, 1—36 (нем.)

Методом Сельберга доказывается оценка

$$\pi(x, f) = x/\varepsilon h \ln x + O(x/\ln x), \qquad (1)$$

выражающая число простых чисел $p \leqslant x$, представляемых корренной бинарной квадратичной формой $f = au^2 + buv + cv^2$ определителя $D = b^2 - 4ac$; здесь $h$ обозначает число классов; $\varepsilon = 2$, если $f$ форма an eps и $\varepsilon = 1$ для остальных $f$. Предполагается известной арифметика бинарных квадратичных форм и оценка $\sum_{p \leqslant x} \varkappa(p)\, p^{-1} \log p = O(1)$ для всех вещественных неглавных характеров $\varkappa(n)$ модуля $D$. Из более ранних элементарных доказательств теоремы (1) Фогельс (Изв. АН ЛатвССР, 1950, **11**, 123—130) дает лишь набросок доказательства для форм отрицательного дискриминанта, но Бригс (РЖМат, 1955, 2546) основывается на формуле, которая, по мнению автора, не верна.

Имеется более десяти опечаток: существенной является ошибка в первом члене формулы (6.2), где вместо $n \leqslant x$, $n \in \mathfrak{R}$, $\log^2 p$ следует читать $p \leqslant x$, $p \in \mathfrak{R}$, $\log p$. Э. К. Ф.

**3746. О некоторых рядах Дирихле. Линт** (Über einige Dirichletsche Reihen. Lint J. H. van), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1958, **A61**, № 1, 56—60; Indagationes math., 1958, **20**, № 1, 56—60 (нем.)

Сандем (РЖМат, 1954, 4339) изучал ряд Дирихле $\sum_{m=1}^{\infty} r_a(m^2)\, m^{-s}$, где $r_a(m^2)$ — число представлений $m$ в виде суммы $a$ квадратов. Для $a = 3$, 5 и 7 он нашел эйлеровское произведение для этих рядов, например, при $a = 5$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_5(m^2)}{m^s} = 10\, \frac{\zeta(s)\,\zeta(s-3)}{\zeta(s-1)\,(1-2^{1-s})}.$$

Если $a$ — нечетно и больше 7, то указанный ряд не разлагается в эйлеровское произведение, поскольку род квадратичной формы $x_1^2 + \ldots + x_a^2$ содержит более чем один класс.

В реферируемой работе выводится вид эйлеровского произведения в случае, когда $r_a(m^2)$ означает „среднее число" представлений родом форм, содержащим форму $x_1^2 + \ldots + x_a^2$, а $m$ пробегает все нечетные числа. Доказательства используют зигелевскую теорию квадратичных форм. Автор отмечает возможность обобщения этих результатов на случай квадратичных форм с любым дискриминантом. И. И. Пятецкий-Шапиро

**3747. К теории рядов Дирихле. Туран** (Zur Theorie der Dirichletschen Reihen. Turán Paul), Leonhard Euler 250. Geburtstag. Berlin, Akad. Verl., 1959, 322—336 (нем.; рез. русск.)

Для функции $f(s)$, регулярной в некоторой полуплоскости, величина $\sigma_s$ „абсцисса конечности нулей („Abszisse der Fast Nullstellfreiheit") определяется следующим условием: (если она вообще существует) при произвольно малом положительном $\varepsilon$ полуплоскость $\sigma > \sigma_n + \varepsilon$ содержит лишь конечное число нулей функции $f(s)$, а полуплоскость $\sigma > \sigma_n - \varepsilon$ уже бесконечное число нулей $f(s)$. В своей книге „Новый метод в анализе и его применения" автор определил $\sigma_n$-абсциссу для следующего класса $\mathfrak{A}$ функций $f(s)$ ($c_\nu$ — положительные числовые постоянные, $c_\nu(\varepsilon)$ — постоянные, зависящие только от $\varepsilon$, $s = \sigma + it$.

a) пусть в полуплоскости $\sigma > 1$

$$f(s) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

и пусть при любом $\varepsilon > 0$ в полуплоскости $\sigma \geqslant 1 + \varepsilon$ выполняется неравенство $|f(s)| \geqslant c_1(\varepsilon)$;

b) пусть $f(s)$ мероморфна для $\sigma \geqslant 1/2$ и в области $\sigma \geqslant 1/2 + \varepsilon$, $|t| \geqslant c_2(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$|f(s)| \leqslant |t|^{\eta(\varepsilon)},$$

причем $\lim_{x \to 0} \eta(x) = 0$;

c) пусть в полуплоскости $\sigma > 1$

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^s},$$

причем $|b_n| \leqslant c_3 \log n$.

В классе $\mathfrak{A}$ имеет место формула

$$\sigma_n = 1 - \overline{\lim_{(\alpha,\,\beta)}} \frac{\beta}{\alpha}, \qquad (1)$$

где $(\alpha, \beta)$ пробегает множество пар $(\alpha, \beta)$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $\alpha > 2\beta$, которые удовлетворяют неравенству

$$\left| \sum_{N_1 \leqslant n \leqslant N_2} b_n e^{-it \log n} \right| \leqslant c_4\, \frac{N \log^{100} N}{t^\beta}$$

при

$$t^\alpha \leqslant N/2 < N_1 < N_2 \leqslant N, \quad t \geqslant c_5.$$

Если пытаться применить это предложение к дзета-функции Римана, то окажется, что утверждение b) совпадает с одной не доказанной гипотезой Линделефа. В предлагаемой работе формула (1) устанавливается для более широкого класса функций $f(s)$, именно условие b) заменяется следующим более слабым требованием:

d) для произвольно малых положительных $\gamma$ и $\delta$ и $\tau > c_\sigma(\gamma; \delta)$ число $M_\delta(\tau)$ нулей функции $f(s)$ в „малом" квадрате

$$(1/2 + \gamma \leqslant)\ \varkappa - \delta \leqslant \sigma \leqslant \varkappa\ (\leqslant 1),\ |t - \tau| \leqslant \delta/2$$

не превышает $g(\delta) \log \tau$, причем $g(x) = o(x)$ $(x \to 0)$, если только $f(s)$ не исчезает в „большом" параллелограмме $\sigma \geqslant \varkappa$, $|t - \tau| \leqslant \log \tau$.

Резюме автора

**3748. О дзета-функциях, заданных в виде произведения. Лампрехт** (Durch Produktdarstellungen erklärte Zetafunktionen. Lamprecht Erich), Leonhard Euler 250. Geburtstag. Berlin, Akad. Verl., 1959, 246—255 (нем.; рез. русск.)

Данное исследование является дальнейшим вкладом в программу, разрабатывающуюся в последние годы многими авторами: конечно-производимым полям, т. е. полям, которые получаются из их простого поля путем присоединения конечного числа элементов, сопоставля-

ются дзета-функции со свойствами подобными тем, которыми в случае числовых полей обладают дедекиндовы дзета-функции, а в случае поля функций одного переменного над конечным полем — так называемые дзета-функции над конечным полем. Для этих дзета-функций высших полей здесь рассматриваются, в частности, следующие три вопроса: 1. Существует ли полное представление посредством эйлеровских произведений с теми же свойствами, что и в классическом случае? 2. Являются ли эти дзета-функции инвариантно-связанными с рассматриваемыми полями? 3. Каковы соотношения между встречающимися в литературе различными определениями подобных дзета-функций?

Вследствие необходимой здесь краткости рассматривается в основном лишь простейший с данной точки зрения нетривиальный случай, а именно случай поля функций одной переменной над конечным алгебраическим числовым полем. В § 1 дана сводка ранее опубликованных в других местах результатов, относящихся к первым двум вышеуказанным вопросам. В § 2 с целью отыскания ответа на третий вопрос исследовались соотношения между определенными в § 1 инвариантными дзета-функциями и одним обобщением дедекиндовой дзета-функции, данным Э. Келером. В § 3 содержится краткая сводка аналогичных фактов для полей более общих типов. Резюме автора

**3749. Арифметическая дзета-функция циклических $p$-полей с двумя различными полями Галуа. Лампрехт** (Arithmetische Zetafunktionen zyklischen $p$-Körpern von zwei Veränderlichen über einem Galoisfeld. Lamprecht Erich), Arch. Math., 1955, **6**, № 4, 266—274 (нем.)

В этой заметке автор изучает обобщение дзета-функции на поля кронекеровой размерности 2 и характеристики $p$ (простое). Для определения этих дзета-функций автор использует продолжение значений их на подполях кронекеровой размерности 1 по лемме Гаусса. Тогда эта функция зависит от расслоения заданного поля (проблемы, которые не возникают для дзета-функций поля функций одной переменной над конечным алгебраическим полем чисел, указывают, что его определение ограничивает подход к указанной проблеме) и возникают немедленно все те трудности, которые присущи зависимости дзета-функции от частного расслоения. Для уверенности в начальных результатах автор ограничивается $p$-адическими расширениями поля рациональных функций, так что теория разветвления может привести к упрощению гауссовых сумм, используемых при обсуждении этих функций. Отсутствие обобщения функционального уравнения (или его модификации) указывает на пробный характер подхода автора. (Для дальнейшего изучения дзета-функций полей простой характеристики см. Weil A., Bull. Amer. Math. Soc., 1949, **55**, 497—508; РЖМат, 1955, 6059). O. F. G. Schilling

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, 350.

**3750. Соотношения между числами классов дивизоров. Брауэр** (Relations between class numbers. Brauer Richard), Algebr. Geom. Conf. Notes. Univ. Chicago. Chicago, s. a., 38—42 (англ.)

Пусть $G$ — конечная группа и $K$ — нормальное алгебраическое числовое поле с группой Галуа $G$ (над полем рациональных чисел). Через $\Omega = \Omega_H$ обозначим подполе, принадлежащее подгруппе $H$ группы $G$. Для дзета-функций $\zeta(s, \Omega)$ промежуточных полей $\Omega$ Артином были описаны все соотношения вида $\prod_H \zeta(s, \Omega)^{a(H)} = 1$. В этих соотношениях показатели $a(H)$ зависят только от группы $G$ и не зависят от $K$. Пусть $h(\Omega)$ — число классов дивизоров поля $\Omega$. Показывается, что при фиксированной системе показателей $a(H)$ для всех полей $K$ с данной группой Галуа $G$ выражение $\prod_H h(\Omega)^{a(H)}$ принимает лишь конечное число значений. З. И. Боревич

**3751. К теории обобщенных дзета-функций. Вейль А.,** Сугаку, 1956, **7**, № 4, 196—199 (японск.)

Доклад, прочитанный на международном симпозиуме по алгебраической теории чисел, состоявшемся в Токио и Никко (Япония) в 1955 г. В этом докладе автор рассказал об истории и недавних результатах по $\zeta$-функции

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p=2,3,5,\ldots} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

где $n$ — целое и $p$ — простое число. Liu Chang Wen

**3752. О некоторых характерах групп классов идеалей. Вейль А.,** Сугаку, 1956, **7**, № 4, 205—207 (японск.)

Доклад, прочитанный на Международном симпозиуме по алгебраической теории чисел в Токио и Никко в 1955 г. В этой лекции автор высказывает гипотезу касающуюся характера Гекке (РЖМат, 1957, 761[illegible]).

Liu Chang Wen

**3753. Плотность в семействе абелевых расширений. Кубота,** Сугаку, 1956, **7**, № 4, 210—211 (японск.)

Доклад, прочитанный на Международном симпозиуме по алгебраической теории чисел в Токио и Никко в 1955 г. В этом докладе автор вводит новую плотность для некоторого подмножества $\Omega$ семейства всех полей абелевого расширения над алгебраическим полем $K$ конечной степени с группой Галуа, которая изоморфна фиксированной абелевой группе (РЖМат, 1957, 8416).

Liu Chang Wen

**3754. Расслоенные пространства и пучки в теории чисел. Ямадзаки,** Сугаку, 1956, **7**, № 4, 213—214 (японск.)

Доклад, прочитанный на Международном симпозиуме по алгебраической теории чисел в Токио и Никко в 1955 г. В этом докладе автор пытается обобщить понятие расслоенных пространств на случай алгебраических полей согласно лекциям, которые были прочитаны Вейлем в Чикагском университете (РЖМат, 1958, 7696). Liu Chang Wen

**3755. О дзета-функции поля эллиптических функций, имеющей особый модуль. Дёринг,** Сугаку, 1956, **7**, № 4, 222—224 (японск.)

Доклад, прочитанный на Международном симпозиуме по алгебраической теории чисел в Токио и Никко в 1955 г. В этой лекции автор обсуждает простой идеал, который является ведущим идеалом характера Гекке, представляющего $\zeta$-функцию поля эллиптической кривой с комплексным умножением (РЖМат, 1957, 7599). Liu Chang Wen

**3756. Число решений уравнений в конечных полях. Вейль А.,** Сугаку, 1956, **7**, № 4, 263—464 (японск.)

Лекция, прочитанная в Хиросимском университете 29 сентября 1955 г. и в Нагойском университете 8 октября 1955 г. Liu Chang Wen

**3757. Одно обобщение абелевых интегралов. Эйхлер** (Eine Verallgemeinerung der Abelschen Integrale. Eichler M.), Leonard Euler 250. Geburstag. Berlin, Akad. Verl., 1959, 112—115 (нем.; рез. русск.)

Как известно, аналитические отображения алгебраической кривой $C$ на себя порождают представления в модулях абелевых дифференциалов $udv$ всех трех родов. При некоторых дополнительных предположениях такие отображения порождают также представления в модуле дифференциалов $udv^n$ степени $n > 1$. След такого представления отображения $T$ вычисляется по формуле

$$s(T) = -\frac{1}{2} \sum \frac{c_{\mathfrak{p}}^{\frac{n-1}{2}} - c_{\mathfrak{p}}^{-\frac{n-1}{2}}}{c_{\mathfrak{p}}^{1,2} - c_{\mathfrak{p}}^{-1/2}} + \frac{1}{2}(s^0(T) + s^2(T)),$$

где использованы следующие сокращенные обозначения $s^0(T)$ и $s^2(T)$ обозначают следы (тривиальных) представлений отображения $T$ в нульмерной и двумерной группах гомологий кривой $C$ соответственно; впрочем для $n>1$ последнее слагаемое следует отбросить. В этой формуле суммирование производится по всем неподвижным точкам $\mathfrak{p}$ отображения, причем через $c_{\mathfrak{p}}$ обозначен коэффициент искажения (Verzerrungsverhältnis) в неподвижной точке $\mathfrak{p}$. В случае $n=1$ эта формула в существенном эквивалентна теореме Лефшеца о неподвижных точках.

Доказательство, а также добавочные условия, которым подчиняются отображение $T$ и дифференциалы $udv^n$, получаются из соответствующей униформизации кривой $C$. Тогда дифференциалам $udv^n$ отвечают автоморфные формы $\varphi(\tau)$ униформизирующего переменного $\tau$, т. е. инвариантные дифференциалы $\varphi(\tau)\,d\tau^n$. Из них строятся названные в заглавии обобщенные абелевы интегралы

$$\Phi(\tau)=\int_{\tau_0}^{\tau}(\tau-\sigma)^{n-2}\varphi(\sigma)\,d\sigma,$$

теория которых во многом совпадает с классической теорией. Резюме автора

**3758. К теории диофантовых приближений. Главка** (Zur Theorie der diophantischen Approximationen. Hlawka Edmund), Anz. Österr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1958, **95**, № 1-15, 41—48 (нем.)

Пусть $A=(a_{nk})$ $(n,\ k=1,2,\ldots)$ — действительная или комплексная матрица с $\sup_n \sum_k |a_{nk}|<\infty$ и $\alpha_n=\sum_k |a_{nk}|^2$. Обозначим через $Q$ прямоугольник: $0<\alpha_k<x_k<\beta_k<1 \bmod 1$ $(k=1,2,\ldots,r)$ с объемом $V(Q)=\prod_{k=1}^{r}(\beta_k-\alpha_k)$ в $r$-мерном тор-пространстве $T_r$. Пусть $\psi_Q$ — характеристическая функция $Q$. Положим

$$L_n(\omega,A,\mathfrak{l})=\sum_k a_{nk}\psi_Q[\delta_k(\mathfrak{l})],$$

где $\omega=(\mathfrak{r}_k)$ — последовательность векторов $\mathfrak{r}_k=x_{k1},\ldots,x_{kr} \bmod 1$, $\delta_k(\mathfrak{l})=(x_{k1}l_1,\ldots,x_{kr}l_r)$ и $\mathfrak{l}=(l_1,\ldots,l_r)$ точка некоторой решетки. Очевидно, что если положить

$$a_{nk}=\begin{cases}1/n & \text{при } 1\leqslant k\leqslant n,\\ 0 & \text{при } k>n,\end{cases}$$

то $L_n(\omega,A,\mathfrak{l})$ означает частоту, с которой последовательность $(\delta_k(\mathfrak{l}))$ входит в $Q$. В дальнейшем будем считать $a_{nk}\geqslant 0$.

Основной результат:

Для всех $\mathfrak{l}$, удовлетворяющих условию $1<|\mathfrak{l}|<\exp(\sigma/\sigma_n)-9r$, имеем $\Delta_n(\mathfrak{l})<c\sigma^{1/2r}\times\left(\log\frac{1}{\sigma}\right)^{1+1/2r}$, где $\Delta_n(\mathfrak{l})=|L_n(\omega,A,\mathfrak{l})-V(Q)|$ и $c$ — положительная постоянная, зависящая от $r$.

Р. В. Уждавинис

**3759. Заметка к теореме переноса. Ярник** (Eine Bemerkung zum Übertragungssatz. Jarník Vojtěch), Изв. Матем. ин-т. Болг. АН, 1959, 3, № 2, 169—175 (нем.; рез. болг., русск.)

Пусть

$$\Theta=\begin{pmatrix}\theta_{11},\ldots,\theta_{m1}\\ \ldots\ldots\\ \theta_{1n},\ldots,\theta_{mn}\end{pmatrix},\qquad H=\begin{pmatrix}\theta_{11},\ldots,\theta_{1n}\\ \ldots\ldots\\ \theta_{m1},\ldots,\theta_{mn}\end{pmatrix}$$

— действительные матрицы,

$$S_j(x)=x_1\theta_{1j}+\ldots+x_m\theta_{mj}-x_{m+j}\quad(j=1,2,\ldots,n),$$
$$T_i(x)=x_1\theta_{i1}+\ldots+x_n\theta_{in}-x_{n+i}\quad(i=1,2,\ldots,m),$$

$A(\Theta)$ — верхняя грань тех чисел, $a$ для которых система неравенств

$$|S_j(x)|<\frac{1}{X^a}\ (j=1,2,\ldots,n),\quad X>0$$

имеет бесконечное множество решений в целых числах $x_1,x_2,\ldots,x_m,\ x_{m+1},\ldots,x_{m+n}$.

Известна оценка („теорема переноса")

$$A(\Theta)\geqslant\frac{mA(H)+(m-1)}{(n-1)A(H)+n};\qquad(1)$$

при $m=-1$ отсюда получаются следующие неравенства, впервые установленные А. Я. Хинчиным

$$\frac{A(H)-(n-1)}{n}\geqslant A(\Theta)\geqslant\frac{A(H)}{(n-1)A(H)+n}.\qquad(2)$$

Автором ранее было доказано, что оба неравенства в (2) точны; в реферируемой работе дается элементарное доказательство того, что (1) точно при $n\geqslant m$. В случае $1<n<m$ автору удается доказать то же самое при условии $A\geqslant(m-1)/(n-1)$. Обе эти теоремы являются непосредственным следствием более точной теоремы, доказанной им в этой же статье. П. Г. Когония

**3760. О метрической теории неоднородных диофантовых приближений. Курцвейль** (On the metric theory of inhomogeneous diophantine approximations. Kurzweil J.), Studia math., 1955, **15**, № 1, 84—112 (англ.)

Пусть $K$ — единичный круг в плоскости $(\varsigma_1,\varsigma_2)$. Если $x$ — действительное число, то через $\varsigma=x'=\Phi(x)$ обозначим точку в $(\varsigma_1,\varsigma_2)$ с координатами $(\cos 2\pi x,\ \sin 2\pi x)$; если $h$ и $g$ — действительные числа, $g<h$, тогда через $I[g,h]$ обозначим множество точек $x'$, для которых $g<x<h$.

Пусть $B$ — множество всех последовательностей $\{b_i\}$, $i=1,2,\ldots$, действительных чисел, удовлетворяющих следующим условиям: 1) $b_i>0$, $i=1,2,\ldots$, 2) $b_{i+1}<b_i$, $i=1,2,\ldots$, 3) $\sum_{i=1}^{\infty}b_i=\infty$. Определим множество $a(B)$. Действительное число $x$ $(0\leqslant x<1)$ принадлежит к множеству $a(B)$, если удовлетворяется следующее условие: почти каждая точка $\eta\in K$ для каждой последовательности $\{b_i\}\in B$ принадлежит бесконечно многим $I\,|\,ix-b_i,\ ix+b_i]$, $i=1,2,\ldots$

Пусть, далее, $\varphi(q)\geqslant 0$ невозрастающая функция определена для всех $q\geqslant 1$; и $x$ допускает аппроксимацию $\varphi(q)$, если существует бесчисленная последовательность пар целых чисел $(p_n,q_n)$, $q_{n+1}>q_n$, удовлетворяющих неравенству $|x-p_n/q_n|<\varphi(q_n)$. Теперь определим множество $Y_{\varphi(q)}$ следующим образом: $y\in Y_{\varphi(q)}$, если $0<y<1$ и если существует такое число $d_y\geqslant 1$, что $y$ не допускает аппроксимации $\varphi(d_y q)$.

Доказывается, что

$$a(B)=Y_{1/q^2}.\qquad(1)$$

Отсюда непосредственно следует решение задачи Г. Штейнгауза: все ли иррациональные числа интервала (0, 1) принадлежат к $a(B)$. Кроме того, доказывается, что $a(B_{\varphi(q)})=Y_{\varphi(q)}$, где $B_{\varphi(q)}$ — некоторое подходящее подмножество множества $B$ для класса функции $\varphi(q)$; и (1) обобщается на случай $s$ линейных форм с $n$ переменными. Р. В. Уждавинис

**3761. О построении последовательностей, совместно нормальных с данной. Старченко Л. П.**, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, 22, № 6, 757—770

**Исправления к статье Л. П. Старченко «О построении последовательностей, совместно нормальных с данной». Старченко Л. П.**, Изв. АН СССР, Сер. матем. 1959, 23, № 4, 635—636

Основная работа написана с большим количеством неточностей, так что рассматривать ее отдельно от исправлений нельзя. Изложим содержание работы на языке теории диофантовых приближений с показательной функцией (форма изложения автора другая, с большим количеством новых понятий).

Пусть $g \geqslant 2$ — натуральное число. Пусть $\alpha$ — любое вещественное число такое, что дробные доли $\{\alpha g^x\}$, $x = 1, 2, \ldots$, равномерно распределены на $[0, 1]$. В § 1 автор дает способ, как к данному числу $\alpha$ построить такое число $\beta$, что последовательность точек $(\{\alpha g^x\}, \{\beta g^x\})$, $x = 1, 2, \ldots$, равномерно распределена в единичном квадрате. Н. М. Коробов (Изв. АН СССР, Сер. матем., 1950, **14**, 215—238) доказал, что если $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ — вполне равномерно распределенная последовательность, то число $\alpha = [\alpha_1 g]/g + [\alpha_2 g]/g^2 + \ldots$ ([ ] — знак целой части) обладает свойством, что дробные доли $\{\alpha g^x\}$, $x = 1, 2, \ldots$ равномерно распределены на $[0, 1]$. В § 2 устанавливается, что если дробные доли $\{\alpha g^x\}$, $x = 1, 2, \ldots$ равномерно распределены на $[0, 1]$ и $\alpha = a_1/g + a_2/g^2 + \ldots$ — $g$-ичное разложение числа $\alpha$, то существует такая вполне равномерно распределенная последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, что $a_i = [\alpha_i g]$, $i = 1, 2, \ldots$. В § 3 автор допустил ошибку, в результате которой § 3 и § 4 работы ошибочны. А. Г. Постников

**3762. Совместные диофантовы приближения для рядов. Фенна** (Simultaneous Diophantine approximation to series. Fenna D.). J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 2, 173—176 (англ.)

Пусть $\mathfrak{f}$ обозначает произвольное нетривиальное поле, $z$ — „неизвестную". Пусть $\mathfrak{R}$ — поле формальных степенных рядов, состоящих из выражений $x = \alpha_d x^d + \alpha_{d-1} x^{d-1} + \ldots$, где $\alpha_d, \alpha_{d-1} \ldots \in \mathfrak{R}$, $\alpha_d \neq 0$.

Пусть $\mathfrak{T} = \mathfrak{f}[z]$, $\mathfrak{R} = \mathfrak{f}(z)$ — соответственно кольцо многочленов и поле рациональных функций от $z$. Пусть $k > 1$ — произвольное вещественное число. Определена неархимедова норма (оценка) обычным образом $|x| = k^d$, $|0| = 0$. Пусть $t_1, \ldots, t_n$ — элементы $\mathfrak{R}$, не все принадлежащие $\mathfrak{R}$, $b_0, b_1, \ldots, b_n$ — элементы $\mathfrak{T}$ и $b_0 \neq 0$. Обозначим через $c(n)$ верхнюю грань чисел $c$, определяемых свойством, что для всех таких $t_1, \ldots, t_n$ имеется бесконечно много множеств $b_0, b_1, \ldots, b_n$, удовлетворяющих неравенствам $|b_0(b_0 t_i - b_i)^n| \leqslant k^{-c}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Доказывается, что $c(n) = n$. А. Г. Постников

**3763. О диофантовых приближениях линейных форм. Обрешков** (Върху диофантовите приближения на линейни форми. Обрешков Н.), Изв. Матем. ин-т. Българ. АН, 1959, **3**, № 2, 3—18 (болг.; рез. русск., франц.)

Работа содержит ряд результатов о приближении линейных форм, уже опубликованных автором (см., например, РЖМат, 1959 4415), а также некоторые их обобщения. В частности, автор, и пользуя развитый им ранее метод, доказывает теорему:

Пусть $p$ и $d$ — целые, положительные числа, $p \geqslant d$; $n > 0$ — целое и кратное $d/(p, d)$. Тогда для произвольных вещественных чисел $\omega_1, \ldots, \omega_p$ существуют целые неотрицательные числа $x_1, \ldots, x_p$, все $\leqslant n$ такие, что по крайней мере $d$ из них отличны от нуля, и целое число $y$, для которых

$$|\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_p x_p - y| \leqslant \frac{1}{np/d + 1}, \qquad (1)$$

при этом равенство в (1) достигается.

И. Ш. Славутский

**3764. Многомерные алгорифмы, обобщающие эйлерово разложение числа $e$ в непрерывную дробь. Брун** (Mehrdimensionale Algorithmen, welche die Eulersche Kettenbruchentwicklung der Zahl $e$ verallgemeinern Brun Viggo), Leonhard Euler 250. Geburtstag. Berlin, Akad. Verl., 1959, 87—100 (нем.; рез. русск.)

Трехмерный алгорифм, прежде введенный автором, состоит в следующем: три данных положительных числа упорядочиваются по величине, второе вычитается из первого, а с полученными числами поступают таким же образом до бесконечности. Исследуются функции, связанные с этим алгорифмом, в предположении закономерности, подобной той, которая получается при эйлеровом разложении $e$ в непрерывную дробь.

Далее показан способ применения упомянутого алгорифма, дающего относительно 1, $k$, $h$ хорошие рациональные приближения $k$ и $h$, для достижения путем подходяще выбранного $h$ особо хороших приближений для $k$. В заключение указывается на некоторые результаты о подобном же четырехмерном алгорифме, предусмотренные для позднейшей работы.

Резюме автора

**3765. О связи между классами Лагранжа иррациональностей с ограниченными неполными частными и классами предельных форм А. А. Маркова. Делоне, Виноградов** (Über den Zusammenhang zwischen den Lagrangeschen Klassen der Irrationalitäten mit begrenzten Teilnennern und den Markoffschen Klassen der extremen Formen. Delaunay B. N., Vinogradov A. M.), Leonhard Euler 250. Geburtstag. Berlin, Akad. Verl., 1959, 100—108 (нем.; рез. русск.)

См. РЖМат, 1959, 3476

**3766. Одно свойство квадратичных иррациональностей. Леккеркеркер** (Een eigenschap van kwadratische getallen. Lekkerkerker C. G.), Rapp. Math. centrum, 1957, № ZW-011, 1—4 (гол.)

Продолжение работы автора (РЖМат, 1957, 6134 и 6135). Пусть $\Theta$ — положительное иррациональное число. Пусть $I(\Theta)$ — множество всех чисел вида $q^2(\Theta - p/q)$, где $p$, $q$ — натуральные числа. Доказаны две теоремы: 1) Точка 0 есть тогда и только тогда точка сгущения $I(\Theta)$, когда частные знаменатели правильной цепной дроби

$$\Theta = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$$

неограничены; 2) Множество $I'(\Theta)$ точек сгущения множества $I(\Theta)$ тогда и только тогда дискретно, когда $\Theta$ есть квадратичная иррациональность. Указано, что теорема 2 дает новое характеристическое свойство квадратичных иррациональностей, совершенно отличающееся по форме от известного критерия Лагранжа.

А. Н. Хованский

**3767. Точки решетки в неограниченных множествах. Леккеркеркер** (Roosterpunten in onbegrensde verzamelingen. Lekkerkerker C. G.), Rapp. Math. centrum, 1957, № ZW-021, 1—4 (гол.)

Пусть $f(x)$ — действительная, неотрицательная функция, определенная в полуинтервале $[0, \infty)$, интегрируемая по Лебегу в каждом интервале $(0, t)$ $(t > 0)$. За $f(x)$ специально можно взять характеристическую функцию измеримого по Лебегу множества $V$, лежащего в полуинтервале $[0, \infty)$.

Приводятся весьма сжатые доказательства нескольких теорем, в которых устанавливается, какие $x > 0$ обладают следующими свойствами:

1) $\sum_{k=1}^{\infty} f(kx) = \infty$, соответственно $kx \in V$, бесконечно часто,

2) $\sum_{k=1}^{\infty} f(kx) < \infty$, соответственно $kx \in V$, самое большее ограничено часто,

3) $\sum_{k=1}^{\infty} f(kx) = 0$, соответственно $kx \in V$, никогда не имеет места.

Далее полученные результаты обобщаются на функции многих переменных, соответственно на многомерные множества. Доказательства не приведены. Подробное

изложение и полные доказательства даны в работе (РЖМат, 1959, 5505). Г. А. Ломадзе

**3768. Целочисленные решения системы квадратических уравнений. Морделл** (Integer solutions of simultaneous quadratic equations. Mordell L. J.), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1959, **23**, 126—143 (англ.)

Если $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — невырожденная неопределенная квадратическая форма не менее чем пяти переменных с рациональными коэффициентами, то по теореме Мейера уравнение $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ имеет (нетривиальное) рациональное решение.

Автор на базе этой теоремы рассматривает вопрос о совместном рациональном решении двух уравнений $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $g_n(x_1, x_2 \ldots, x_n) = 0$, где $f_n(x)$ и $g_n(x)$ — невырожденные квадратические формы $n$ переменных.

Основной результат: Пусть ни один член семейства $\lambda f_n(x) + \mu g_n(x)$ ($\lambda$, $\mu$ — действительные) не является ни определенной квадратической формой, ни вырожденной ранга $< 5$, но по крайней мере один член содержит более четырех положительных и более четырех отрицательных квадратов и в представлении в виде суммы квадратов действительных линейных форм. Тогда при $n \geqslant 13$ система

$$\begin{cases} f_n(x) = 0 \\ g_n(x) = 0 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество рациональных решений.

М. Б. Барбан

**3769. О представлении нечетных чисел посредством бинарной канонической формы. Пиньятаро** (Sulla rappresentazione dei numeri dispari mediante forme canoniche binarie. Pignataro Salvatore), Ricerca, 1958, **9**, gen.-giugno, 11—31 (итал.)

Подробно указывается, как методом бесконечного спуска можно получить решения в натуральных числах неопределенных уравнений типа $ax^2 - by^2 = m$, где $a$, $b$ — натуральные взаимно простые числа, $m$ — нечетное, $(x, y) = 1$, $(x, b) = 1$, $(y, a) = 1$.

В. А. Голубев

**3770. О связи делимости на простое число числа классов вещественного абелева поля с делимостью (на это простое число) обобщенных чисел Бернулли. Леопольдт** (Über Klassenzahlprimteiler reeller abelscher Zahlkörper als Primteiler verallgemeinerter Bernoullischer Zahlen. Leopoldt Heinrich-Wolfgang), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1959, **23**, 26—47 (нем.)

Вычисление числа классов в вещественных относительных полях связано со значительными трудностями, одной из которых является построение основной системы единиц поля. Подобно тому, как это делает Куммер для поля деления круга, автор, обходя вышеупомянутую трудность, устанавливает связь между делимостью обобщенных чисел Бернулли на некоторое простое число $l$ и делимостью числа классов некоторого вещественного поля. Одним из результатов работы является теорема: Пусть $K = P(\sqrt{p})$ — вещественное квадратичное числовое поле с простым дискриминантом $p \equiv 1 \pmod 4$ и $\chi(x) = (x/p)$ — символ Лежандра. Тогда, если для нечетного простого числа $l < (1/2)\sqrt{p}\log p$ числа $B_\chi^{l-1}$ все взаимно просты с $l$, то $K$ имеет только один класс.

Обобщенные числа Бернулли $B_\chi^n$ определяются из соотношения

$$\sum_{\mu=1}^{m} \chi(\mu)\frac{te^{\mu t}}{e^{mt}-1} = \sum_{n>0} B_\chi^n \frac{t^n}{n!}.$$

П. Н. Реморов

**3771. О некоторых неопределенных уравнениях в циклических полях конечного расширения. Реморов П. Н.**, Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, **197**, 9—15

Пусть $K$ — основное поле, $K_0 = K(\zeta)$ — поле деления круга на $p$ частей, $\zeta^p = 1$; $K_1, K_2, \ldots$ — последовательность циклических расширений, построенных по правилу

$$K_1 = K(\sqrt[p]{E_0}, K_0),\ K_{l+1} = K(\sqrt[p]{E_l}, K_l)$$
$$(i = 1, 2, \ldots),$$

$E_l$ — единица поля $K_l$, не являющаяся $p$-й степенью единицы из $K_l$. При этом предполагается, что $p$ — регулярное простое число, т. е. такое, что не делит числа классов идеалов полей $K_0$, $K_l$ ($i = 1, 2, \ldots$).

Далее, пусть $\Delta = q_1^{m_1} q_2^{m_2} \ldots q_r^{m_r}$ — целое рациональное число такое, что $\Delta \not\equiv 0 \ (p)$. Тогда, как известно (Вейль Г., Алгебраическая теория чисел, М., 1947), каждое простое число $q_j$ ($j = 1, 2, \ldots, r$) разлагается в поле $K_0$ в произведение отличных друг от друга простых идеалов одной и той же степени $f_l$.

Рассматриваются числа $\Delta$, удовлетворяющие двум следующим условиям:

1) $\dfrac{1}{f_1} + \dfrac{1}{f_2} + \ldots + \dfrac{1}{f_r} < 1 - \dfrac{2}{p-1}$.

2) Простые идеалы разложения чисел $q_j$ ($j = 1, 2, \ldots, r$) в поле $K_0$ остаются простыми и в каждом поле последовательности $K_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, i-1$).

Доказывается теорема: Пусть $\Delta$ — число, удовлетворяющее условиям 1) и 2), $\lambda = 1 - \zeta$, $L_l$ — простой делитель $p$ в поле $K_l$. Тогда уравнение

$$E_l \lambda^{mp} \Delta z^p = x^p + y^p$$

неразрешимо в целых числах поля $K_l$, взаимно простых с $L_l$. Эта теорема является обобщением результатов Денеша (РЖМат, 1955, 3042), разобравшего случай $\Delta = 1$.

Б. М. Уразбаев

**3772. К вопросу о представлении целых чисел циркулянтными формами. Реморов П. Н.**, Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, **197**, 16—19

Циркулянтная форма порядка $p$ от переменных $x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}$ имеет вид

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}) = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_{p-1} \\ x_{p-1} & x_0 & \ldots & x_{p-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_0 \end{vmatrix}$$

Пусть $D$ — данное целое рациональное число, причем $(p, D, z) = 1$, $q_l$ ($i = 1, 2, \ldots, r$) — все простые делители числа $D$. Рассматриваются такие $D$, для которых наименьшие показатели $f_l$ в сравнениях $q_i^{f_i} \equiv \pmod p$ удовлетворяют условию $\sum_{l=1}^{r} f_i^{-1} < 1$.

Изучается вопрос о влиянии $t$ на разрешимость в целых числах уравнения $f(x_0, x_1, \ldots, x_t, 0, \ldots, 0) = Dz^p$.

Н. В. Гордеев

**3773. Случай неразрешимости целочисленного уравнения $x^{2n} + y^{2n} = z^2$. Батталья** (Un caso d'impossibilità dell'equazione indeterminata: $x^{2n} + y^{2n} = z^2$. Battaglia Antonio), Boll. Unione mat. ital., 1957, **12**, № 4, 689—694 (итал.; рез. англ.)

Доказывается невозможность решения в целых числах $x$, $y$ и $z$ уравнения $x^{2n} + y^{2n} = z^2$, где $n \neq 3$ — некото-

рое простое число, $x^2+y^2=p^{2c}$, $p$ — простое, $c$ — положительное целое.

Полагая $n=4k-1$, автор при помощи простых, но остроумных соображений приходит, исходя из условия задачи, к равенству

$$(x^2)^{2k}+(y^2)^{2k}=(x^2+y^2)(q^2-p^2),$$

откуда получает противоречие. Подобным образом рассматривается также случай $n=4k+1$. П. Н. Реморов

**3774. Об уравнении $x^2+y^2+1=xyz$. Шинцель, Серпинский** (Sur l'équation $x^2+y^2+1=xyz$. Schinzel A., Sierpinski W.), Matematiche, 1955, **10**, 30—36 (франц.)

Методом спуска доказывается, что $x^2+y^2+1=xyz$ не имеет решений в целых числах, за исключением случая $z=3$, когда все решения даются существенно последовательными парами $x$, $y$ последовательности, полученной вычеркиванием четных членов последовательности Фибоначчи. Даны применения теоремы и метода доказательства. Показано, что $u^2-(z^2-4)v^2=-4$ имеет решения в случае $z=3$. Получено множество всех пар $x$, $y$ таких, что $x$ делит $y^2+1$ и $y$ делит $x^2+1$; этот результат в более общей форме был получен другим путем Милсом (РЖМат, 1954, 2856). Окончательно установлено, что для любого данного $n\geqslant 2$ существует бесконечно много пар целых чисел $x$, $y$ таких, что $x$ делит $y^n+1$ и $y$ делит $x^n+1$. I. Niven

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 7, 711.

**3775. Простые числа формы $x^2+3$. Голубев** (Primzahlen der Rorm $x^2+3$. Golubew W. A.), Anz. Österr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1958, **95**, № 1—15, 168—172 (нем.)

Приводится список простых чисел формы $x^2+3$ до $x=3800$. Утверждается, что составные числа формы $x^2+3$ делятся только на 2, 3 и простые числа формы $6m+1$. Никакое число формы $x^2+3$ не делится на простое число вида $6m-1$. Ставится задача: доказать, что между $y^4$ и $(y+1)^4$ содержится по крайней мере одно простое число формы $x^2+3$. Высказывается предположение, что существует бесконечно много простых чисел-близнецов вида $x^2+1$ и $x^2+3$ и что между $y^6$ и $(y+1)^6$ $(y\geqslant 4)$ содержится хотя бы одна пара близнецов формы $x^2+1$ и $x^2+3$.

Утверждается, что автор исследовал также простые числа других видов, например, $x^2+2$, $x^2+4$, $x^2+x+41$, $x^3+2$, $x^4+1$. Н. В. Гордеев

**3776. Некоторые удобные правила для биквадратичных вычетов. Айгнер** (Einige handliche Regeln für biquadratische Reste. Aigner Alexander), Math. Nachr., 1959, **17**, № 3-6, 219—223 (нем.)

Даются некоторые признаки для биквадратичных вычетов по простому модулю $p=4n+1$. Типичный пример признака: число 21 есть биквадратичный вычет по простому модулю $p=x^2+4y^2$ формы $84n+5,17,41$, если $x\pm y$ или $2x\pm y$ делятся на 21. Н. В. Гордеев

**3777. Остаток по модулю $l$ «частного Ферма» $(m^l-m)/l$. Араи**, Сугаку, 1953, **5**, № 3, 26—28 (японск.)

**3778. Метод испытания чисел на простоту. Дейкстра** (A method to investigate primality. Dijkstra E. W.), Rapp. Math. centrum, 1957, № ZW-002, 1—3 (англ.)

Излагается способ, лежащий в основе программы Автоматической счетной машины Математического центра (ARMAC) в Амстердаме, скорость которой около 2400 операций в 1 сек., для установления того, является ли данное число простым. А. Ф. Лаврик

**3779. Степенные остатки и их циклические свойства. Бонцлер** (Reszty potęgowe i ich własności cykliczne. Boncler Tadeusz), Zesz. nauk. Politechn. warsz., 1958, № 35, 59—92 (польск.; рез. русск., франц.)

**3780. Некоторые вычисления, связанные с формулами Вильсона и Ферма. Фрёберг** (Some computations of Wilson and Fermat remainders. Fröberg Carl-Erik), Math. Tables and other Aids Comput., 1958, **12**, № 64, 281 (англ.)

Пусть $p$ — простое целое рациональное число. Обозначим

$$W_p\equiv\frac{(p-1)!+1}{p}\pmod p,\quad F_p\equiv\frac{2^{p-1}-1}{p}\pmod p,$$

где $W_p$ и $F_p$ соответственно обозначают вычеты по mod $p$ известных выражений в теоремах Вильсона и Ферма. Указывается, что проверкой при помощи электронных быстродействующих машин среди простых чисел $2\leqslant p<30\,000$ обнаружено только три числа $p=5,13$ и 563, для которых $W_p\equiv 0\pmod p$. Для простых $p<50\,000$, что $F_p\equiv 0\pmod p$ только для $p=1093$ и 3511.

П. Н. Реморов

**3781. Обзор разностных множеств. Холл** (A survey of difference sets. Hall Marshall, Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 6, 975—986 (англ.)

Множество различных вычетов $d_1, d_2, \ldots, d_k \pmod v$ называется разностным множеством $D$, если каждый вычет $b\not\equiv 0\pmod v$ можно представить точно $\lambda$ способами в виде $b\equiv d_i-d_j\pmod v$, где $d_i, d_j\in D$.

Преобразования $x\to x+1\pmod v$ являются автоморфизмами. Вычет $t\pmod v$ такой, что преобразование $x\to xt\pmod v$ есть автоморфизм, называется мультипликатором разностного множества. В работе дается подробный анализ разностных множеств для различных значений параметров $v, k, \lambda$, связанных соотношением $k(k-1)=\lambda(v-1)$. Доказываются две теоремы о мультипликаторах. При просчете различных вариантов использовалась машина СВАК вычислительного центра Калифорнийского университета. М. А. Пробст

**3782. О числах Мерсенна и Ферма. Серпинский** (Les nombres de Mersenne et de Fermat. Sierpinski W.), Matematiche, 1955, **10**, 80—91 (франц.)

Это интересное изложение недавних результатов и предположений о числах $2^n-1$ и $2^{2^n}+1$. Кроме новых результатов по факторизации этих чисел, полученных на машине СВАК, обсуждается задача о том, когда число Мерсенна является треугольным. Согласно результату Шинцеля и Вакулича эта задача эквивалентна решению уравнения

$$[\,2^{(m-1)/2}\operatorname{cosec}\theta\sin m\theta\,]=1\quad(\operatorname{tg}\theta=\sqrt{7}).$$

По-видимому, существует не более 5 таких значений $m$: 1, 2, 3, 5, 13. Соответствующими треугольными числами Мерсенна являются числа 0, 1, 3, 15, 4095. Вместе с определением совершенных чисел вводятся понятия псевдосовершенных и квазисовершенных чисел. Число первого такого типа как, например, $12=2+4+6$, является суммой подмножества его собственных делителей. Нечетных псевдосовершенных чисел существует бесконечно много, причем наименьшее — 945. Квазисовершенное число является суммой его нетривиальных делителей, т. е. всех делителей, за исключением 1 и $n$. Неизвестно, существует ли хоть одно квазисовершенное число. D. H. Lehmer

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 7, 711.

**3783. Сравнения, включающие комбинации из чисел Бернулли и Фибоначчи. Келиский** (Congruences involving combinations of the Bernoulli and Fibonacci numbers. Kelisky Richard P.), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1957, **43**, № 12, 1066—1069 (англ.)

Автор исходит из известных соотношений для чисел Бернулли и Эйлера:

$$\sum_{k=0}^{\bar{n}} \binom{n}{2k} B_{2k} m^{-2k} F_{n-2k}(x) - \frac{n}{2m} L_{n-1}(x) = \frac{n}{2} \sum_{s=0}^{m-1} \left(\frac{x}{2} + \frac{s}{m} - \frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$\sum_{k=0}^{\bar{n}} \binom{n}{2k} (2m)^{-2k} E_{2k} L_{n-2k}(x) = 2 \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s \left(\frac{x}{2} + \frac{2s+1}{2m} - \frac{1}{2}\right)^n,$$

где $\bar{n} = [n/2]$, $B_{2k}$ — числа Бернулли, $E_{2k}$ — числа Эйлера,

$$F_n(x) = \frac{(x+1)^n - (x-1)^n}{2^n},$$

$$L_n(x) = \frac{(x+1)^n + (x-1)^n}{2^n} \quad (F_0(x) = 0,\ L_0(x) = 2).$$

Применяя обозначения: $u_{rn} = u_r^n (\sqrt{5})^{n-1} F_n(\alpha_r)$,

$$v_{rn} = v_r^n (\sqrt{5})^{n-1} L_n(\alpha_r),$$

где $u_r$ и $v_r$ — соответственно $r$-ые числа Фибоначчи и Люка; $\alpha_r = v_r/\sqrt{5}\, u_r$,

$$f_1(m, n, x) = \sum_{t=0}^{\overline{m-3}} F_{n-1}\left(\frac{2t+1}{mx}\right),$$

$$f_2(m, n, x) = \sum_{t=0}^{\overline{m-2}} F_{n-1}\left(\frac{2t}{mx}\right),$$

автор получает

$$\sum_{k=0}^{\overline{p-3}} B_{2k} m^{-2k} u_{2k} - \frac{1}{2m} \equiv$$

$$\equiv \begin{cases} \frac{1}{5m} f_1(m, p-1, \sqrt{5}), & m \text{ — нечетное} \\ \frac{1}{5m} f_2(m, p-1, \sqrt{5}), & m \text{ — четное} \end{cases} \qquad (p = 5l \pm 1)$$

$$\sum_{k=0}^{\overline{p-3}} B_{2k} m^{-2k} u_{2(k+1)} - \frac{1}{m} \equiv$$

$$\equiv \begin{cases} \frac{1}{5m} f_1(m, p-1, \sqrt{5}), & m \text{ — нечетное} \\ \frac{1}{5m} f_2(m, p-1, \sqrt{5}), & m \text{ — четное} \end{cases} \qquad (p = 5l \pm 2).$$

П. Н. Реморов

**3784. О формулах, связывающих числа Бернулли и числа Фибоначчи.** Келиский (On formulas involving both the Bernoulli and Fibonacci numbers. Kelisky Richard P.), Scripta Math., 1958, 23, № 1-4, 27—35 (англ.)

Приводится ряд соотношений между числами Бернулли $B_n$, числами Эйлера $E_n$, числами Фибоначчи $u_n$ и числами Люка $v_n$, некоторые из которых ранее не встречались в печати. К примеру, умножая производящие функции $(t/2)\operatorname{csch}(t/2)\exp(y - 1/2)\,t$ и $2\operatorname{sh}(t/2)\exp(xt/2)$ полиномов Бернулли $B_n(y)$ и полиномов $F_n(x) = ((x+1)^n - (x-1)^n)/2$ и сравнивая вычисленные двумя способами коэффициенты разложения произведения в степенный ряд по $t$, автор получает тождества

$$n\left(\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(y) F_{n-k}(x),$$

из которых легко следует формула

$$n \sum_{s=1}^{m-1} \left(\frac{s}{m} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\bar{n}} \binom{n}{2k} B_{2k} m^{1-2k} F_{n-2k}(x) - \frac{n}{4}[(x+1)^n + (x-1)^n],$$

где $\bar{n} = [n/2]$. Последняя при различных значениях $x$ и $m$ приводит к ряду соотношений между $B_n, u_n, v_n$; в частности, при $x = v_r/\sqrt{5}\, u_r$ к основной формуле

$$n u_r^n (\sqrt{5})^{n-1} \sum_{s=1}^{m-1} \left(\frac{s}{m} + \frac{v_r}{2\sqrt{5}\, u_r} - \frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\bar{n}} \binom{n}{2k} B_{2k} m^{1-2k} 5^k u_r^{2k} u_{r(n-2k)} - \frac{n}{2} u_r v_{r(n-1)}.$$

Б. В. Степанов

**3785. Производящая функция чисел Фибоначчи.** Поведа-Рамос (La funcion generatriz de los numeros de Fibonaci. Poveda-Ramos Gabriel), Dyna (Colombia), 1958, 25, № 74, 13—15 (исп.)

**3786. Доказательство одного тождества для $\iota$-функций.** Леккеркерк (Bewijs van een identiteit voor $\iota$-functies. Lekkerkerker C. G.), Rapp. Math. centrum, 1957, № ZW-015, 1—5 (гол.)

Для несобственной функции распределения

$$\iota(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

дается непосредственное элементарное доказательство тождества

$$\sum_{\gamma(1,2,\ldots,n)} \iota_1 \iota_{12} \ldots \iota_{12\ldots n} = \sum_{\gamma(1,2,\ldots,n)} \sum_{m=1}^{n} \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_m=n} \Pi$$

$$\Pi = \frac{\iota_{12\ldots n_1} \iota_{n_1+1,\ldots,n_1+n_2} \cdots \iota_{n_1+n_2+\ldots+n_{m-1}+1,\ldots,n}}{n_1 n_2 \ldots n_m m!},$$

где ради сокращения положено

$$\iota_{j_1 j_2 \ldots j_n} = \iota(x_{j_1} + x_{j_2} + \ldots + x_{j_k}),$$

а $\gamma(1, 2, \ldots, n)$ под знаком суммы обозначает, что суммируется по всем $n!$ перестановкам $\gamma(1, 2, \ldots, n)$ индексов $1, 2, \ldots, n$.

Г. А. Ломадзе

**3787. Исследования Эйлера, содержащиеся во «Введении в алгебру», с точки зрения современной теории чисел.** Хольцер (Eulers Forschungen in seiner Anleitung zur Algebra vom Standpunkt der modernen

Zahlentheorie. Holzer Ludwig), Leonhard Euler 250. Geburtstag. Berlin, Akad. Verl., 1959, 209—223 (нем.; рез. русск.)

**3788 К. Темы по теории чисел. Ле-Век** (Topics in number theory. LeVeque William Judson. Addison Wesley, 1956, Vol. 1, 198 pp., 5.50 doll., vol. 2, 270 pp. 6.50 doll.) (англ.)

**3789 К. Классическая онтология числа. Мартин** (Klassische Ontologie der Zahl. Martin Gottfried. Köln, Kölner Univ.-Verl., 1956, 159 S., 10.-DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1957, A, № 39, 2705 (нем.)

**3790 К. Теоретическая арифметика.** Учебн. пособие для студ. физ.-матем. фак. пед. ин-тов. **Гонин Е. Г.** М., Учпедгиз, 1959, 232 стр., илл., 5 р. 65 к.

# АЛГЕБРА

Редакторы *А. И. Ширшов, В. И. Шестаков*

## МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

**3791. О решении уравнения четвертой степени. Торрес-Ногера** (Sobre la resolución de la ecuación cuártica. Torres Noguera Juan), Gac. mat., 1958, **10**, № 7-8, 229—231 (итал.)

Доказывается, что корни $x_1$, $x_2$, $x_3$ и $x_4$ уравнения

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

могут быть определены по формулам:

$$x_1 = \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \sqrt{u_3},$$
$$x_2 = \sqrt{u_1} - \sqrt{u_2} - \sqrt{u_3},$$
$$x_3 = -\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} - \sqrt{u_3},$$
$$x_4 = -\sqrt{u_1} - \sqrt{u_2} + \sqrt{u_3},$$

где $u_1$, $u_2$ и $u_3$ являются корнями уравнения

$$u^3 + \frac{p}{2}u^2 + \frac{p^2 - 4r}{16}u - \frac{q^3}{64} = 0.$$

Э. Апарисио

**3792. Теорема о делимости полиномов. Схютте** (A theorem on the divisibility of polynomials. Schutte H. J. Tydskr. Wetensk. Kuns (N. R.), 1954, **14**, 106—110) (африк.)

Автор устанавливает, что если $p(x)$ — полупростой полином („свободный от квадратов"), ассоциированный полиному $f$ с рациональными коэффициентами, то существует такой полином $h(x)$, что $p(h(x))$ делится на $f$. Рассматривается известная лемма (как об этом говорит автор), когда полином $p$ простой (Albert A. A., Modern higher algebra, Univ. of Chicago Press, 1937, Ch X, § 12).

G. Papy

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 4, 340.

**3793. Об одной теореме Пароди. Островский** (Über einige Sätze von Terrn M. Parodi. Ostrowski Alexander), Math. Nachr., 1958, **19**, № 1-6, 331—338 (нем.)

Пусть дано уравнение

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \qquad (1)$$

причем $|a_1| = \alpha \neq 0$ и $\sum_{l=2}^{n} |a_l| = S$.

В статье рассматривается следующая задача: Найти в зависимости от $n$, $\alpha$, $S$ по возможности такие наименьшие $r_n$ и $r_n^*$, что для достаточно малых $\rho > r_n$ и $\rho^* > r_n^*$ в круге $|z + a_1| < \rho$ содержится ровно один корень уравнения (1), а в круге $|z| < \rho^*$ остальные $n - 1$ корней, а также выяснить, при каких ограничениях на $\alpha$, $n$, $S$ возможно указать такие $r_n$ и $r_n^*$. Для решения поставленной задачи автор использует теорему Руше и выясняет ряд необходимых и достаточных условий ее применимости в зависимости от $\alpha$, $S$ и $n$. Результаты автора являются продолжением исследований Пароди (РЖМат, 1956, 8590; 1958, 8568; 1959, 3687).

А. А. Бовди

**3794. Выражение симметрической функции от $r$ переменных через элементарные симметрические функции. Дюри** (Expression d'une fonction symétrique de $r$ variables au moyen des fonctions symétriques élémentaires. Durix), Rev. math. spec., 1959, **69**, № 10, 553—554 (франц.)

**3795. О преобразовании квадратичной формы с численными коэффициентами в сумму квадратов. Ангелич** (Über die Verwandlung von quadratischen Formen mit numerischen Koeffizienten in Summen von Quadraten. Angelitch T. P.), Z. angew. Math. und Mech., 1959, **39**, № 3-4, 160—163 (нем.)

Излагаются известные приемы приведения квадратичной формы к сумме квадратов путем разложения матрицы коэффициентов на треугольные множители с помощью алгоритма Гаусса (см., например, книгу референта (РЖМат, 1953, 593К) стр. 244—245).

Ф. Р. Гантмахер

**3796. Линейные неравенства и квадратичные формы. Гаддум** (Linear inequalities and quadratic forms. Gaddum Jerry W.), Pacif. J. Math., 1958, **8**, № 3, 411—414 (англ.)

Выясняется связь критериев положительной определенности квадратичной формы и совместности систем линейных неравенств. Рассматриваются формы $Z(\mathbf{x})$ от $n$ неизвестных в первом координатном углу, где все неизвестные неотрицательны. Применяются обозначения: $\mathbf{x} \geqq 0$, если все компоненты вектора $\mathbf{x}$ неотрицательны, $\mathbf{x} \geqslant 0$, если при этом хотя бы одна координата положительна, $\mathbf{x} > 0$, если все компоненты положительны. Если $Z(\mathbf{x}) > 0$ для всех $\mathbf{x} \geqq 0$, то форма называется условно определенной, если $Z(\mathbf{x}) \geqq 0$ для всех $\mathbf{x} \geqq 0$, то — условно полуопределенной, если $Z(\mathbf{x}) \geqq 0$ для $\mathbf{x} \geqq 0$, но $Z(\mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x} > 0$, то — условно почти определенной. Симметричной трансформацией квадратичной формы $Z(\mathbf{x})$ называется квадратичная форма, матрица которой получена из матрицы данной формы умножением на $-1$ нескольких строк и соответствующих столбцов матрицы данной формы. Главным минором формы $Z(\mathbf{x})$ называется форма, полученная из данной заменой хотя бы одного из неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на нуль. Пусть $A$ — матрица формы $Z(\mathbf{x})$, $A\mathbf{x}$ — вектор, полученный умножением матрицы $A$ на столбец координат вектора $\mathbf{x}$. Из доказанных в работе теорем отметим следующие:

Если каждый главный минор формы $Z(\mathbf{x})$ условно определен, то система $A\mathbf{x} > 0$, $\mathbf{x} \geqq 0$ имеет решение тогда и только тогда, когда $Z(\mathbf{x})$ условно определенна.

Если каждый главный минор формы $Z(\mathbf{x})$ условно полуопределен, то система $A\mathbf{x} \geqq 0$, $\mathbf{x} \geqslant 0$ имеет решение тогда и только тогда, когда $Z(\mathbf{x})$ условно полуопределенна.

Если каждый главный минор условно полуопределен, то система $A\mathbf{x} \geqslant 0$, $\mathbf{x} \geqslant 0$ имеет решение тогда и только тогда, когда форма $Z(\mathbf{x})$ условно почти определенна.

Квадратичная форма $Z(\mathbf{x})$ тогда и только тогда положительно определенна, когда совместна каждая система $B\mathbf{x} > 0$, $\mathbf{x} \geqq 0$, где $B$ — матрица симметричной трансформации главного минора формы $Z(\mathbf{x})$.

Среди других результатов некоторые связывают свойства квадратичной формы с понятием величины игры. В работе имеется значительное число опечаток, некоторые из них в реферате устранены. И. В. Проскуряков

**3797. Заметка о прямых суммах мультивекторов. Вивье** (Notes sur les sommes directes de multivecteurs. Vivier Marcel), C. r. Acad. sci., 1955, **270**, № 24, 2285—2287 (франц.)

Продолжение работы автора (РЖМат, 1955, 4237) для случая любого $r > 2$, четного или нечетного. Показывается на примере, что, в отличие от случая $r = 2$, разложение $\Delta = \omega_1 + \ldots + \omega_n$ единственно.

L. C. Hutchinson

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 10, 989.

**3798. Об обобщении понятия неприводимости. Тагамлицкий** (On a generalization of the concept of irreducibility. Tagamlicki Ya. Ann. Univ. Sofia. Fac. Sci. Phys. Math., 1953—1954 (1954), **48**, № 1, 69—85) (болг.; рез. русск.)

Пусть $K$ — аддитивная абелева полугруппа с нулем, допускающая в качестве операторов неотрицательные вещественные числа и удовлетворяющая обычным условиям совместности (т. е. $K$ было бы линейным пространством, если бы вычитание было возможно). Пусть $P$ — норма для $K$, подчиненная обычным условиям. Ненулевой элемент $a \subset K$ неприводим, если из $0 \neq a = b + c$ и $P(a) = P(b) + P(c)$ следует, что $\lambda b = \mu c$ для неотрицательных вещественных чисел $\lambda$ и $\mu$ таких, что $\lambda + \mu > 0$. Налагая на $K$ некоторые сильные дополнительные условия, автор доказывает, что неприводимые элементы существуют. Результаты прилагаются к различным известным теоремам о моментах. (О предыдущих работах в этом направлении см. РЖМат, 1954, 4484). E. Hewitt

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 7, 767.

**3799. Классы определителей, называемых ортосимметрическими, содержащие как частный случай определители Ганкеля. Тенка** (Classi di determinanti che hanno come caso particolare quelli di Hankel, da lui detti ortosimmetrici. Tenca Luigi), Period. mat., 1959, **37**, № 2, 101—109 (итал.)

Пусть $u_{1,0}, u_{2,0}, \ldots$ — арифметическая прогрессия $n$-го порядка с разностью $d$ (т. е. последовательность, у которой разность $n$-го порядка равна $d$). Для определителя

$$A = \begin{vmatrix} u_{1,0} & u_{2,0} & \cdots & u_{n+1,0} \\ u_{r+1,0} & u_{r+2,0} & \cdots & u_{n+r+1,0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{nr+1,0} & u_{nr+2,0} & \cdots & u_{n(r+1)+1,0} \end{vmatrix},$$

где $r$ — любое натуральное число, получена формула

$$A = (-r)^{\frac{n(n+1)}{2}} d^{n+1}.$$

Определители аналогичного типа, но порядка $> n+1$, равны 0.

Пусть $A^{(s)}$ — определитель квадратной матрицы, получаемой вычеркиванием $s$-го столбца из матрицы

$$\begin{Vmatrix} u_{1,0} & u_{2,0} & \cdots & u_{n+2,0} \\ u_{r+1,0} & u_{r+2,0} & \cdots & u_{n+r+2,0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{nr+1,0} & u_{nr+2,0} & \cdots & u_{n(r+1)+2,0} \end{Vmatrix}.$$

Тогда

$$A^{(s)} = (-r)^{\frac{n(n+1)}{2}+n-s} \binom{n+1}{s+1} d^{n+1} \quad (s \leqslant n).$$

Выведены также формулы для некоторых определителей, связанных с арифметическими прогрессиями высших классов, т. е. таких последовательностей, у которых разности некоторого порядка образуют заданную последовательность. В. К. Туркин

**3800. Спинорное представление прямой суммы и прямого произведения. Моррис** (Spin representation of a direct sum and a direct product. Morris A. O.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 3, 326—333 (англ.)

Решается задача. Пусть $A$ — ортогональная матрица порядка $n = 2\nu$ или $n = 2\nu + 1$, $e^{\pm i\varphi_k}$ $(k = 1, \ldots, \nu)$ — ее характеристические числа, а

$$\xi(A) = \prod_{k=1}^{\nu} (2 \cos \tfrac{1}{2}\varphi_k).$$

Спрашивается, как, зная характеристические числа матриц $A$ и $B$ (порядков $n$ и $m$ — соответственно), вычислить $\xi(A + B)$ и $\xi(A \times B)$, где $A + B$ (прямая сумма) — матрица порядка $n + m$, имеющая вид $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, а $A \times B$ — кронекеровское произведение матриц $A$ и $B$. Приводятся явные формулы для $\xi(A + B)$ и $\xi(A \times B)$. Р. А. Минлос

**3801. О вычислении максимума модуля корней характеристического уравнения заданной матрицы. Гросс** (Sul calcolo del massimo modulo delle radici dell' equazione caratteristica di una matrice. Gross Wolf), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1958, **24**, № 5, 497—500 (итал.)

Пусть $\varphi(a)$ — вещественная неотрицательная функция, заданная на множестве всех комплексных квадратных матриц порядка $n$ и удовлетворяющая условиям:

$$(A) \qquad \varphi(\gamma a) = \gamma \varphi(a)$$

для любой матрицы $a$ и для любого неотрицательного числа $\gamma$,

$(B)$ из равенства $\varphi(a) = 0$ следует $a = 0$ (например, $\varphi(a) = \max\limits_{1 \leqslant k, l \leqslant n} |a_{kl}|$). Доказывается существование такого постоянного числа $\lambda$, что для любой матрицы $a$ и для любого натурального числа $r$ справедливо неравенство

$$\rho(a) \leqslant \lambda^{\frac{1}{r}} \varphi(a^r)^{\frac{1}{r}},$$

где $\rho(a)$ означает максимум модуля корней характеристического уравнения матрицы $a$.

Доказывается также, что при указанных условиях

$$\lim_{r \to \infty} \varphi(a^r)^{\frac{1}{r}} = \rho(a).$$

Э. Апарисио

**3802. Выпуклость области значений линейного преобразования. Голдман, Маркус** (Convexity of the field of a linear transformation. Goldman A. J., Marcus M.), Canad. Math. Bull., 1959, **2**, № 1, 15—18 (англ.)

Приводится простое индуктивное доказательство теоремы Теплица — Хаусдорфа о выпуклости множества значений $(Ax, x)$, где $A$ — комплексная $n \times n$-матрица, а $x$ пробегает единичную сферу в $n$-мерном унитарном пространстве. Ф. Р. Гантмахер

**3803. Неотрицательные матрицы и их применение в экономике и технике. Керубино** (Matrici non negative e loro applicazioni all'economia ed alla tecnica. Cherubino Salvatore), Statistica, 1957, **17**, № 3, 349—364 (итал.)

Предполагается, что экономическая деятельность разбита на $n$ секторов (например, земледелие, промыш-

ленность, обслуживание). В виде матрицы записывается совокупность $n^2$ неотрицательных коэффициентов $\alpha_{r,s}$, равных продукции сектора $r$, заключенной (в соответственно преобразованном виде) в единице продукции сектора $s$. В качестве сектора $n+1$ приписывается сектор труда. Дается понятие об элементарных свойствах матриц, включая понятия о приводимости и о характеристическом уравнении. Используя элементарные свойства матриц, автор пытается вывести закон трудовой стоимости в следующей формулировке: стоимость суммарного потребления равна стоимости труда, затраченного во всей экономической системе. В дальнейшем приводятся (без доказательства) формулировки теорем Таусски, Леви — Адамара и Лаппо-Данилевского; какие-либо приложения этих теорем не даются. В заключение рассматривается «динамика рынка»: коэффициенты матриц считаются дифференцируемыми функциями времени; записываются матричные линейные дифференциальные уравнения. В. К. Туркин

## ГРУППЫ

**3804. Гексагональные федоровские группы. Белов Н. В.,** Кристаллография, 1959, 4, № 2, 268—276

Дается перечисление всех пространственных групп, принадлежащих к гексагональной системе. Отмечается значительно меньшее число (52) этих групп по сравнению с группами тетрагональной системы (68). Указывается причина этого: отсутствие в гексагональной системе ряда типов осей и плоскостей симметрии. Для некоторых групп приведены соответствующие плотнейшие шаровые упаковки. Приведены формулы размножения, основанные на использовании 4 координат.

В. К. Туркин

**3805. О группе 48-гранника. Белов Н. В., Тархова Т. Н.,** Кристаллография, 1956, 1, № 3, 360—361

**3806. Группы цветной симметрии. Белов Н. В., Тархова Т. Н.,** Кристаллография, 1956, 1, № 1, 4—13

Рассматриваются двухцветные группы на плоскости (при преобразованиях, входящих в такую группу, фигура, лежащая в некоторой плоскости, остается в той же плоскости, но может оказаться «перевернутой на изнанку»). Всего имеется 46 таких групп. Указывается способ построения этих групп с помощью плоских решеток Бравэ (пяти обычных и пяти двухцветных). Приведены схемы всех 46 двухцветных групп, а также соответствующие обозначения в различных системах. Указывается на возможность распространения изложенного метода на случаи 3, 4 и 6 цветов. Для некоторых цветных групп указывается интерпретация посредством бесконечных мозаик. Указывается, что некоторым видам мозаик соответствуют группы, не принадлежащие (в отличие от рассмотренных в работе 46 плоских двухцветных групп) к числу 230 федоровских групп. В. К. Туркин

**3807. Симметрия в обратном пространстве. Маклаклан** (Symmetry in reciprocal space. McLachlan Dan, Jr), Acta crystallogr., 1956, 9, № 3, 318 (англ.)

Приведена таблица, дающая связь между точечными группами в прямом и взаимном пространствах двух измерений. При этом при записи групп во взаимном пространстве вводится дополнительная третья координата. Указывается на возможность обобщения на случай большего числа измерений. В. К. Туркин

**3808. Замечание к работе С. Гачайи. Бальцежик** (Remark on a paper of S. Gacsályi. Balcerzyk S.), Publs math., 1956, 4, № 3-4, 357—358 (англ.)

См. РЖМат, 1956, 8606. Дается очень простое доказательство того, что подгруппа $A$ абелевой группы $G$ тогда и только тогда служит для $G$ прямым слагаемым, когда всякая система линейных уравнений с целыми коэффициентами и со свободными членами из подгруппы $A$, в которой число уравнений может иметь произвольную мощность, в каждом отдельном уравнении число неизвестных конечно, а общее число неизвестных не превосходит мощности группы $G/A$, имеющей решение в группе $G$, имеет решение и в подгруппе $A$.

А. П. Мишина

**3809. Силовские подгруппы и композиционная структура. Виландт** (Sylowgruppen und Kompositionsstruktur. Wielandt Helmut), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1958, 22, № 3-4, 215—228 (нем.)

Ранее (Math. Z., 1939, 45, 209—244) автор показал, что множество $sG$ субнормальных подгрупп конечной группы $G$ образует структуру относительно операций порождения и пересечения (подгруппа группы $G$ называется субнормальной, если она является членом некоторого нормального ряда этой группы). Основной результат работы: Пусть $P$ — силовская $p$-подгруппа конечной группы $G$. Тогда множество $s_GP$ пересечений $A \mid\mid P (A \in sG)$ образует подструктуру структуры $sP$ и

$$A \to A \mid\mid P \qquad (1)$$

является гомоморфным отображением $sG$ на $s_GP$. Дается необходимое и достаточное условие для равенства $A \mid\mid P = B \mid\mid P (A \text{ и } B \in sG)$. Отображение (1) является изоморфизмом тогда и только тогда, когда все композиционные индексы группы $G$ делятся на $p$.

Через $s_0 P$ обозначается подструктура структуры $sP$, состоящая из $P$ и $E$ ($E$ — единичная подгруппа группы $G$). Тогда

$$s_0 P \supseteq s_G P \supseteq sP.$$

Доказывается, что $s_GP = s_0P$ тогда и только тогда, когда $G$ является $p$-простой группой, т. е. только один из композиционных индексов $G$ может делиться на $p$. Если $p^2$ является делителем порядка группы $G$, то $s_GP = sP$ тогда и только тогда, когда $G$ является $p$-разрешимой группой $p$-длины 1 (относительно $p$-длины $p$-разрешимой группы см. РЖМат, 1958, 4509).

Ставится проблема: какая подструктура структуры $sP$ может быть взята в качестве $s_GP$? Эта проблема решается в том случае, когда $P$ — циклическая группа: Если $P$ — циклическая силовская $p$-подгруппа группы $G$, то либо $s_GP = s_0P$, либо $s_GP = sP$.

Пусть $g \in G$. Доказывается, что отображения

$$A \mid\mid P \to A \mid\mid g^{-1}Pg \qquad (A \in sG),$$
$$A \mid\mid P \to g^{-1}(A \mid\mid P)g \qquad (A \in sG)$$

являются изоморфизмами $s_GP$ на $s_G(g^{-1}Pg)$. Дается необходимое и достаточное условие для совпадения этих изоморфизмов. Отображение

$$A \cap P \to g^{-1}Ag \cap P \qquad (A \in sG)$$

является автоморфизмом $s_GP$. При этом $A \cap P$ и $g^{-1}Ag \cap P$ сопряжены в $G$.

В заключение изучается отображение

$$A \to [A \mid\mid P_1, A \cap P_2, \ldots, A \cap P_k],$$

где $A \in sG$ и $P_i$ — силовская $p_i$-подгруппа группы $G (i = 1, 2, \ldots, k)$.

П. А. Гольберг

**3810. О разрешимых $N$-группах. Курцио** (Sugli $N$-gruppi risolubili. Curzio Mario), Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1958, (1959), 25, № 6, 447—452 (итал.)

$N$-группой называется конечная группа, у которой каждый нормальный делитель является единственной подгруппой соответствующего порядка. Доказаны следующие теоремы:

I. Пусть $G$ — разрешимая конечная группа. $G$ является $N$-группой в том и только в том случае, если удовлетворяются следующие условия: 1) подгруппы Силова группы $G$ циклические, элементарные абелевы или изоморфные группе кватернионов; 2) если $G$ содержит подгруппу, изоморфную группе кватернионов, то $G$ не содержит нормального делителя порядка $4m$ ($m$—нечетное); 3) для всякой нециклической элементарной абелевой подгруппы Силова группы $G$ можно подобрать такого же порядка фактор-группу из главного ряда группы $G$.

II. Для того чтобы конечная группа $G$ была сверхразрешимой $N$-группой, необходимо и достаточно, чтобы все подгруппы Силова группы $G$ были циклическими.

III. Пусть $G$ — разрешимая группа типа $A_1 \cdot A_2$, где $A_i$ — разрешимые $N$-группы взаимно простых порядков. Тогда $G$ является $N$-группой. В. К. Туркин

**3811. Локально разрешимая группа, не являющаяся $RN^*$-группой. Лившак Я. Б.**, Докл. АН СССР, 1959, 125, № 2, 266—268

Пусть $\mathfrak{G} = G_1$—бесконечная циклическая группа и пусть $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n \subset \ldots$ — такая последовательность групп, что $G_n = \mathfrak{G} \sim G_{n-1}$, где $\sim$ символ сплетения групп. Обозначим $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Группа $G$ обладает следующими свойствами:

Если $H$ и $F$ — подгруппы в $G$ и $H$ субинвариантна в $F$, то из $H \subset G_n$ следует $F \subset G_n$. Отсюда выводится, что любая радикальная подгруппа из $G$ содержится в некоторой группе $G_n$. В группе $G$ нет нетривиальных алгебраических и, в частности, ниль-элементов. Из этих свойств группы $G$ вытекает, что существуют локально разрешимые и не $RN^*$-группы, а также полупростые локально радикальные группы. Отмеченный факт дает ответ на некоторые вопросы из обзорных статей А. Г. Курош — С. Н. Черникова (Успехи матем. наук, 1947, 2, № 3, 18) и референта (РЖМат, 1959, 6652). Б. И. Плоткин

**3812. Замечание о системе, порожденной множеством эндоморфизмов группы. Дескинс** (A note on the system generated by a set of endomorphisms of a group. Deskins W. E.), Michigan Math. J., 1959, 6, № 1, 45—49

Пусть $E$ — множество эндоморфизмов группы $G$, удовлетворяющей условию минимальности для $E$-подгрупп. Через $R(E)$ обозначается алгебраическое замыкание системы $E$ относительно обычных операций сложения и умножения эндоморфизмов. $R(E)$ является $DGN$-кольцом, т. е. почти кольцом, удовлетворяющим некоторым дополнительным условиям. Работа посвящена структурной теории $DGN$-колец. Идеал $DGN$-кольца определяется как обычно, причем дополнительно требуется, чтобы он был нормальным делителем аддитивной группы почти кольца. Идеал $T$ $DGN$-кольца $N$ называется леворегулярным, если $N/T$ обладает левой мультипликативной единицей. Радикал $R$ $DGN$-кольца $N$ определяется как пересечение всех максимальных леворегулярных идеалов из $N$. Если в $N$ нет максимальных леворегулярных идеалов, то по определению $R = N$. Полупростое $DGN$-кольцо — это такое $DGN$-кольцо, в котором радикал равен нулю. Простое $DGN$-кольцо — это полупростое $DGN$-кольцо без собственных идеалов. Непосредственно получается, что $\bar{N} = N/R$ — полупросто и однозначно представимо в виде прямой суммы простых $DGN$-колец, обладающих левыми единицами, сумма которых является левой единицей для $\bar{N}$. Левая единица полупростого $DGN$-кольца является одновременно его правой единицей. Особо изучаются простые $DGN$-кольца, и, также, как и в случае колец, выделяется $h^2$ „матричных единиц". Приводятся также некоторые условия, при которых простые $DGN$-кольца оказываются кольцами. Б. И. Плоткин

**3813. О подгруппах модулярной группы. Кокстер** (On subgroups of the modular group. Coxeter H. S. M.), J. math. pures et appl., 1958, 37, № 4, 317—319 (англ.)

Пусть $G$ — группа всех целочисленных матриц второго порядка с определителем, равным единице, а $\Gamma$ — ее фактор-группа по центру. Гольдберг (РЖМат, 1957, 8433) доказал, что любая абелева подгруппа группы $\Gamma$ является циклической. Автор дает новое доказательство этого утверждения, опирающееся на геометрические соображения. Д. А. Супруненко

**3814. Об автоморфизмах линейных групп над некоммутативным кольцом главных идеалов с характеристикой, отличной от 2. Вань Чжэ-сянь** (On the automorphisms of linear groups over a non-commutative principal ideal domain of characteristic $\neq 2$. Wan Zhe-xian), Scientia sinica, 1958, 7, № 9, 885—933 См. РЖМат, 1959, 6655.

**3815. Некоторые вопросы рациональности, касающиеся алгебраических групп. Розенликт** (Some rationality questions on algebraic groups. Rosenlicht Maxwell), Ann. mat. pura ed appl., 1957, 43, 25—50 (англ.)

Пусть $G$ — связная линейная алгебраическая группа, определенная над полем $k$, $k(G)$ — поле рациональных функций на $G$. Доказывается, что если $k$ совершенно, то существует $k$-изоморфизм поля $k(G)$ на подполе некоторого чисто трансцендентного расширения поля $k$ (в случае, когда $k$ — произвольное поле характеристики 0, это утверждение было доказано Шевалле (РЖМат, 1956, 4359)). При этом степень трансцендентности расширения можно взять равной $\dim G$ (или $\dim G + 1$, если $k$ конечно). Отсюда выводится, что если $k$ — бесконечное совершенное поле, то множество точек, рациональных над $k$, плотно в $G$. А. Л. Онищик

**3816. Полупростые транзитивные импримитивные группы четырехмерного комплексного пространства. Заботин Я. И.**, Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 4, 67—79

Известно, что всякая полупростая группа единственным образом разлагается в прямое произведение неодночленных простых подгрупп. Для импримитивных простых групп четырехмерного пространства автором доказана следующая теорема:

В разложении полупростой транзитивной импримитивной группы на простые неодночленные подгруппы

$$G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_k$$

все группы $G_i$ импримитивны, и число их не превышает четырех. Если $G$ содержит нетривиальную транзитивную подгруппу, то это разложение имеет вид

$$G = A_1 \times A_1' \times P,$$

где $A_1$, $A_1'$ — взаимно обратные друг другу группы типа $A_1$ в трех переменных, а $P$ — проективная группа прямой относительно четвертого переменного.

На основании этой теоремы и с помощью работы Ким Сен Ена и В. В. Морозова (РЖМат, 1957, 1171) перечисляются полупростые транзитивные импримитивные группы четырехмерного комплексного пространства.

М. Гриндлингер, Е. И. Пятницкая

**3817. Схемы алгебраических многообразий. Картье** (Schémas des variétés algébriques. Cartier P.), Sémin. C. Chevalley. École norm. supér. 1956—1958, 1. Paris, 1958, 2-1—2-24 (франц.)

Пусть $E$ — алгебраическое множество, $T$ — его подмножество. Доказывается, что для того чтобы пространство $T$ с локальной системой функций $O^E/T$ было алгебраическим множеством, необходимо и достаточно, чтобы множество $T$ было локально замкнутым (т. е. пе-

ресечением открытого и замкнутого множеств). Пусть $E_1$ и $E_2$ — два алгебраических множества. Доказывается, что на множестве $E_1 \times E_2 = E$ существует одна и только одна структура алгебраического множества, удовлетворяющая следующему условию: если множества $U_i \subset E_i$ допускают изоморфизмы $\varphi_i$ на открытые множества $v_i \subset \Omega_{A_i}$ $(i = 1, 2)$, то $U_1 \times U_2$ открыто в $E$ и $\varphi_1 \times \varphi_2$ изоморфно отображает $U_1 \times U_2$ на $v_1 \times v_2 \subset \Omega_{A_1 \otimes A_2}$.

В поле $K$ вводится естественная структура алгебраического множества и оказывается, что каждое аффинное алгебраическое множество изоморфно подмножеству в некотором $K^n$, определяемому алгебраическими уравнениями. Пусть $k'$ — подполе поля $K$, содержащее $k$. На каждом алгебраическом $(K, k)$-множестве определяется естественная структура алгебраического $(K, k')$-множества. Соответствующая топология называется $k'$-топологией. Пусть $E$ и $F$ — алгебраические множества. Рациональным отображением $f: E \to F$ называется регулярное отображение всюду плотного открытого множества $D(f) \subset E$ в $F$, не допускающее продолжения. Рациональной (регулярной) функцией на $E$ называется рациональное (регулярное) отображение множества $E$ в $K$. Рациональные функции на $E$ образуют алгебру $k(E)$ над $k$, которая является полем тогда и только тогда, когда $E$ неприводимо. Если $U$ — открытое множество в $E$, то алгебра $O^E(U)$ регулярных функций на $U$ вкладывается в $k(E)$. Алгебраическое множество $E$ называется алгебраическим многообразием, если оно неприводимо в $K$-топологии и если для каждого открытого $U \subset E$ алгебра $O^E(U)$ и алгебра констант со значениями в $K$ линейно свободны в $k(E)$ над $k$. Пусть $L$ — полупростая коммутативная алгебра над $k$. Аффинной подалгеброй алгебры $L$ называется такая подалгебра $A$ с конечным числом образующих, что всякий элемент алгебры $L$ имеет вид $ab^{-1}(a, b \in A)$. Если $\mathfrak{p}$ — простой идеал в $A$ то обозначим через $A_{\mathfrak{p}}$ подалгебру алгебры $L$, образованную элементами вида $as^{-1}$ $(a, s \in A, s \notin \mathfrak{p})$. Пара $(M, \mathfrak{m})$, состоящая из подалгебры $M \subset L$ и ее идеала $\mathfrak{m}$, называется местом алгебры $L$, если $M = A_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ для некоторой аффинной подалгебры $A$ и ее простого идеала $\mathfrak{p}$. Места $(M_i, \mathfrak{m}_i)$ $(i = 1, 2)$ называются родственными, если идеал, порожденный идеалами $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$ в кольце $M$, порожденном $M_1$ и $M_2$, отличен от $M$. Если $A$ — фиксированная аффинная подалгебра, то множество мест $(A_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})$ для всех простых идеалов $\mathfrak{p} \subset A$ называется аффинной схемой. Множество $S$ мест алгебры $L$ называется схемой, если $S$ является суммой конечного числа аффинных схем и если всякие два родственные места из $S$ совпадают. Пусть $E$ — алгебраическое множество, $F$ — его замкнутое подмножество, $O(E, F)$ — алгебра всех таких рациональных функций $f$ на $E$, что $D(f) \supset F$ плотно в $F$, $\mathfrak{p}(E, F)$ — ядро естественного гомоморфизма $O(E, F) \to k(F)$. Доказывается, что множество пар $(O(E, F), \mathfrak{p}(E, F))$, где $F$ — все замкнутые неприводимые множества в $E$, является схемой алгебры $k(E)$. Обратно, если $S$ — схема некоторой алгебры $L$ и $P(S)$ — множество всех троек $(M, \mathfrak{m}, \chi)$, где $(M, \mathfrak{m}) \in S$, а $\chi$ — гомоморфизм алгебры $M$ в $K$, равный нулю на $\mathfrak{m}$, то $P(S)$ допускает структуру алгебраического множества, рациональные функции на котором имеют вид $\hat{f}(x) = \chi(f)$ для всех таких $x = (M, \mathfrak{m}, \chi)$, что $M$ содержит фиксированный элемент $f$.

А. Л. Онищик

**3818. Основные теоремы о строении аффинных алгебраических групп. Гротендик** (Les théorèmes de structure fondamentaux pour les groupes algébriques affines. Grothendieck A.), Sémin. C. Chevalley. École norm. supér. 1956—1958, 1. Paris, 1958, 6-1—6-16 (франц.)

Изложение результатов Бореля относительно указанных в заголовке групп (РЖМат, 1958, 6510).

А. Л. Онищик

**3819. Картановские подгруппы, регулярные элементы. Аффинные алгебраические группы размерности 1. Гротендик** (Sous-groupes de Cartan, éléments réguliers. Groupes algébriques affines de dimension 1. Grothendieck A.), Sémin. C. Chevalley. École norm. supér. 1956—1958, 1. Paris, 1958, 7-1—7-9 (франц.)

Изложение результатов Бореля относительно указанных в заголовке групп. (РЖМат, 1958, 6510).

А. Л. Онищик

**3820. Конечные группы, порожденные симметриями. Картье** (Groupes finis engendrés par des symétries. Cartier P.), Sémin. C. Chevalley. École norm. supér. 1956—1958, 2. Paris, 1958, 14-1—14-12 (франц.)

Пусть $V$ — конечномерное вещественное векторное пространство. Линейный оператор $S$ в $V$ называется симметрией, если $S^2 = E$ и если множество его неподвижных точек является гиперплоскостью. Пусть $\Delta$ — конечное подмножество в $V$, удовлетворяющее условиям: $\Delta$ порождает $V$; если $a \in \Delta$, то $\lambda a \in \Delta$ тогда и только тогда, когда $\lambda = \pm 1$; если $a \in \Delta$, то существует такая симметрия $S_a$, что $S_a a = -a$ и $S_a \Delta = \Delta$. В двойственном к $V$ пространстве вводится скалярное произведение $(f, g) = \sum_{a \in \Delta} f(a)\, g(a)$. Рассмотрим двойственное скалярное произведение в пространстве $V$. Существует такой элемент $x \in V$, что $(x, a) \neq 0$ для всех $a \in \Delta$. Обозначим через $\Sigma$ множество всех таких $a \in \Delta$, что $(x, a) > 0$. Пусть $\mathfrak{P}$ — множество таких подмножеств $F \subset \Sigma$, что всякий $a \in \Delta$ есть линейная комбинация элементов из $F$ с неотрицательными коэффициентами, и пусть $\pi$ — минимальный элемент упорядоченного множества $\mathfrak{P}$. Доказывается, что $\pi$ — базис пространства $V$ и что всякий элемент $a \in \Delta$ имеет вид $a = \pm \sum \lambda_i a_i$, где $\lambda_i \geqslant 0$, $a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ пробегает $\pi$. Далее доказывается, что если $G$ — группа, порожденная всеми симметриями $S_a$ $(a \in \Delta)$, то $S_i = S_{a_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ также порождают группу $G$, причем если $a_{ij}$ — порядок элемента $S_i S_j$ в $G$, то все соотношения между $S_i$ сводятся к соотношениям вида $(S_i S_j)^{a_{ij}} = E$.

А. Л. Онищик

**3821. Ассоциативные системы, структурно-изоморфные группе. III. Петропавловская Р. В.**, Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 19, 5—19 (рез. англ.)

Начало см. РЖМат, 1957, 4640.

Доказаны следующие факты:

1. Для того чтобы группа $G$ была $P$-изоморфна какой-нибудь ассоциативной системе $A$, не являющейся группой, необходимо и достаточно, чтобы она была периодической и содержала центральную силовскую подгруппу $S$, для которой $G^S \neq G$ ($G^S$ — подгруппа $G$, порожденная всеми силовскими подгруппами $G$, отличными от $S$). В частности, из этого следует, что если система $A$ $P$-изоморфна группе, содержащей элемент бесконечного порядка, то система $A$ сама является группой.

2. Для того чтобы локально конечная группа $G$ была $P$-изоморфна системе, не являющейся группой, необходимо и достаточно, чтобы она была неразложимой циклической группой или разлагалась в прямое произведение двух своих подгрупп, одна из которых неразложимая циклическая и имеет порядок, взаимно простой с порядками всех элементов из другого сомножителя.

3. Пусть $A$ — система, не являющаяся группой. Для того чтобы $A$ была $P$-изоморфна некоторой группе (в силу 1 группа должна быть периодической), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла одному из следую-

щих трех условий: 1) $A$ имеет вид $^{\mathfrak{a}}[\ ]^{\mathfrak{c}}$; 2) $A$ имеет тип $E$ и число ее элементов не более чем счетно; 3) $A = A_1 \times A_2$, где $A_1$ имеет вид $^{\mathfrak{a}}[\ ]^{\mathfrak{c}}$ или является группой, а $A_2$ имеет тип $E$, и среди групп $P$-изоморфных системе $A_1$, найдется такая группа $G_1$, что мощность $\mu(\omega_{A_2})$ множества $\omega_{A_2}$ не превосходит количества простых чисел, не занятых в $G$ (простое число $p$ называется занятым в системе $A$, если в ней существует такой элемент $a \in A$, что $[a]$ — неразложимая циклическая подгруппа и $p(a) = p$).

4. Пусть $A$ — система, не являющаяся группой. Для того чтобы $A$ была $P$-изоморфна некоторой локально конечной группе, необходимо и достаточно чтобы она удовлетворяла одному из следующих условий: 1) $A = \Pi\tau$, элементы $\tau$ есть допустимые циклические системы (т. е. не являющиеся группам циклические системы $\tau = [A]$, $P$-изоморфные неразложимым циклическим группам и $AE \neq E$) или локально конечные группы и для $\tau$ справедливо условие (3.4. р части 1). 2) Система $A$ имеет тип $E$, число ее элементов не более чем счетно. 3) $A = A_1 \times A_2$, $A_1$ удовлетворяет условию 1 теоремы, $A_2$ имеет вид $E$ и среди групп, $P$-изоморфных $A_1$, найдется такая группа $G$, что $\mu(\omega_{A_2})$ не превосходит количества простых чисел, не занятых в $G_1$. Л. Е. Садовский

**3822. Теория построения конечных полугрупп III. Конечные одноидемпотентные полугруппы. Тамура** (The theory of construction of finite semigroups III. Finite unipotent semigroups. Tamura Takayuki), Osaka Math. J., 1958, **10**, № 2, 191—204 (англ.)

Начало см. РЖМат, 1958, 143,7506. Полугруппа, единственным идемпотентом которой является ее нуль 0, называется $z$-полугруппой. Пусть $S$ — конечная $z$-полугруппа, $a$, $b$ — ее любые элементы. Будем писать $a > b$, если при некоторых $x$, $y$, $u$, $z$ выполняется одно из соотношений: $a = bx$, $a = yb$, $a = zbu$. Элемент $a$ полугруппы $S$ называется простым, если $a \in S \setminus S^2$. Число простых элементов полугруппы $S$ называется ее базисной шириной. Наибольшая длина цепей вида $x_1 < x_2 < \ldots < x_k = x$ ($x_i \in S$) называется высотой $H[x]$ элемента $x$. Высотой $H[S]$ полугруппы $S$ называется наибольшая высота ее элементов. Пусть $h$, $m$ — натуральные числа; $P$ — свободная полугруппа с образующими $p_1, p_2, \ldots, p_m$; $P_h$ — ее идеал, состоящий из всех слов длины $\leqslant h$; $F = P - P_h$ (РЖМат, 1956, 3695). $F$ является $z$-полугруппой высоты $h$ и базисной ширины $m$; она называется свободной $z$-полугруппой.

Оказывается, что всякая $z$-полугруппа высоты $h$ и базисной ширины $m$ является фактор-полугруппой свободной $z$-полугруппы $F$. Дается конструкция всех таких фактор-полугрупп. Найдено необходимое и достаточное условие, при котором две такие фактор-полугруппы изоморфны.

Дана конструкция расширения $z$-полугруппы по идеалу, являющемуся группой. Тем самым указан способ построения всех конечных одноидемпотентных полугрупп. Л. М. Глускин

**3823. Коммутативные полугруппы с одним определяющим соотношением. Емеличев В. А.**, Уч. зап. Шуйск. гос. пед. ин-т, 1958, **6**, 227—242

Изучается коммутативная полугруппа $G$, заданная конечным числом образующих $a_1, \ldots, a_n$ и одним определяющим соотношением

$$a_1^{\alpha} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n} = a_1^{\beta_1} \cdot a_2^{\beta_2} \ldots a_n^{\beta_n},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ — целые неотрицательные числа и $\alpha_1 < \beta_1$. Дается новый алгоритм для решения проблемы тождества. Необходимыми и достаточными условиями равенства двух различных слов

$$a_1^{p_1} \ldots a_n^{p_n} \text{ и } a_1^{q_1} \ldots a_n^{q_n} \quad (p_1 \leqslant p_1)$$

из $G$ являются:

1) $p_i \geqslant a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $q_i \geqslant \beta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

2) существование целочисленного положительного решения системы $p_i + x(\beta_i - \alpha_i) = q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Этот результат используется для доказательства основного результата работы — решения проблемы изоморфизма, позволяющего дать классификацию абелевых полугрупп с одним соотношением:

Две коммутативные полугруппы $G$ и $H$, заданные образующими $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ и определяющими соотношениями:

$$a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n} = a_1^{\beta_1} \ldots a_n^{\beta_n} \quad (\alpha_1 < \beta_1),$$

$$b_1^{\gamma_1} b_2^{\gamma_2} \ldots b_n^{\gamma_n} = b_1^{\delta_1} \ldots b_n^{\delta_n},$$

где $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 1$, $\sum_{k=1}^{n} \beta_k \neq 1$, изоморфны тогда и только тогда, когда существует такая перестановка $i_1 \ldots, i_n$ чисел $1, 2, \ldots, n$, что или $\alpha_p = \gamma_{i_p}$, $\beta_p = \delta_{i_p}$, или

$$\alpha_p = \delta_{i_p}, \quad \beta_p = \gamma_{i_p} \quad (p = 1, \ldots, n).$$

Доказывается также, что те же полугруппы $G$ и $H$, заданные определяющими соотношениями

$$a_1 = a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n},$$

$$b_1 = b_1^{\sigma_1} \ldots b_n^{\sigma_n},$$

где $\alpha_1 \geqslant 1$, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 1$, изоморфны тогда и только тогда, когда:

1) $\alpha_1 = \sigma_1$,

2) существует целое число $u$ и перестановка $i_2, i_3, \ldots, i_n$ чисел $2, 3, \ldots, n$, что

$$(u, \alpha_1 - 1) = 1,$$

$$\sigma_{i_k} u \equiv \alpha_k \pmod{(\alpha_1 - 1)} \quad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

Эти результаты используются для решения проблемы разыскания всех автоморфизмов коммутативной полугруппы с одним определяющим соотношением. Указан также алгоритм для проблемы делимости, позволяющий для любых двух слов $a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n}$ и $a_1^{q_1} a_2^{q_2} \ldots a_n^{q_n}$ из $G$ установить, существует ли слово $a_1^{x_1} a_2^{x_2} \ldots a_n^{x_n}$ из $G$ такое, что равенство $a_1^{p_1+x_1} a_2^{p_2+x_2} \ldots a_n^{p_n+x_n} = a_1^{q_1} a_2^{q_2} \ldots a_n^{q_n}$ справедливо в полугруппе.

Остается нерешенной проблема изоморфизма для полугрупп, заданных конечным числом образующих и конечным числом определяющих соотношений, а также и более общая задача нахождения классификации абелевых полугрупп. Е. Н. Пятницкая, М. Гриндлингер

**3824. О полных полумодулях. Виганд т** (On complete semi-modules. Wiegandt Richard), Acta scient. math., 1958, **19**, № 3-4, 219—223 (англ.)

Полумодулем автор называет аддитивную коммутативную полугруппу с сокращением; предполагается, что полумодуль содержит нуль. Полумодуль $S$ называется полным, если он является прямым слагаемым в любом полумодуле, содержащем $S$ в качестве нормального слева (РЖМат, 1959, 5592) подполумодуля. Полумодулем типа $N$ называется полумодуль, изоморфный аддитивной полугруппе всех неотрицательных рациональных чисел.

Доказывается, что полумодуль $S$ является полным тогда и только тогда, когда $nS = S$ для любого натурального $n$. Каждый полный полумодуль может быть единственным образом представлен в виде прямой сум-

мы групп типа $R$, полумодулей типа $N$ и групп типа $p^\infty$ (ср. РЖМат, 1953, 3091 К). Каждый полумодуль может быть погружен в полный полумодуль. Во всяком полном полумодуле, содержащем полумодуль $S$, существует (с точностью до изоморфизма единственный) минимальный полный подполумодуль, содержащий $S$. Л. М. Глускин

**3825. О коммутативных периодических полугруппах. Колибиарова** (O komutatívnych periodických pologrupách. Kolibiarová Blanka), Mat.-fyz. časop., 1958, 8, № 3, 127—135 (словацк.; рез. русск., нем.)

Пусть $S$ — коммутативная периодическая полугруппа, $I(S)$ — подполугруппа $S$, состоящая из всех ее идемпотентов. Элемент $s \in S$ принадлежит идемпотенту $e$, если $s^n = e$ при некотором натуральном $n$. Пусть $K^{(e)}$ — подполугруппа полугруппы $S$, состоящая из всех элементов, принадлежащих идемпотенту $e$. Классы $K^{(e)}$ образуют полугруппу $K$ относительно умножения комплексов. $K$ является полуструктурой (РЖМат, 1957, 6 63), изоморфной полугруппе $I(S)$. $F$-классы полугруппы $S$ (РЖМат, 1958, 2748) образуют полугруппу $F$ относительно умножения комплексов. Существует гомоморфизм полугруппы $S$ на $F$ и полугруппы $F$ на $K$. Если в $S$ всякая убывающая цепь главных идеалов конечна, то всякая убывающая (по делимости) цепь идемпотентов из $S$ также конечна. Для того чтобы $S$ содержала минимальный главный идеал, необходимо и достаточно, чтобы полуструктура $I(S)$ содержала наименьший элемент. Если полугруппа $S$ является своим главным идеалом, то полуструктура $I(S)$ обладает единицей. Обратная теорема неверна. Если $e_i, e_k \in I(S)$, $e_n = e_i e_k$, то отображение $\varphi_n^i x = xe_k$, $(x \in K^{(e_i)})$ является гомоморфизмом полугруппы $K^{(e_i)}$ в $K^{(e_n)}$. Изучаются свойства этих гомоморфизмов. Указана конструкция, которая по заданным классам $K^{(e)}$ позволяет построить полугруппу $S$ в случае, когда $I(S)$ линейно упорядочена.

Л. М. Глускин

**3826. О мультипликативной полугруппе классов вычетов по модулю $m$. Паризек, Шварц** (O multiplikatívnej pologrupe zvyškových tried (mod $m$). Parízek Bohumír, Schwarz Štefan), Mat.-fyz. časop., 1958, 8, № 3, 136—150 (словацк.; рез. русск., англ.)

Пусть $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ — каноническое разложение натурального числа $m$; $S_m$ — мультипликативная полугруппа классов вычетов по модулю $m$; $G_1$ — подполугруппа $S_m$, состоящая из всех классов, взаимно простых с $m$; $[a]$ — класс вычетов по модулю $m$, содержащий число $a$; $P_e$ — подполугруппа $S_m$, состоящая из всех элементов, принадлежащих идемпотенту $e$ (реф. 3825). Каждый отличный от 1 идемпотент $e \in S_m$ имеет вид $e = \left[p_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots p_{i_s}^{\alpha_{i_s}} a\right]$, где $[a] \in G_1$. Всего полугруппа $S_m$ содержит точно $2^r$ различных идемпотентов, из них $r$ идемпотентов являются примитивными. Всякий примитивный идемпотент полугруппы $S_m$ имеет вид $\left[p_1^{\alpha_1} \dots p_{l-1}^{\alpha_{l-1}} p_{l+1}^{\alpha_{l+1}} \dots p_r^{\alpha_r} a\right]$, где $[a] \in G_1$. Если идемпотенты полугруппы $S_m$ считать упорядоченными по делимости, то они образуют булеву алгебру. Полугруппа $S_m$ является объединением своих подполугрупп $P_e$. Если $e = \left[p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s} a\right]$, то полугруппа $P_e$ содержит точно $p_1^{\alpha_1 - 1} \dots p_s^{\alpha_s - 1} \varphi\left(p_{s+1}^{\alpha_{s+1}} \dots p_r^{\alpha_r}\right)$ различных элементов. Максимальная подгруппа $G_e \subseteq S_m$, для которой $e$ является единицей, имеет вид $G_1 e$ и содержит точно $\varphi\left(p_{s+1}^{\alpha_{s+1}} \dots p_r^{\alpha_r}\right)$ различных элементов. Изучаются классы смежности полугруппы $S_m$ по $P_e$ по полугруппам $G_1$ и $G_e$. Л. М. Глускин

**3827. Пополнение полунепрерывных упорядоченных коммутативных полугрупп. Клиффорд** (Completion of semi-continuous ordered commutative semigroups). Clifford A. H.), Duke Math. J., 1959, **26**, № 1, 41—59 (англ.)

Аддитивно записываемая коммутативная полугруппа $S$, линейно упорядоченная отношением $<$, называется в работе упорядоченной коммутативной полугруппой (у. к. п.), если действие в полугруппе монотонно, т. е. для любых $a, b, c \in S$ из $a < b$ следует $a + c \leqslant b + c$. У. к. п. $S$ называется полной, если всякое ее ограниченное сверху подмножество $A$ имеет в $S$ точную верхнюю грань $\sup A$. Пусть $S$, $\Sigma$ — две у. к. п., $s \subseteq \Sigma$; полугруппа $\Sigma$ называется нормальным пополнением $S$, если $\Sigma$ полна и для каждого элемента $s \in \Sigma$ существуют такие подмножества $A, B \subseteq s$, что $S = \sup A = \inf B$. Два нормальных пополнения $\Sigma$ и $\Sigma'$ полугруппы $S$ называются эквивалентными, если существует изоморфизм полугруппы $\Sigma$ на $\Sigma'$ (являющийся изотонным отображением), индуцирующий тождественный автоморфизм на $S$. Естественным образом на $S$ вводится интервальная топология (Биркгоф, Теория структур, Изд-во ин. лит., М., 1952). У. к. п. $S$ называется полунепрерывной снизу, если для любых $a, b, c \in S$, удовлетворяющих условию $c < a + b$, существуют такие окрестности $V_a$, $V_b$, что из $x \in V_a$, $y \in V_b$ следует $c < x + y$. У. к. п., полунепрерывная снизу и сверху, называется непрерывной. Пара $(A, B)$ подмножеств $S$ называется соседней, если $a \leqslant b$ для любых $a \in A$, $b \in B$, и существует самое большее один элемент $c \in S$ такой, что $a \leqslant c \leqslant b$ для всех $a \in A$, $b \in B$. Подмножество $L \subseteq S$ называется нижним классом, если для любых $a \in L$, $x \in S$ из $x < a$ следует, что $x \in L$. Пусть $A$ — подмножество $S$; $L(A)$ — множество всех таких $x \in S$, что $x \leqslant a$ для какого-либо $a \in A$; $A^* = L(A) \cup \{a_0\}$, если $A$ имеет точную верхнюю грань $a_0$; в противном случае будем считать, что $A^* = L(A)$; $A^*$ является нижним классом для любого подмножества $A \subseteq S$. Пусть $S$ — полунепрерывная снизу у. к. п.; $\Sigma$ — множество всех непустых ограниченных сверху замкнутых нижних классов; $\Sigma_0$ — подмножество $\Sigma$, состоящее из главных (т. е. содержащих наибольший элемент) нижних классов. Множество $\Sigma$ линейно упорядочено отношением включения. Определим в $\Sigma$ действие $\alpha \dot{+} \beta = (\alpha + \beta)^*$ ($A + B$ — множество всех сумм $a + b$, где $a \in A$, $b \in B$). Тогда $\Sigma$ является полной полунепрерывной снизу у. к. п.; $\Sigma_0$ изоморфна $S$ и $\Sigma$ является нормальным пополнением $S$. Обратно, всякое полунепрерывное снизу нормальное пополнение полугруппы $S$ эквивалентно $\Sigma$. Частично эта теорема вытекает из результата Кришнана (Krishnan V. S., Bull. Soc. math. France, 1950, 78, 235 — 263).

В множестве $\Sigma$ описанных выше дедекиндовых сечений в $S$, упорядоченном по включению, действие может быть установлено различными способами; при этом получаются различные неэквивалентные нормальные пополнения у. к. п. $S$ (приведены примеры). Введем в множестве всех нормальных пополнений у. к. п. $S$ отношение частичной упорядоченности, считая, что $\Sigma(\dot{+}) \leqslant \Sigma(+')$ тогда и только тогда, когда $\alpha \dot{+} \beta \leqslant \alpha +' \beta$ при всех $\alpha, \beta \in \Sigma$. Среди нормальных пополнений непре-

рывной у. к. п. $S$ полунепрерывное снизу нормальное пополнение является наименьшим, а полунепрерывное сверху — наибольшим. Непрерывная у. к. п. $S$ обладает непрерывным нормальным пополнением тогда и только тогда, когда для любых соседних пар подмножеств $(A, B)$, $(A', B')$ из $S$ пара $(A+A', B+B')$ также является соседней. В этом случае непрерывное, полунепрерывное снизу и полунепрерывное сверху нормальные пополнения у. к. п. $S$ совпадают и образуют единственное нормальное пополнение $S$. Остальная часть работы посвящена естественно упорядоченным (е. у.) коммутативным полугруппам (РЖМат, 1956, 237). У. к. п. $S$ называется плотной, если из $a < b$ $(a, b \in S)$ следует, что в $S$ существует такой элемент $x$, что $a < x < b$. Всякая плотная е. у. к. п. является непрерывной. Пусть $Z$ — аддитивная полугруппа всех целых положительных чисел, $Z^{(n)}$ — ее идеал, состоящий из всех чисел $\geqslant n$. Полугруппы $P$, $P-(1)$, $P-[1]$ (РЖМат, 1956, 237), $Z$, $Z-Z^{(n)}$ называются фундаментальными. Е. у. к. п. $S$ тогда и только тогда изоморфна фундаментальной полугруппе, когда она полна и ординально неприводима. Фундаментальная полугруппа тогда и только тогда может служить нормальным пополнением для $S$, когда $S$ архимедова и обладает единицей; при этом для $S$ существует единственное (с точностью до эквивалентности) нормальное пополнение. Пусть $S = U_{i \in I} S_i$ — представление $S$ в виде ординальной суммы ординально неприводимых е. у. к. п.; $S$ является полной тогда и только тогда, когда: 1) множество $I$ — полное, 2) каждая $S_i$ изоморфна фундаментальной полугруппе, 3) если $i$ не является наибольшим элементом в $I$ и в $I$ нет непосредственно следующего за $i$ элемента, то в $S_i$ существует наибольший элемент, 4) если $i$ не является наименьшим элементом в $I$ и в $I$ нет элемента, непосредственно предшествующего $i$, то в $S_i$ существует наименьший элемент, 5) если $i < j$ — пара смежных элементов из $I$, то либо $S_i$ содержит наибольший элемент, либо $S_j$ содержит наименьший элемент. Полугруппа $S$ может быть погружена в полную е. у. к. п. $\Sigma$ тогда и только тогда, когда каждая $S_i$ архимедова, при этом $\Sigma$ (с точностью до эквивалентности) является единственным нормальным пополнением $S$. Л. М. Глускин

**3828. Некоторые свойства обобщенных характеров полугрупп. Лесохин М. М.**, Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, 183, 277—286

Пусть $A$ и $B$ — произвольные коммутативные полугруппы. Обобщенным характером $A$ в $B$ называется гомоморфизм полугруппы $A$ в $B$. Пусть $\Phi$ — множество всех обобщенных характеров $A$ в $B$. Введем в $\Phi$ операцию: $\chi_1\chi_2 = \chi_3$, если $\chi_1(a)\,\chi_2(a) = \chi_3(a)$ для любого $a \in A$. Относительно этой операции множество $\Phi$ (если оно не пусто) является полугруппой. В работе рассмотрен ряд свойств полугруппы $\Phi$ в предположении, что для каждого $b \in B$ найдутся элементы $a \in A$, $\chi \in \Phi$, удовлетворяющие условию $\chi(a) = b$. Если $B$ — периодическая полугруппа, то и $\Phi$ является периодической полугруппой. Полугруппа $\Phi$ тогда и только тогда обладает одним из перечисленных свойств: 1) $\Phi$ содержит единицу, 2) $\Phi$ содержит нуль, 3) $\Phi$ регулярна (РЖМат, 1957, 166), 4) $\Phi$ является группой, — когда таким же свойством обладает полугруппа $B$. Аналогичное утверждение для полугрупп $A$ и $\Phi$ неверно. Если $A$ — циклическая полугруппа, то $\Phi$ изоморфна полугруппе $B$. Л. М. Глускин

**3829. Об одном классе периодических полугрупп. Айзенштат А. Я.**, Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, 183, 241—249

Класс полугрупп $\Phi'$ называется универсальным для класса полугрупп $\Phi$, если для каждой полугруппы $Q$ из $\Phi$ найдется такая полугруппа $Q' \in \Phi'$, что $Q$ изоморфна некоторой подполугруппе полугруппы $Q'$. В статье построены универсальные классы полугрупп для класса $\Psi$ всех счетных периодических полугрупп $Q$, удовлетворяющих следующим условиям: 1) уравнение $xa = ya$ может иметь лишь конечное число нетривиальных решений для любого $a \in Q$, 2) множество $\Omega \setminus Qa$ конечно для любого $a \in Q$. Пусть $A$ — любая подстановка из $\sum_N$ (РЖМат, 1959, 3571). Если существует точно $k_i$ чисел $\alpha \in N$ таких, что $A\alpha = \beta_i$ $(\beta_i \in AN)$, то избытком подстановки $A$ называется сумма $\sum_{\beta_i \in AN} (k_i - 1)$; дефектом подстановки $A$ называется мощность множества $N \setminus AN$. Обозначим через $\sum_1$ подполугруппу полугруппы $\sum_N$, состоящую из всех подстановок, у каждой из которых дефект и избыток конечны и равны между собой; $\Psi'$ — класс всех счетных подполугрупп полугруппы $\sum_1$. В работе доказано, что $\Psi'$ является универсальным классом для класса $\Psi$. Построен класс $\Psi''$, состоящий из подполугрупп полугруппы $\sum_N$ с конечным числом образующих и являющийся универсальным для $\Psi'$ (а следовательно, для $\Psi$). Для полугрупп класса $\Psi''$ найдены системы определяющих соотношений. Л. М. Глускин

**3830. Одна теорема о полугруппах. Пеак** (Ein Satz über Halbgruppen. Peák István. Publs math., 1959, 6, № 1-2, S. 111—112) (нем.)

Доказана теорема: Всякая полугруппа с сокращением, обладающая непустым центром и не имеющая собственных идеалов, является группой. Л. М. Глускин

**3831. Полугруппы, чьи все истинные подполугруппы являются группами. Поллак, Реден** (Die Halbgruppen, deren alle echten Teilhalbgruppen Gruppen sind. Pollák Georg, Rédei Ladislaus. Publs math., 1959, 6, № 1—2, S., 126—130 (нем.)

Полугруппа $S$ называется $E$-полугруппой, если ее всякая собственная подполугруппа является группой. Доказывается, что всякая $E$-полугруппа, содержащая более двух элементов, является либо периодической группой, либо циклической полугруппой, образующий элемент которой удовлетворяет при некотором $n \geqslant 2$ условию $a^{n+1} = a^2$. Л. М. Глускин

**3832. О группах, являющихся гомоморфными образами полугруппы. Полугруппы, обладающие максимальным гомоморфным образом, являющимся группой. Лефевр** (Sur les groupes homomorphes à un demi-groupe; demi-groupes admettant un groupe homomorphe maximum. Lefebvre Pierre), C. r. Acad. sci., 1959, 248, № 16, 2277—2279 (франц.)

Подполугруппа $S$ полугруппы $D$ называется нормальной в смысле Леви (соответственно унитарной), если для любых $a, b, c \in D$ справедливость двух из трех включений $abc \in S$, $ac \in S$, $b \in S$ (соответственно $ab \in S$, $a \in S$, $b \in S$) влечет за собой справедливость третьего. Пусть $D$ — полугруппа без нуля, $I$ — ее идеал, $S_1$ — нормальная и унитарная подполугруппа полугруппы $I$. Минимальная нормальная и унитарная подполугруппа полугруппы $D$, содержащая $S_1$, удовлетворяет условию

$$S_1 = S_1 I. \qquad (1)$$

Соотношение (1) устанавливает взаимно однозначное соответствие между нормальными и унитарными подполугруппами полугруппы $D$ и ее произвольного двустороннего идеала $I$. Если полугруппа $D$ содержит вполне простой двусторонний идеал $K$ без нуля, то $D$ и $K$ обладают одним и тем же максимальным гомоморфным образом, являющимся группой.

Примечание референта. Последнее утверждение (теорема 5) содержится в статье референта (РЖМат, 1957, 164). Л. М. Глускин

**3833. Нормальные ряды вполне простых полугрупп. Глускин Л. М.**, Уч. зап. Харьковск. гос. пед. ин-та, 1957, 21, 99—106

Замкнутым нормальным комплексом полугруппы $S$ называется такое ее подмножество, что для любых $p, p' \in P$ имеет место $pp' \in P$ и из $apb \in P$ всегда следует $ap'b \in P$ при любых $a, b \in S$ (здесь $a$ или $b$ могут и отсутствовать). Подмножество $P$ является полным прообразом идемпотента при каком-либо гомоморфизме $S$ тогда и только тогда, когда $P$ есть замкнутый нормальный комплекс. Для вполне простых полугрупп без нуля (см., например, РЖМат, 1957, 163) доказывается, что два любых конечных ряда замкнутых нормальных комплексов, последовательно содержащихся друг в друге, имеют изоморфные уплотнения. Понятию фактора ряда указанного вида в работе придается некоторый определенный специальный смысл, что необходимо, так как указание полного прообраза идемпотента, вообще говоря, не определяет гомоморфизм полугруппы. Е. С. Ляпин

**3834. Абстрактная характеристика полугруппы всех бинарных отношений. Зарецкий К. А.**, Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, 183, 251—263

Бинарным отношением в множестве $\Omega$ называется любое подмножество $A$ декартова произведения $\Omega \times \Omega$. Множество $S_\Omega$ всех бинарных отношений в $\Omega$ является полугруппой относительно следующей операции умножения: для любых $A, B \in S_\Omega$, $\alpha, \beta \in \Omega$ тогда и только тогда $(\alpha, \beta) \in AB$, когда существует такой элемент $\gamma \in \Omega$, что $(\alpha, \gamma) \in A$, $(\gamma, \beta) \in B$. Пусть $\Sigma_1, \Sigma_2$ — подмножества $\Omega$. Бинарное отношение $A$, состоящее из всех пар $(\alpha, \beta)$, где $\alpha \in \Sigma_1, \beta \in \Sigma_2$, называется прямоугольным. Множество $T_\Omega$ всех прямоугольных бинарных отношений в $\Omega$ является вполне простым плотно вложенным (РЖМат, 1953, 115) идеалом полугруппы $S_\Omega$. Для того, чтобы полугруппа $S$ была изоморфна полугруппе $S_\Omega$, необходимо и достаточно, чтобы $S$ содержала плотно вложенный идеал, изоморфный $T_\Omega$.

Пусть $S$ — некоторая полугруппа с нулем 0. Элемент $a \in S$ называется базисным, если он удовлетворяет условиям: 1) $a$ не нильпотентен, 2) для любых $x, y \in S$ из $xy = 0$ следует $xay = 0$, 3) если элемент $a' \in S$ удовлетворяет условию (2), то либо $aa' = a'a = 0$, либо $aa' = a'a = a$. Базисными элементами полугрупп $S_\Omega$ и $T_\Omega$ являются все бинарные отношения $(\alpha, \alpha)$, где $\alpha \in \Omega$, и только они. Для того чтобы полугруппа $S$ была изоморфна полугруппе $S_\Omega$, необходимо и достаточно, чтобы $S$ удовлетворяла следующим условиям: 1) $S$ имеет нуль 0; 2) множество всех базисных элементов из $S$ равномощно $\Omega$; 3) если $a, b \in S$ и $a \neq b$, то найдутся такие базисные элементы $x, y \in S$, что либо $vay = 0$, $xby \neq 0$, либо $xay \neq 0$, $xby = 0$; 4) для любых $a, b \in S$ и любых базисных элементов $x, y \in S$ неравенство $vaby \neq 0$ справедливо тогда и только тогда, когда найдется такой базисный элемент $v \in S$, что $xav \neq 0$, $vby \neq 0$; 5) если $S'$ — надполугруппа $S$ с тем же нулем и множеством базисных элементов и $S'$ удовлетворяет условиям 1)—4), то $S' = S$. Аналогичная характеристика получена для полугруппы $T_\Omega$. Л. М. Глускин

**3835. Абстрактная характеристика полугруппы всех рефлективных бинарных отношений. Зарецкий К. А.**, Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, 183, 265—269

См. реф. 3834. Бинарное отношение $A \in S_\Omega$ называется рефлективным, если $(\alpha, \alpha) \in A$ для любого $\alpha \in \Omega$. Множество $R_\Omega$ всех рефлективных бинарных отношений в $\Omega$ является подполугруппой $S_\Omega$. Пусть $S$ — полугруппа с нулем 0; $X(S)$ — множество всех элементов $u \in S \setminus 0$, удовлетворяющих условиям: 1) $uaub = aub$ для любых $a, b \in S$; 2) если $au = a$ ($a \in S$), то либо $a = 0$, либо $a = u$. В терминах множества $X(S)$ и двойственного ему множества $Y(S)$ дана абстрактная характеристика полугруппы $R_\Omega$, аналогичная характеристике полугруппы $S_\Omega$.

Л. М. Глускин

**3836. Об унитарных комплексах в полугруппе. Прасад-Чаудхури** (Sur les complexes unitaires dans un demi-groupe. Prasad Chaudhuri Niranjan), C. r. Acad. sci., 1955, 248, № 12, 1750—1752 (франц.)

Подмножество $X$ полугруппы $D$ называется унитарным справа комплексом (у. с. к.), если для любых $a \in D$, $x \in X$ из $ax \in X$, следует $a \in X$. Если $Y$ — правый идеал полугруппы $D$, то $D \setminus Y$ является у. с. к. полугруппы $D$. Найден ряд условий, при которых всякий у. с. к. полугруппы $D$ является ее подполугруппой. Пусть, например, $D$ инверсивна (РЖМат, 1957, 165) или является объединением своих попарно непересекающихся подгрупп и если при этом $D$ является полугруппой с левым сокращением или множество всех идемпотентов из $D$ линейно упорядочено по делимости, то всякий у. с. к. полугруппы $D$ является ее подполугруппой. Л. М. Глускин

**3837. О минимальных односторонне чистых подполугруппах полугруппы. Лефевр** (Sur les sous-demi-groupes nets d'un côté, minimaux, d'un demigroupe. Lefebvre Pierre), C. r. Acad. sci., 1959, 248, № 2, 173—175 (франц.)

Пусть $D$ — полугруппа без нуля. Для того чтобы чистый справа комплекс $S \supseteq D$ (РЖМат, 1955, 1115; 1959, 11543) был подполугруппой и минимальным чистым справа комплексом, необходимо и достаточно, чтобы $sS = s$ при любом $s \in S$. Всякая минимальная чистая справа подполугруппа $S \supseteq D$ является минимальным чистым справа комплексом полугруппы $D$. Минимальная чистая справа подполугруппа $S \supseteq D$ является множеством всех идемпотентов содержащего ее (единственного) минимального левого идеала $L$ полугруппы $D$. Для того чтобы полугруппа $D$ содержала односторонне чистую подполугруппу, необходимо и достаточно, чтобы она содержала минимальный чистый справа и минимальный чистый слева комплексы. Л. М. Глускин

**3838. О делимости в топологических полугруппах. Круминг П. Д.**, Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, 183, 271—275

Пусть $T$ — подполугруппа полугруппы $S$. Подмножество $D \supseteq S$ называется комплексом левой делимости относительно $T$, если $b \in aT$ $a \in bT$ для любых $a, b \in D$. Комплекс левой делимости называется максимальным, если он не является собственным подмножеством другого комплекса левой делимости. Для того чтобы полугруппа $S$ была регулярной (РЖМат, 1957, 166), необходимо и достаточно, чтобы: 1) для каждого элемента $a \in S$ существовала правая единица, 2) в каждом максимальном комплексе левой делимости относительно $S$ существовал хотя бы один идемпотент. Если бикомпактная связная хаусдорфова топологическая полугруппа регулярна, то она либо является группой, либо содержит бесчисленное множество идемпотентов.

Л. М. Глускин

**3839. Некоторые вопросы алгебры, связанные с теорией полугрупп. Дюбрёй** (Quelques problèmes d'algèbre liés à la théorie des demi-groupes. Dubreil

Paul M.), Colloque d'algèbre supérieure tenu à Bruxelles du 19 au 22 décembre 1956. Centre belge rech. math., Louvain, éts. Ceuterick, 1957, 29—44 (франц.)

Статья носит обзорный характер. Рассматриваются полугруппы, чистые комплексы, гомогруппы, минимальные чистые комплексы, а также мультипликативные полугруппы колец, их идеалы. Частично упорядоченные коммутативные полугруппы. Среди изложенных в статье оригинальных результатов автора типичны следующие. Для того чтобы чистый справа комплекс $K$ (РЖМат, 1955, 1115) полугруппы $D$ был минимальным, необходимо и достаточно, чтобы при любых $k \in K$, $x \in D$ из $kx \in K$ следовало $kx = k$. Если в полугруппе $D$ нет левой единицы, то никакой ее минимальный чистый справа комплекс не содержит сократимых слева элементов (РЖМат, 1957, 2929). Если в полугруппе $D$ с левым сокращением нет левой единицы, то $D$ не содержит минимальных чистых справа комплексов. Подполугруппа $S \subseteq D$ тогда и только тогда может быть минимальным чистым справа комплексом $D$, если $S$ состоит из левых нулей полугруппы $D$. Если $A$ — такое кольцо, что $A^2 \neq 0$, то его мультипликативная полугруппа не может быть ни прямоугольной, ни стационарной справа (РЖМат, 1956, 6423).

Примечание референта. Автору, по-видимому, неизвестен результат Ауберта (РЖМат, 1955, 5632) о коммутативных кольцах, в которых идеалы мультипликативной полугруппы являются идеалами кольца. Этот результат заново доказан в статье. Л. М. Глускин

**3840. О некоторых теоремах существования в мультипликативных системах. II. Максимальные подсистемы.** Кимура (On some existence theorems on multiplicative systems. II. Maximal subsystems. Kimura Naoki), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 6, 310—314 (англ.)

Ч. I см. РЖМат, 1959, 8861 (там же основные определения). Пусть $P$ — некоторое свойство мультипликативных систем. Подсистема $T$ системы $S$ называется наибольшей $P$-системой, если: 1) $T$ является $P$-системой, и 2) если $T'$ является $P$-подсистемой, то $T' \subseteq T$. Пусть дана совокупность попарно непересекающихся подсистем $S_i \subseteq S$ ($i \in K$, где $K$ — некоторое множество индексов), обладающие свойствами: 1) $S_i$ является $P$-подсистемой для всех $i \in K$, 2) если $T$ не пустая $P$-подсистема из $S$, то $T$ принадлежит некоторому $S_i$. Тогда каждая $S_i$ называется максимальной $P$-подсистемой. Приводятся ряд теорем и примеров, связанных с существованием наибольших и максимальных $P$-подсистем. Показывается дуальность понятий из обеих частей работы. Доказательства теорем не даются.

В. Д. Белоусов

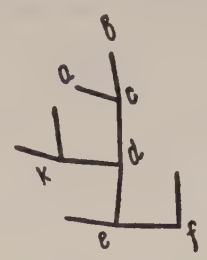
**3841. Многочлены показателей и деревья.** Минк (Index polynomials and bifurcating root-trees. Minc H.), Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1957, **A64**, № 4, 319—341 (англ.)

Если $x$ — образующий элемент свободного циклического группоида $\mathfrak{A}$, то любой элемент этого группоида может быть записан в виде $x^P$, где $x^1 = x$, $x^{Q+R} = x^Q x^R$. Для краткости записи показателей пользуются правыми главными степенями: $x^1 = x$, $x^2 = x^1 x$, $x^3 = x^2 x$ и т. д. Например, $x^{(1+(2+2))+1} = (x\,(x\,((xx) \times (xx))))\,x$.

В множестве $L$ всех показателей элементов группоида $\mathfrak{A}$ можно ввести и операцию умножения: $(x^P)^Q = x^{PQ}$. Умножение и сложение связаны левым дистрибутивным законом. Множество $L$ с двумя операциями сложения и умножения называется свободной логарифметикой.

В работе даются различные представления свободной логарифметики в кольце $\mathfrak{M}[\lambda, \mu]$ двух некоммутативных переменных $\lambda$, $\mu$, с целыми коэффициентами.

С этой целью каждому показателю ставится во взаимно однозначное соответствие определенная диаграмма, называемая деревом, которое определяется следующим образом: 1) $\cdot$ и $\vee$ — деревья; 2) если $(P)$ и $(Q)$ — деревья, то и $(P) \vee (Q)$ также дерево. Например, показателю $P = (1 + (2 + 2)) + 1$ соответствует дерево:




Точки $a$, $b$, $c$, ... дерева называются узлами. Дерево вида $\overset{a}{\underset{c}{\vee}}\,b$ называется вилкой, точки $a$, $b$ вилки называются соответственно левым и правым концами вилки, они покрывают слева, соответственно справа, узел $c$ — вершину вилки. Если узел $a$ не покрывается никаким другим узлом, то он называется свободным концом.

Естественным образом вводятся сложение и умножение деревьев, полученная алгебра называется алгеброй деревьев, она изоморфна свободной логарифметике.

Каждый узел определяет цепь узлов, каждый из которых покрывает следующий, например, узел $a$ определяет цепь $a$, $c$, $d$, $e$, $f$ (только последний ничего не покрывает). Каждому узлу ставится в соответствие символ $\lambda$ или $\mu$, если он покрывает слева или справа следующий узел. Если узел ничего не покрывает, то ему ставится в соответствие 1. Таким образом каждому узлу соответствует последовательность символов, например, узлу $a$ соответствует последовательность $\lambda$, $\mu$, $\mu$, $\lambda$, 1 или, сокращенно $\lambda\mu^2\lambda$. Такое выражение называется термом. Несколько термов, соединенные знаком $+$, образует многочлен, принадлежащий кольцу $\mathfrak{M}[\lambda, \mu]$.

Соответствие $P \to \pi_P \in \mathfrak{M}[\lambda, \mu]$ называется представлением алгебры деревьев $L$ (или свободной логарифметики $L$), если из равенств $\pi_Q = \pi_{Q'}$ и $\pi_R = \pi_{R'}$ следует $\pi_{Q+R} = \pi_{Q'+R'}$. Если соответствие $P \to \pi_P$ взаимно однозначно, то представление называется точным. Многочлены $\pi_P$ называются $\pi$-многочленами.

Рассматриваются следующие типы многочленов: 1) $\chi$-многочлен $\chi_P$, термы которого соответствуют всем узлам дерева $P$, 2) $\psi$-многочлен $\psi_P$, термы которого соответствуют всем свободным концам $P$, 3) $\theta$-многочлен $\theta_P$, термы которого соответствуют всем несвободным узлам $P$, и 4) $\omega$-многочлен $\omega_P$, термы которого соответствуют вершинам свободной вилки (вилка называется свободной, если ее концы свободны).

Предыдущие многочлены определяются и с помощью рекуррентных соотношений, например, для $\theta_P$ имеем: $\theta_1 = 0$, $\theta_{P+Q} = \theta_P \lambda + \theta_Q \mu + 1$. Доказывается, что все перечисленные многочлены дают точные представления алгебры $L$.

Дерево $P$ называется простым, если из равенства $P = QR$ следует либо $Q = 1$, либо $R = 1$. Доказывается обычная теорема о разложении дерева в произведение простых деревьев, а также и единственность такого разложения. Как следствие, из этой теоремы вытекает единственность решения уравнений $PX = 0$, $YP = 0$, если только они разрешимы. Доказывается, что если

$P$ — простое дерево, то и соответствующий $\psi$-многочлен неприводим в $[\lambda, \mu]$.

В заключение показывается, что все деревья образуют структуру относительно следующих операций: 1) $P \dashv Q$, если $P$ получается из $Q$ вычеркиванием одной свободной вилки, 2) $P \cdot Q$ определяется следующим образом: $\{\theta_{P \cdot Q}\} = \{\theta_P\} \cup \{\theta_Q\}$, где $\{\theta_P\}$ — совокупность всех термов $\theta$-многочлена $\theta_P$. Аналогично определяется и $P \mid Q$. Доказывается, что построенная структура метрическая. В. Д. Белоусов

**3842. Тернарные алгебраические системы. Гика** (Structuri algebrice ternare. Ghika Al.), Comun. Acad. RPR, 1958, 8, № 3, 257—261 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть $E$ и $E'$ — два различных непустых множества. Через $\mathfrak{G}$ обозначается множество всех пар функций $(f, f')$, где $f : E \to E'$ и $f' : E' \to E$. Через $\mathfrak{H}$ обозначается множество всех пар функций $(g, g')$, где $g, g' : E \times E' \to E \times E'$ ($E \times E'$ означает кардинальное произведение множеств $E$ и $E'$).

$n$-арная операция, определенная на множестве $\mathfrak{G}$ или $\mathfrak{H}$, принадлежит классу $\Phi_n$, если она получается путем суперпозиций компонентных функций.

Имеет место теорема: Пусть $\mathfrak{G}$ — полугруппа относительно некоторой операции из $\Phi_2$, тогда $\mathfrak{G}$ изоморфна некоторой части $\mathfrak{H}$ с той же операцией.

Ассоциативные $n$-арные законы определяются, как обычно. Для $n=3$ ассоциативный закон имеет вид:

$$(x_1x_2x_3)\,x_4x_5 = x_1\,(x_2x_3x_4)\,x_5 = x_1x_2\,(x_3x_4x_5).$$

Утверждается, что на множестве $\mathfrak{H}$ существуют четыре типа ассоциативных бинарных операций из класса $\Phi_2$ и шесть ассоциативных тернарных операций из класса $\Phi_3$. Как следствие вытекает, что на множестве $\mathfrak{G}$ не существует ассоциативных бинарных операций из класса $\Phi_2$ и существуют только две тернарные ассоциативные операции из класса $\Phi_3$, именно:

$$((f, f')\,(g, g')\,(h, h')) = \begin{cases} (fg'h,\ f'gh') \text{ или} \\ (hg'f,\ h'gf'). \end{cases} \qquad (1)$$

Непустое множество $T$ называется тернарной группой, если на $T$ определена ассоциативная тернарная операция и, кроме того,

1) существует в $T$ по крайней мере один элемент $e$ — единица, такой, что $xee = eex = x$ для любого $x \in T$;

2) для любого элемента $x \in T$ и для любой единицы $e$ существуют по крайней мере один элемент $\widetilde{x}$ и один элемент $\bar{x}$, что

$$\bar{x}xe = \bar{x}xe = xe\widetilde{x} = \widetilde{x}ex = e.$$

Множество $T'$ всех пар взаимно однозначных отображений (функций), определенных на тернарной группе $T$, образует тернарную группу относительно первой из операций (1). Имеет место аналог теоремы Кэли для групп; всякая тернарная группа $T$ изоморфна некоторой подгруппе тернарной группы $T'$, т. е. $T'$ по отношению к $T$ играет роль симметрической группы. Доказательства не приводятся. Имеются опечатки. В. Д. Белоусов

## ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

**3843. Использование кватернионного формализма в специальной теории относительности. Гюрсей** (Contribution to the quaternion formalism in special relativity. Gürsey Feza), Istanbul üniv. fen. fac. mecm., 1955, A20, № 3-4, 149—171 (англ.; рез. турецк.)

Систематическое изложение основ релятивистской квантовой механики и электродинамики с помощью кватернионов с комплексными коэффициентами. В основе этих приложений кватернионов лежит то обстоятельство, что вещественная алгебра, порожденная единичной матрицей и матрицами Паули, изоморфна подалгебре алгебры комплексных кватернионов, состоящей из элементов вида $a_0e + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3$, где $a_0$ — вещественно, а коэффициенты при мнимых единицах $i_1, i_2, i_3$ чисто мнимы. Изоморфизм с упомянутой выше алгеброй устанавливается так: $a_0e + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 \leftrightarrow a_0E + i\,(a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3)$, где $\sigma_k$ — матрицы Паули, $E$ — единичная матрица, $i = \sqrt{-1}$.

Значительная часть статьи посвящена целиком алгебре кватернионов и содержит ряд полезных формул.

Ф. А. Березин

**3844. Одно элементарное доказательство теоремы о псевдосходимости. Хэ Бо-хэ** (He Peh-hor.), Дунбэй женьминь дасюэ цзыжань-кэсюэ сюэбао, Acta scient. natur., 1957, № 1, 247—251 (кит.; рез. англ.)

**3845. К теории нормирований с неархимедово упорядоченной группой значений и неархимедово упорядоченным телом. Крулль** (Zur Theorie der Bewertungen mit nichtarchimedisch geordneter Wertgruppe und der nichtarchimedisch geordneter Körper. Krull Wolfgang H.), Colloque d'algèbre supérieure tenu à Bruxelles du 19 au 22 décembre 1956. Centre belge rech. math., Louvais, ets. Ceuderick, 1957, 45—77 (нем.)

Пусть $K$ — поле и $K^0$ — его мультипликативная группа. Нормирование $B$ поля $K$ осуществляется с помощью отображения поля $K$ на линейно упорядоченную абелеву группу, называемую группой значений нормирования $B$, по известным законам. Множество $\mathfrak{B}$ всех элементов поля $K$, норма каждого из которых больше или равна единице группы, является подкольцом поля $K$, называемым кольцом нормирования, принадлежащим нормированию $B$. Относительно операции умножения в поле $K$ подмножество $E$ (единиц) множества $\mathfrak{B}$ всех элементов, имеющих норму, равную единице, является подгруппой группы $K^0$, и фактор-группа $K^0/E$ линейно упорядочивается по правилу: $\bar{\alpha} \geqslant \bar{1}$ тогда и только тогда, если $\bar{\alpha}$ есть подмножество множества $\mathfrak{B}$. Линейно упорядоченная группа $K^0/E$ изоморфна группе значений нормирования $B$. Возьмем конечное число нормирований $B^i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) поля $K$ с принадлежащими им кольцами нормирования $\mathfrak{B}^i$. Обозначим через $\mathfrak{b}$ пересечение всех этих колец: $\mathfrak{b} = \mathfrak{B}' \cap \ldots \cap \mathfrak{B}^n$, через $E$ — группу единиц кольца $\mathfrak{b}$ и через $\overline{\mathfrak{H}} = K^0/E$ — группу значений нормирования с принадлежащим ему кольцом $\mathfrak{b}$. В первой части работы построена теоретико-групповая модель группы $\overline{\mathfrak{H}}$. Во второй части рассматривается аддитивная векторная группа неархимедового евклидова пространства. Векторная группа $G$ называется минимальной, если для каждой последовательности векторов $g_1, g_2, \ldots$ из $G$ при $|g_i| \geqslant |g_{i+1}|$ ($i = 1, 2, \ldots$) всегда следует $g_n = g_{n+1} = g_{n+2} = \ldots$ для достаточно большого числа $n$. Дана характеристика минимальной группы с помощью теоретико-групповых свойств. При этом важную роль играет теория нормирования неархимедово упорядоченного тела, над которым задано векторное пространство. А. А. Виноградов

**3846. Одно фундаментальное неравенство в теории продолжений нормирований. Коэн, Зарисский** (A fundamental inequality in the theory of extensions of valuations. Cohen I. S., Zariski Oscar), Illinois J. Math., 1957, 1, № 1, 1—8 (англ.)

Пусть $K$ — поле, $K^*$ — конечное алгебраическое расширение $K$ степени $n$. Пусть, далее, $v$ — (обобщенная) норма в $K$ с группой значений $\Gamma$, а $\Delta$ — соответствующее этой норме поле вычетов. В таком случае норма $v$ допускает конечное число неэквивалентных продолжений $v_1^*, \ldots, v_g^*$ на поле $K^*$, причем соответствующие этим продолжениям поля вычетов $\Delta_i$ являются расши-

рениями конечной степени поля $\Delta$, а группы значений $\Gamma_l$ содержат $\Gamma$ в качестве подгруппы конечного индекса. В работе доказывается, что

$$\sum_{i=1}^{g} e_i f_i \leqslant n,$$

где $e_l = [\Gamma_l : \Gamma]$, $f_l = [\Delta_l : \Delta]$.

Доказывается, что в написанном соотношении имеет место равенство, если вместо замыкание $R^*$ в поле $K^*$ кольца $R_v$ нормы $v$ является конечным $R_v$-модулем. Указывается пример, когда без выполнения этого условия имеет место строгое неравенство. А. И. Узков

**3847. Разложение Хассе в эллиптических полях и его обобщение на произвольные абелевы поля функций.** Рокетт (Über das Hassesche Klassenkörper-Zerlegungsgesetz und seine Verallgemeinerung für beliebige abelsche Funktionenkörper. Roquette Peter), J. reine und angew. Math., 1957, **197**, № 1-2, 49—67 (нем.)

Пусть $K$ — поле алгебраических функций от одного переменного; $k$ — поле констант поля $K$, $k^*$ — мультипликативная группа поля $k$, $G$ — конечная группа автоморфизмов поля $K$, $L$ — соответствующее группе $G$ подполе поля $K$, $D$ — группа дивизоров поля $K$, $S$ — группа главных дивизоров этого поля, а $D_1$ — группа классов дивизоров поля $K$.

Тогда можно построить две точные последовательности:

$$1 \to S \to D \to D_1 \to 1;$$

$$1 \to k^* \to K^* \to S \to 1.$$

Этим последовательностям, согласно общей теории когомологий, соответствуют гомоморфизмы:

$$\delta_1 : H^r(G, D_1) \to H^{r+1}(G, S)$$

и

$$\delta_2 : H^r(G, S) \to H^{r+1}(G, k^*),$$

которые порождают гомоморфизм $h$:

$$h : H^r(G, D_1) \to H^{r+2}(G, k^*),$$

определяющий арифметические свойства поля $K$.

Автор показывает, что изучение гомоморфизма $h$ при $r = 0$ приводит к закону разложения Хассе в эллиптическом поле алгебраических функций $K$ над полем деления круга на $m$ частей $L = Km$ (Алгебр. реф. сб. М., Изд-во ин. лит., 1948, реф. 205), а при $r = 1$ в случае алгебраически замкнутого поля $k$ и неразветвленного расширения $K/L$ дает аналог закона взаимности Артина, доказанный Кавадой и Тейтом (РЖМат, 1959, 8866), причем применение общих методов когомологий позволяет обобщить разложение Хассе на произвольные абелевы поля функций, а также получить некоторые результаты А. Вейля. С. Д. Берман

**3848. О теории точек Вейерштрасса.** Бозек (Zur Theorie der Weierstraßpunkte. Boseck Helmut), Math. Nachr., 1958, **19**, № 1-6, 29—63 (нем.)

В классической теории алгебраических функций от одной независимой переменной с алгебраически замкнутым полем констант $K$ характеристики нуль точка Вейерштрасса определяется как точка, в которой „пробелы" находятся не на $\rho$ первых местах, где $\rho$ — жанр поля $K(x, y)$. Показано, что точек Вейерштрасса конечное множество и даны для их числа нижняя и верхняя границы в зависимости от жанра поля. Если поле констант $K$ имеет характеристику $p > 0$, то классическое определение точки Вейерштрасса требует замены новым определением, так как можно построить поле алгебраических функций над алгебраически замкнутым полем констант характеристики $p > 0$, у которого все простые дивизоры будут точками Вейерштрасса.

Новое определение точки Вейерштрасса для случая произвольного поля констант было дано Шмидтом (Schmidt J. K., Math. Z., 1939, **45**, 62), оно гласит: Если $\mathfrak{P}$ — простой дивизор поля $K(x, y)$ и в нем имеется только конечное множество простых дивизоров, имеющих те же числа „пробелов", как и у $\mathfrak{P}$, то $\mathfrak{P}$ называется точкой Вейерштрасса. Если же в $K(x, y)$ имеется бесконечное множество простых дивизоров с распределением „пробелов", как и у $\mathfrak{P}$, то $\mathfrak{P}$ называется обыкновенной точкой поля $K(x, y)$. Настоящая работа содержит теорию точек Вейерштрасса для поля алгебраических функций одного независимого переменного над совершенным полем констант.

В § 1 изложен известный вспомогательный материал о дифференцировании в функциональных полях и обобщение определителя Вронского для полей характеристики $p > 0$. В § 2 содержится теория точек Вейерштрасса поля алгебраических функций над совершенным полем констант. В § 3 дается алгоритм построения базиса для пространства целых дифференциалов в случае циклического расширения $Z$ поля рациональных функций $K(x)$ со следующими условиями для степени расширения:

1) $[Z : K(x)] = p$, где $p \neq 0$ — характеристика совершенного поля констант $K$ и

2) $[Z : K(x)] = n$, при $(n, p) = 1$, или $p = 0$. Предполагается, что $K$ содержит корни $n$-й степени из единицы.

В § 4 исследуются условия, при которых точка $\mathfrak{P}$ абсолютно циклического поля $Z$ над $K(x)$ является точкой Вейерштрасса, при соблюдении условий для степени $[Z : K(x)]$, указанных в § 3. А. В. Дородное

**3849. К теории полиномиальных идеалов над коммутативными кольцами главных идеалов без делителей нуля.** Редеи (Zur Theorie der Polynomideale über kommutativen nullteilerfreien Hauptidealringen. Rédei Ladislaus), Math. Nachr., 1958, **18**, № 1-6, 313—332 (нем.)

Пусть $H$ — коммутативная область целостности с однозначным разложением на множители, $H_k = H[x_1, \ldots, x_k]$ — кольцо многочленов от $k$ неизвестных над $H$. Рассматриваются две следующие задачи: пусть $f_1, \ldots, f_r \in H_k$; при каких условиях найдутся многочлены $u_1, \ldots, u_r \in H_k$, удовлетворяющие соотношению $f_1 u_1 + \ldots + f_r u_r = 1$? Если такие многочлены существуют, то как их найти? В § 2 автор показывает, что оба эти вопроса могут быть, в конце концов, сведены к тривиальному случаю, когда $k = 1$ и $H$ является полем, многократным применением двух почти очевидных теорем, редуцирующих рассмотрение исходных вопросов в кольце $H_k$ к рассмотрению соответствующих вопросов в кольцах $\bar{H}_k$ и $(H/p)_k$, где $\bar{H}$ и $H/p$ суть, соответственно, поле частных $H$ и кольцо вычетов $H$ по простому идеалу, порождаемому неприводимым элементом $p$. В § 3 дается более эффективное решение тех же вопросов в частном случае $k = 1$, $r = 2$ с использованием результанта. Полученные результаты обобщаются в § 4 на случай $k = 1$ и $r \geqslant 3$. § 5 посвящен более детальному изучению случая $k = 1$, $r = 2$. Автор называет высотой пары многочленов $(f_1, f_2)$ наименьшую степень слагаемых в той сумме $f_1 u_1 + f_2 u_2$, которая равна единице. Доказывается, что если произведение степеней $f_1$ и $f_2 \geqslant 2$, то высота $(f_1, f_2) \geqslant (1 + \rho)$ ($-1 +$ степень $f_1 +$ степень $f_2$), где $\rho$ есть число простых множителей результанта $R(f_1, f_2)$. Оценки высоты даются также для случаев, когда произведение степеней $f_1$ и $f_2$ равно 1 и 0. В § 6 приводятся примеры использования полученных результатов в случае, когда $H$ — кольцо целых рациональных чисел, а рассматриваемые многочлены связаны с полиномами деления круга. Доказываются следующие соотношения:

1. Если $F_n(x)$ есть $n$-й полином деления круга, то

$$(F_n(x)) = (F_p(x^{\frac{n}{p}}), \quad F_q(x^{\frac{n}{q}}), \ldots),$$

где $p, q, \ldots$ пробегают все простые делители $n$.

2. Если $G_m(x) = \frac{x^m-1}{x-1}$, $G_n(x) = \frac{x^n-1}{x-1}$, $m, n > 1$, $(m, n) = 1$, то

$$G_m(x)\,u(x) + G_n(x)\,v(x) = 1,$$

где

$$u(x) = \sum_{i=0}^{n-2}\left(\left[\frac{im'}{n}\right] - \left[\frac{(i-1)\,m'}{n}\right] - \left[\frac{-m'}{n}\right] + \left[\frac{-2m'}{n}\right]\right)x^i,$$

$$v(x) = \sum_{i=0}^{m-2}\left(\left[\frac{in'}{m}\right] - \left[\frac{(i-1)n'}{m}\right] - \left[\frac{-n'}{m}\right] + \left[\frac{-2n'}{m}\right]\right)x^i,$$

и $m'$, $n'$ — любые целые числа, удовлетворяющие соотношениям $mm' \equiv 1 \pmod n$, $nn' \equiv 1 \pmod m$.

3. Если $m, n > 1$, $(m, n) = 1$ и $m'$, $n'$ — целые числа, удовлетворяющие соотношению $mm' + nn' = 1$, то

$$\frac{(x^{mn}-1)(x-1)}{(x^m-1)(x^n-1)} = \sum_{i=0}^{mn-1}\left(\left[\frac{im'}{n}\right] + \left[\frac{in'}{m}\right] - \left[\frac{(i-1)\,m'}{n}\right] - \left[\frac{(i-1)n'}{m}\right]\right)x^i,$$

причем все коэффициенты правой части могут принимать только значения 0, $+1$ и $-1$. А. И. Узков

**3850. Свойства неприводимости в модулях, мультипликативная теория, $S$-нормальность. Герендон** (Propriétés d'irréductibilité dans les modules, théorie multiplicative, $S$-normalité. Guérindon Jean), Bull. Soc. math. France, 1957, 85, № 4, 459—520 (франц.)

Основные результаты гл. I — II опубликованы ранее (РЖМат, 1956, 6446, 7194). Гл. 3 посвящена изучению эквивалентностей подмодулей данного модуля, аналогичных артиновской эквивалентности идеалов кольца. Получена характеристика вполне целозамкнутых колец в терминах артиновской эквивалентности. В гл. 4 дается обобщение мультипликативной теории идеалов на случай колец без условия обрыва цепей и с делителями нуля. Пусть $A$ — коммутативное кольцо с единицей, $S$ — мультипликативно замкнутая система его элементов, не содержащая нуля, $N$ — изолированная $S$-компонента нуля в $A$, $A' = A/N$ и $A_S$ — содержащее последнее кольцо (обобщенное) кольцо частных $A$ по $S$. Дробный идеал (естественно определенный) кольца $A$ (в $A_S$) называется $S$-регулярным, если он содержит образ элемента из $S$. Кольцо $A$ называется $S$-нормальным, если каждый (целый) регулярный идеал кольца $A'$ артиновски эквивалентен произведению простых регулярных идеалов. Доказывается следующая теорема: Если $A$ является $S$-нормальным, то совокупность артиновских классов его регулярных идеалов составляет группу. Простые идеалы, входящие в разложения регулярных целых идеалов, являются минимальными в множестве простых идеалов из $A$, пересекающихся с $S$. А. И. Узков

**3851. Несмешанные идеалы. Коэн** (Unmixed ideals. Cohen Irvin S.), Algebr. Geom. Conf. Notes. Univ. Chicago. Chicago, s. a., 22—24 (англ.)

Доказывается, что если в локальном кольце $R$ без делителей нуля миноры порядка $r$ матрицы

$$\begin{pmatrix} u_{11}, \ldots, u_{1s} \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ u_{r1}, \ldots, u_{rs} \end{pmatrix},\quad r \leqslant s,\ u_{ij} \in R,$$

порождают собственный идеал $J$, то ранг минимальных простых делителей этого идеала не превышает $s - r + 1$. Если $R$ регулярно и если хотя бы для одного из минимальных простых делителей $J$ ранг равен $s - r + 1$, то он будет таким же для всех простых идеалов, принадлежащих $J$, т. е. идеал $J$ является несмешанным.

Дается следующее алгебро-геометрическое применение сформулированной теоремы: Пусть $P$ — простая точка алгебраического многообразия $S$. Если $r$-мерное подмногообразие $V$ многообразия $S$ таково, что $(r-1)$-мерные компоненты его многообразия особенностей не проходят через $P$ и если (локально, в точке $P$) $V$ является полным пересечением $S$ и некоторого другого многообразия, то $V$ локально нормально в $P$. А. И. Узков

**3852. Инвариантные веддербарновские факторы. Тафт** (Invariant Wedderburn factors. Taft E. J.), Illinois J. Math., 1957, 1, № 4, 565—573 (англ.)

Пусть $\mathfrak{A}$ — конечномерная (необязательно ассоциативная) алгебра над полем $\Phi$. Диаграмма $0 \to \mathfrak{R} \to \mathfrak{B} \xrightarrow{\sigma} \mathfrak{A} \to 0$ определяет расширение $(\mathfrak{B}, \sigma)$ алгебры $\mathfrak{A}$ с ядром $\mathfrak{R}$. $\mathfrak{A}$ отделима в $\mathfrak{B}$, если $\mathfrak{B}$ содержит подалгебру $\mathfrak{A}'$ такую, что $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}' + \mathfrak{R}$, $\mathfrak{A}' \cong \mathfrak{B}/\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{A}' \cap \mathfrak{R} = \{0\}$. $\mathfrak{A}'$ называется веддербарновским фактором алгебры $\mathfrak{B}$. Алгебра $\mathfrak{A}$ называется отделимой, если она отделима в каждом расширении. Пусть $\mathfrak{G}$ — некоторая группа. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{G}$-модули и $\sigma$ — $\mathfrak{G}$-гомоморфизм, то естественным образом определяются $\mathfrak{G}$-расширение и $\mathfrak{G}$-отделимость. В работе формулируются условия, выделяющие некоторый класс $C$ конечномерных алгебр. Для алгебр из класса $C$ доказывается следующее основное утверждение: Пусть $\mathfrak{A}$-отделимая $\mathfrak{G}$-алгебра, где $\mathfrak{G}$ — конечная группа, порядок которой не делится на характеристику основного поля $\Phi$. Если каждый элемент из $\mathfrak{G}$ индуцирует автоморфизм или антиавтоморфизм в $\mathfrak{A}$ и ее $\mathfrak{G}$-расширениях, то $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{G}$-отделима. Определены, таким образом, условия существования веддербарновских факторов, инвариантных относительно группы операторов рассматриваемой алгебры. В частности, сформулированное утверждение имеет место для классов ассоциативных, альтернативных, йордановых и лиевых алгебр над полем характеристики нуль. В случае йордановых алгебр основная теорема Веддербарна была доказана ранее лишь для нулевой характеристики. Автор переносит ее на йордановы алгебры над полем произвольной характеристики ($\neq 2$), используя частный случай своей теоремы для альтернативных алгебр. Пусть далее $\mathfrak{A}$ — ассоциативная алгебра с инволюцией $a \to a^*$ над полем характеристики нуль, $\mathfrak{A}_1$ — алгебра, получаемая из $\mathfrak{A}$ присоединением единицы (если $\mathfrak{A}$ ее не содержит), $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ — два веддербарновских фактора алгебры $\mathfrak{A}$ такие, что $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'^* = \mathfrak{S}'$.

В последнем разделе работы доказана теорема, из которой следует, что $\mathfrak{S}' = a^*\mathfrak{S}a$, где $a$ — ортогональный элемент: $a^*a = 1 = aa^*$. Связь между всеми веддербарновскими факторами рассматривалась ранее в одной работе А. И. Мальцева (Докл. АН СССР, 1942, 36, 42—45). А. И. Кострикин

**3853. К голоморфной теории колец. Сендрей** (Zur Holomorphentheorie der Ringe. Szendrei J.), Publs math., 1956, 4, № 3-4, 450—454 (нем.)

Продолжение работы Редеи (РЖМат, 1955, 3097). Доказывается, что кольцо $P$ тогда и только тогда обладает единственным и коммутативным голоморфом, когда для любых попарных гомотетизмов $a$ и $b$ кольца $P$ выполнено следующее условие: $aba = aab$.

Отсюда получается, что коммутативное кольцо без делителей нуля обладает единственным и коммутативным голоморфом. А. Сулиньский

**3854. Радикал при расширениях поля. Амицур** (The radical of field extensions. Amitsur S. A.), Bull. Res. Council Israel, 1957, F7, № 1, 1—10 (англ.)

Изучается радикал Джекобсона $J(S)$ кронекеровского произведения $S = R_F$ алгебры $R$ над некоторым полем $C$ и некоторого расширения $F$ этого поля. Доказывается, что в случае сепарабельного (быть может, бесконечного) расширения $J(S) = J(R)_F$, а в случае чисто трансцендентного расширения $J(S) = N_F$, где $N = J(R_F) \cap R$.

Для произвольного трансцендентного расширения $J(S)$ выражается в терминах одного из введенных ранее автором радикалов. Используя эти результаты, автор доказывает, что групповое кольцо группы над несчетным полем без характеристики полупросто в смысле Джекобсона.

А. И. Ширшов

**3855. Заметка о кольцах и идеалах форм. Рис** (A note on form rings and ideals. Rees D.), Mathematika, 1957, **4**, № 7, 51—60 (англ.)

Пусть $A$ — кольцо и $\mathfrak{a}$ — идеал в $A$. Тогда через $R(A, \mathfrak{a})$ автор обозначает кольцо, состоящее из всех конечных сумм вида $\sum_{r=-p}^{q} c_r t^r$, $c_r \in \mathfrak{a}^r$ при $r>0$, $c_r \in A$ при $r \leqslant 0$, а $t$ — неизвестное. Определения операций в $R(A, \mathfrak{a})$ — как для многочленов. Если $\mathfrak{b}$ — любой идеал в $A$, то через $\mathfrak{b}^*$ обозначается изолированная компонента идеала $\mathfrak{b}R(A, \mathfrak{a})$ относительно мультипликативно замкнутой системы отрицательных степеней $t$.

Доказываются предложения:

1. Если $A' = A/\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}/\mathfrak{b}$, то

$$R(A', \mathfrak{a}') \cong R(A, \mathfrak{a})/\mathfrak{b}^*.$$

2. Для любых идеалов $\mathfrak{b}_1$ и $\mathfrak{b}_2$ из $A$ имеет место равенство $(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)^* = \mathfrak{b}_1^* \cap \mathfrak{b}_2^*$.

3. Если $\mathfrak{q}$ — примарный идеал в $A$ и $\mathfrak{p}$ — соответствующий ему простой, то $\mathfrak{q}^*$ и $\mathfrak{p}^*$ являются соответствующими друг другу примарным и простым идеалами кольца $R(A, \mathfrak{a})$, причем длины идеалов $\mathfrak{q}$ и $\mathfrak{q}^*$ равны.

4. Если $Q$ — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, а $\mathfrak{q}$ — примарный идеал, соответствующий $\mathfrak{m}$, то кольцо форм кольца $Q$ относительно $\mathfrak{q}$ изоморфно кольцу вычетов

$$R(Q, \mathfrak{q})/t^{-1}R(Q, \mathfrak{q}).$$

Идеал форм $\bar{\mathfrak{b}}$ любого идеала $\mathfrak{b}$ из $Q$ соответствует при этом изоморфизме идеалу

$$\mathfrak{b}^* + t^{-1}R(Q, \mathfrak{q})/t^{-1}R(Q, \mathfrak{q}).$$

Основной результат — доказательство теоремы: Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал локального кольца $A$ с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ — минимальные простые делители $\mathfrak{a}$, $\mu_i$ — длины соответствующих им изолированных примарных компонент $\mathfrak{a}$, а $\mathfrak{q}$ — примарный идеал, принадлежащий $\mathfrak{m}$. Пусть, далее, $\bar{\mathfrak{a}}$ и $\bar{\mathfrak{p}}_i$ — идеалы форм для идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{p}_i$ относительно $\mathfrak{q}$. Тогда для любого минимального простого делителя $\mathfrak{p}$ идеала $\bar{\mathfrak{a}}$ имеет место соотношение

$$\lambda = \sum \mu_i \lambda_i,$$

где $\lambda$ и $\lambda_i$ суть длины изолированных $\mathfrak{p}$-компонент $\bar{\mathfrak{a}}$ и $\bar{\mathfrak{p}}_i$, причем $\lambda_i$ считается равным нулю, если $\mathfrak{p}$ не является минимальным простым делителем $\bar{\mathfrak{p}}_i$.

Доказательство получается сведением общего случая к рассмотрению локальных колец размерности 1 и использованием соотношения, полученного для таких колец Норткоттом (РЖМат, 1958, 8629). Сведение к одномерному случаю основывается на предложении 4.

Приводится следующая алгебраическо-геометрическая интерпретация основной теоремы: Кратность компоненты $C$ касательного конуса к алгебраическому многообразию $V$ в точке $P$ равна сумме кратностей $C$ как компоненты касательных конусов аналитических ветвей $V$ в точке $P$.

С помощью приведенной основной теоремы устанавливается следующее предложение о кратностях $\mathfrak{m}$-примарных идеалов $\mathfrak{Q}$ локального кольца $Q$ с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$:

Если $Q$ — $d$-мерное локальное кольцо, $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ — все его $d$-мерные простые идеалы и $\mu_i$ — длины соответствующих им примарных компонент нуля, то

$$e(\mathfrak{q}) = \sum \mu_i e(\mathfrak{q} + \mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}_i),$$

где $e(\mathfrak{q})$ — кратность $(\mathfrak{q})$ в $Q$, а $e(\mathfrak{q} + \mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}_i)$ — кратности идеалов $\mathfrak{q} + \mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}_i$ в кольцах $Q/\mathfrak{p}_i$.

Это предложение ранее установлено и использовано Лехом (Lech C., Arkiv. mat., 1957, **3**, № 4, 301—314) при доказательстве обобщенной формулы ассоциативности кратностей.

А. И. Узков

**3856. D-регулярность. Дивинский** (*D*-regularity. Divinsky Nathan), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 1, 62—71 (англ.)

Элемент $x$ кольца $A$ автор называет правым $D$-регулярным, если в $A$ существует такой элемент $y$, что $x = xy$. Свойство элемента $x$ принадлежать правому идеалу $xA$ рассматривалось ранее в работах Бэра и автора. Правый идеал называется правым $D$-регулярным, если каждый его элемент является правым $D$-регулярным. Доказывается, что сумма $M_R$ всех правых $D$-регулярных идеалов является двусторонним правым $D$-регулярным идеалом, который, вообще говоря, не совпадает с аналогично построенным идеалом $M_L$; $M_R(A/M_R) = 0$. Показывается также, что $M_R$ совпадает с суммой всех двусторонних идеалов, являющихся правыми $D$-регулярными идеалами. Пусть $M_\alpha$ — максимальный модулярный правый идеал, т. е. существует такой элемент $x_\alpha \overline{\in} M_\alpha$, что $x_\alpha A \subseteq M_\alpha$, и всякий правый идеал, охватывающий $M_\alpha$, содержит также $x_\alpha$. Тогда $M_R = \bigcap_\alpha M'_\alpha$, где $M'_\alpha$ — наибольший двусторонний идеал, содержащийся в $M_\alpha$. Если $J$ — радикал Джекобсона кольца $A$, то $P_R = J \cap M_R = J(M_R)$, $P_L = J \cap M_L = J(M_L)$, где $P_R$ и $P_L$ — подрадикалы, построенные ранее автором (РЖМат, 1956, 8658). Отсюда следует, что в коммутативных кольцах подрадикал совпадает с радикалом Джекобсона максимального $D$-регулярного идеала $M = M_R = M_L$. Далее рассматриваются случаи, когда $M_R = 0$ и $M_R = A$ при различных условиях обрыва цепей. Наконец, на языке идеалов $M_R$, $M_L$ и $M$ формируются некоторые критерии существования единицы, рассмотренные ранее Бэром (Baer R., Math. Z., 1952, **56**, 1—17).

В. А. Андрунакиевич

**3857. Алгебра дифференцирований произвольной стандартной нуль-алгебры. Гуревич Г. Б.**, Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1957, № 1, 103—120

Изучается алгебра дифференцирований $A$ произвольной стандартной нуль-алгебры $F$ (РЖМат, 1956, 4380) над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Устанавливается базис $A$, т. е. определяются аффиноры, линейной оболочкой которых является алгебра $A$, затем находятся ее веса, весовые векторы, корни и корневые векторы; попутно устанавливается, что центр алгебры $A$ отличен от нуля только в том случае, когда $F$ абелева. Далее, называя для произвольной линейной алгебры весовым такой корневой ее аффинор, соответствующий которому корень равен одному из весов этой алгебры, и весовым идеалом — каждый идеал этой алгебры, являющийся линейной оболочкой некоторых весовых ее аффиноров, автор определяет все весовые аффиноры для $A$ и ее максимальный весовой идеал; последний совпадает с алгеброй внутренних дифференцирований для $F$. Пусть затем $L$ — произвольная линейная алгебра Ли, $A$

и $D$ — ее алгебры дифференцирований и внутренних дифференцирований, а $Z$ и $K$ — центр и максимальный весовой идеал в $A$; автор называет $L$ весоустойчивой, если $K \subset D + Z$. Стандартные нуль-алгебры и полупростые алгебры Ли принадлежат классу весоустойчивых алгебр. В заключение показывается, что с помощью алгебры $A$ можно установить (с некоторой степенью произвола) нумерацию весовых векторов, как элементов $F$.

В. В. Морозов

3858. **Топологии на некоторых полных структурах.** **Ревю** (Topologies sur certains treillis complets. Revuz André), Arch. Math., 1958, **9**, № 5, 342—346 (франц.)

Пусть $\mathfrak{X}$ — топологическое пространство с топологией $\mathfrak{T}$, в котором введено частичное упорядочение. Положительным конусом с вершиной $x \in \mathfrak{X}$ называется множество

$$C_+(x) = \{y;\ y \in \mathfrak{X},\ y \geqslant x\}.$$

Аналогично определяется отрицательный конус $C_-(x)$. В $\mathfrak{X}$ вводится топология $\mathfrak{T}$, определяемая следующим образом: если $\mathfrak{H}(x)$ — фильтр окрестностей $V(x)$ точки $x \in \mathfrak{X}$, то база фильтра $\mathfrak{H}_+(x)$ в топологии $\mathfrak{T}_+$ составляется из всех множеств вида $V(x) \cap C_+(x)$, где $V(x)$ пробегает $\mathfrak{H}(x)$.

Пространство $\mathfrak{X}$ называется пространством $\widetilde{\mathfrak{X}}$, если оно удовлетворяет следующим условиям: 1) $\mathfrak{X}$ — структура; 2) для любого $x \in \mathfrak{X}$ конусы $C_+(x)$ и $C_-(x)$ компактны относительно топологии $\mathfrak{T}$ (отсюда вытекает существование в $\mathfrak{X}$ наибольшего и наименьшего элементов); 3) структурная операция $x \wedge y$ непрерывна относительно топологии $\mathfrak{T}_+$; 4) если $x \in \mathfrak{X}$ — не наибольший элемент, то для любой „правой" окрестности $V_+(x)$ существует такой $y \in V_+(x)$, что $(C_-(y))^0 \subset C_-(x)$ (обозначение: $A^0$ — открытое ядро множества $A$); 5) условия, дуальные по отношению к 3) и 4).

Всякая полная цепь с интервальной топологией — пространство $\widetilde{\mathfrak{X}}$. Произведение любого множества полных цепей — также пространство $\widetilde{\mathfrak{X}}$ (упорядочение вводится в произведении „покоординатно", см. Г. Биркгоф, Теория структур, М., Изд-во ин. лит., 1952, стр. 25). В работе доказывается следующая теорема: Для того чтобы подструктура $T$ произведения цепей $C$ была пространством $\widetilde{\mathfrak{X}}$ при упорядочении и топологии, индуцированных в $T$ из $C$, необходимо и достаточно, чтобы $T$ было полной подструктурой в $C$, т. е. чтобы верхняя и нижняя грани существовали в $T$ для любого подмножества $E \subset T$ и совпадали с соответствующими гранями подмножества $E$ в $C$.

Работа примыкает к статьям автора и Пока (РЖМат, 1957, 7184 и 8028).

В. З. Вулих

3859. **Дистрибутивность и нормальные пополнения булевых алгебр.** **Пирс** (Distributivity and the normal completion of Boolean algebras. Pierce R. S.), Pacif. J. Math., 1958, **8**, № 1, 133—140 (англ.)

Пусть $\alpha$ и $\beta$ — произвольные кардинальные числа. Булева алгебра $B$ называется $(\alpha, \beta)$-дистрибутивной, если для любых таких систем индексов $S$ и $T$, что $\overline{\overline{S}} \leqslant \alpha$, $\overline{\overline{T}} \leqslant \beta$, справедливо тождество

$$\wedge_{\sigma \in S} \vee_{\tau \in T} b_{\sigma\tau} = \vee_{\varphi \in F} \wedge_{\sigma \in S} b_{\sigma\varphi(\sigma)},$$

где $F = T^S$. При $\alpha = \beta$ это понятие превращается в понятие $\alpha$-дистрибутивности. Если указанный дистрибутивный закон справедлив при любом $\beta$, то $\mathfrak{B}$ называется $(\alpha, \infty)$-дистрибутивной. Говорят, что булева алгебра $\overline{B}$ регулярно вложена в булеву алгебру $B$, если $\overline{B}$ есть подалгебра булевой алгебры $B$ и существующие в $\overline{B}$ точные верхние грани совпадают с соответствующими точными верхними гранями в $B$. Нормальным $\beta$-пополнением $B^\beta$ булевой алгебры $B$ называется наименьшая $\beta$-полная подалгебра нормального пополнения (т. е. пополнения при помощи сечений) алгебры $B$, содержащая алгебру $B$.

Доказывается, что всякая $\alpha$-дистрибутивная булева алгебра может быть регулярно вложена в $\alpha$-полную и $\alpha$-дистрибутивную булеву алгебру.

Далее рассматривается ряд свойств, близких к $\alpha$-полноте и $(\alpha, \beta)$-дистрибутивности булевых алгебр. Из установленных зависимостей между ними выводятся следствия. Например: 1) если нормальное $\beta$-пополнение булевой алгебры $B$ — $\alpha$-дистрибутивно, где $\beta \geqslant 2^\alpha$, то $B$ — $(\alpha, 2^\alpha)$-дистрибутивна; 2) нормальное пополнение булевой алгебры $B$, тогда и только тогда $(\alpha, \infty)$-дистрибутивно, когда алгебра $B$ $(\alpha, \infty)$-дистрибутивна.

В заключение приводится пример $\alpha$-тела множеств, нормальное пополнение которого не является $(\alpha, 2^\alpha)$-дистрибутивным и, следовательно, $\alpha$-дистрибутивным.

И. В. Стеллецкий

3860. **Дуальная ньюманова алгебра.** **Рой** (Dual Newman algebra. Roy Kamalaranjan), Bull. Calcutta Math. Soc., 1957, **49**, № 4, 177—187 (англ.)

Любая алгебра $D$ с двумя бинарными операциями, удовлетворяющая постулатам ньюмановой алгебры, двойственным относительно этих операций, называется дуальной ньюмановой алгеброй. Содержание данной работы составляет изучение свойств этой дуальной ньюмановой алгебры, которые аналогичны свойствам ньюмановой алгебры (Биркгоф, Теория структур, М., Изд-во ин. лит., 1952 г., стр. 219 — 223). Алгебра $D$ есть прямое произведение булевой алгебры $B$ и кольцоида $E$, удовлетворяющего двойственным законам дистрибутивности. Интересно отметить, что кольцоид $E$ относительно умножения является абелевой группой, в которой каждый элемент имеет порядок 2.

Далее строится система $\bigtriangledown$ пар $[b, c]$, где $b \in B$, $e \in E$, на которой определяются покомпонентные операции сложения и умножения.

Доказывается, что $\bigtriangledown$ есть дуальная ньюманова алгебра и алгебра $D$ с точностью до изоморфизма определена как прямое объединение $B$ и $E$. В заключение автором приведены таблицы сложения и умножения для дуальной ньюмановой алгебры, являющейся аддитивно ассоциативной, и аналогичные таблицы для неассоциативной дуальной ньюмановой алгебры.

Наконец, доказывается, что кольцоид $E$ (который является дуальной ньюмановой алгеброй с соотношением $e^2 = 1$ для каждого $e \in E$) может быть преобразован в решетку (trellis), если он неассоциативен по сложению. (Для этого полагают $x \bigcirc y = xy\,(x + y)$). Если же сложение в кольцоиде $E$ ассоциативно, то этим способом он может быть преобразован в булеву алгебру.

Е. И. Пятницкая, М. Гриндлингер

3861. **О независимых элементах в конечно порожденных алгебрах.** **Сверчковский** (On independent elements in finitely generated algebras. Swierczkowski S.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 12, 749—752 (англ.; рез. русск.)

Множество $N$ элементов алгебры $A$ называется множеством независимых элементов, если для любой последовательности $a_1, \ldots, a_n$ элементов из $N$ из $g(a_1, \ldots, a_n) = h(a_1, \ldots, a_n)$ следует тождественность полиномов $g$ и $h$ (РЖМат, 1959, 9722).

Устанавливается ряд теорем о независимых элементах в конечно-порожденных алгебрах.

Теорема 1. Если в конечной алгебре $A$, порожденной $n$ элементами, имеется $n$ независимых элементов, то $n$ элементов тогда и только тогда порождают $A$, когда они независимы.

Отсюда следует, в частности, что алгебра, порожденная $n$ элементами и имеющая $n + 1$ независимых элементов, бесконечна.

Теорема 2. Если алгебра $A$, порожденная $n$ независимыми элементами, имеет $n+1$ независимых элементов, то для любого $m \geqslant n$ существует $m$ независимых элементов, порождающих $A$.

Теорема 3. Если алгебра, порождаемая $n$ элементами, имеет $n+1$ независимых элементов (например, свободная группа с $\geqslant 2$ образующими), то она имеет бесконечное множество независимых элементов.

С. Р. Когаловский

## АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СХЕМ СВЯЗИ И УПРАВЛЕНИЯ

**3862. О синтезе схем с помощью линейных преобразований переменных. Нечипорук Э. И.,** Докл. АН СССР, 1958, 123, № 4, 610—612

Рассматривается задача синтеза схемы, реализующей булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Пусть $x=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, а $L=\{l_t\}$ — некоторое множество неособенных преобразований переменных $x=l_t y$. Схема, реализующая функцию $f(x)$, может быть получена из схемы для $h(x)$, если $f(x)=f(l_t y)=h(y)$. Задачу упрощения схемы для $f(x)$ можно поставить следующим образом: найти преобразование $l_t$, переводящее функцию $f(x)$ в функцию, реализуемую наиболее просто. Функция $f(x)$ может быть представлена в виде

$$f(x) \sim \mathrm{U}_{i=1}^{m} p_t, \qquad (1)$$

где $p_t$ — набор вершин $n$-мерного единичного куба или набор векторов, соответствующих этим вершинам; $f(p_t)=1$. Набор вершин (1) можно записать в виде матрицы, столбцы которой суть $p_t$. Для нахождения преобразований, упрощающих схему в случае любого числа переменных, каждой строке (1) сопоставляется характеристика — пара чисел, первое из которых есть число нулей в строке, а второе — число единиц. Считается, что характеристика $[m_1, k_1]$ лучше характеристики $[m_2, k_2]$, если $|m_1-k_1|>|m_2-k_2|$. Затем таблица умножается слева на матрицу $T_1=\{a_{lk}\}$ вида $[n \times n]$, $a_{lk}=0$ при $i>k$, $a_{ll}=1$. Строки матрицы подбираются сверху вниз, чтобы характеристика каждой строки улучшилась. При подборе каждой строки в таблице для $f(x)$ изменяется только одна строка, соответствующая подбираемой строке в матрице. Далее преобразование продолжается с помощью нижней прямоугольной матрицы $T_2$. При этом некоторые $x_t$ заменяются на $\bar{x}_t$ — так, чтобы в каждой строке доминировали нули. Получается $f(T_2 T_1 x+a)=\varphi(x)$. В таблице $\varphi(x)$ больше нулей, поэтому описанный процесс в среднем сдвигает векторы $f(x)$ к нулевому вектору, и $f(x)$ приближается к монотонной симметрической функции. Схема упрощается за счет появления инвариантов у $\varphi'(x)$ таких, что $\varphi'(x) \to \varphi(x)$. Библ. 8 назв. А. В. Шилейко

**3863. О групповой инвариантности булевых функций. Поваров Г. Н.,** An. ştiinţ. Univ. Iaşi, 1958, Sec. 1, 4, № 1, 39—44 (русск.; рез. рум., франц.)

В настоящей статье, примыкающей к другой статье (РЖМат, 1957, 7720), рассматривается группа $\mathfrak{T}_n$ преобразований однотипности булевых функций $n$ переменных.

Вводится понятие группы $\mathfrak{F}$ инерции функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: группой инерции функции $f(x_1 x_2, \ldots, x_n)$ называется максимальная подгруппа $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{T}_n$, переводящая эту функцию в себя.

Совокупность булевых функций, инвариантных относительно преобразований из группы $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{T}_n$, называется областью инвариантности группы $\mathfrak{G}$ и обозначается $D(\mathfrak{G})$.

Множество областей инвариантности булевых функций $n$ переменных есть структура относительно теоретико-множественного включения, дуально гомоморфная структуре подгрупп группы $\mathfrak{T}_n$. Каждая область инвариантности $D(\mathfrak{G})$ есть булева алгебра. Вводится понятие блока над $\mathfrak{G}$. Блоком над $\mathfrak{G}$ называется сумма конституентов единицы, составляющих область транзитивности над $\mathfrak{G}$. Область инвариантности группы $\mathfrak{G}$ содержит $2^{M(\mathfrak{G})}$ функций, где $M(\mathfrak{G})$ — число блоков над $\mathfrak{G}$. По аналогии с типом булевой функции определяется тип областей инвариантности. Однотипные области инвариантности равномощны. Исследуются некоторые типы областей инвариантности. Введенные понятия используются в изучении симметрических и однотипных с ними булевых функций. Ю. Л. Сагалович

**3864. О симметрии булевых функций. Поваров Г. Н.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 88

**3865. Замечание о минимизации переключательных функций. Уорфилд** (A note on the reduction of switching functions. Warfield John N.), IRE Trans. Electronic Comput., 1958, 7, № 2, 180—181 (англ.)

Описано усовершенствование одного способа минимизации функций алгебры логики. Автор предлагает, используя результаты Урбано и Мюллера (РЖМат, 1958, 1060) и Гарриса (РЖМат, 1958, 2783), комбинировать переменные в группы по четыре, что позволяет применить наглядный метод карт Вич — Карно (РЖМат, 1955, 3442). Приводится пример такой минимизации.

Ю. Л. Сагалович

**3866. Экономия реле в логических машинах. Кальмар Л.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 236

**3867. Математико-логическое исследование синтеза контактных схем с одним входом и $k$ выходами. Поваров Г. Н.** В сб.: Логические исследования. М., АН СССР, 1959, 379—405

Доклад на Международном симпозиуме по теории переключений, происходившем 2—5 апреля 1957 г. в Вычислительной лаборатории Гарвардского университета. Развернутое изложение результатов автора (РЖМат, 1955, 458, 459, 2913, 4012; 1957, 3857, 3858, 7720; 1958, 7557). Ю. Л. Сагалович

**3868. Графический метод синтеза контактных многополюсников. Поваров, Рогинский** (Графічний метод синтезу контактних багатополюсників. Поваров Г. М., Рогінський В. М.), Автоматика (Київ), 1958, № 3, 84—91 (укр.; рез. русск., англ.)

Предлагается чисто графический метод синтеза контактных $(1, k)$-полюсников, полученный из метода каскадов (РЖМат, 1955, 4012). Предлагаемый метод применим также для синтеза некоторых $(p, k)$-полюсников. Полученные схемы могут иметь мостиковые соединения и не быть плоскими. Изменяя нумерацию реле, можно найти разные варианты схемы. Метод допускает машинизацию. Г. Н. Поваров

**3869. Графический метод построения контактных многополюсных схем. Рогинский В. Н.** В сб.: Пробл. передачи информ. Вып. 1. М., АН СССР, 1959, 5—40

Подробно излагается графический метод синтеза контактных многополюсников, предложенный Г. Н. Поваровым (РЖМат, 1958, 4557) для синтеза лишь симметрических и квазисимметрических контактных схем. Обнаружив тот факт, что всякая контактная схема может считаться квазисимметрической, если реле с номерами $i=1, 2, \ldots, n$ приписать веса $2^{i-1}$, а рабочими числами контактной цепи считать номера состояний, в которых эта цепь должна или может быть замкнута, автор показал, что графический метод применим для синтеза контактных многополюсников, соответствующих совокупности любых булевых функций. В более кратком виде этот метод был изложен ранее отдельно авто-

ром (РЖЭ, 1958, 33778) и совместно с Г. Н. Поваровым (реф. 3868). В. И. Шестаков

**3870. Машина для синтеза контактных схем. Архангельская А. А., Лазарев В. Г., Рогинский В. Н.** В сб.: Пробл. передачи информ. Вып. 1. М., АН СССР, 1959, 41—52

Кратко описаны принцип действия и скелетная схема машины для построения контактных $(1, \kappa)$-полюсников. Работа машины основана на использовании графического метода синтеза контактных многополюсников (реф. 3869). Машина снабжена световым табло, на котором светящимися лампочками изображается синтезируемая контактная схема. Сообщается, что были построены и испытаны макет и демонстрационный образец машины для синтеза контактных $(1,2)$-полюсников из контактов двух и четырех реле соответственно. Указывается, что в настоящее время ведутся работы по созданию образца машины, предназначенной для исследовательских и проектных работ по синтезу контактных схем. В. И. Шестаков

**3871. Гидравлические переключательные системы. Часть 1. Булевы функции — действенное средство синтеза сложных гидравлических систем. Ронан** (Hydraulic switching circuits. Part 1. AND, OR, and NOT logic functions: efficient design tools for synthesizing complex hydraulic circuits. Ronan Harold R., Jr), Mach. Design, 1959, **31**, № 4, 140—145 (англ.)

Излагается применение двузначной булевой алгебры для проектирования гидравлических систем управления. Значениям 0 и 1 двоичных переменных, обозначающих клапаны, одно-однозначно соответствуют открытый и закрытый клапан соответственно. Обычно закрытые клапаны $A$ и $B$, соединенные последовательно, образуют И-систему ($A$ и $B$), обозначаемую $A+B$. Те же клапаны, соединенные параллельно, образуют ИЛИ-систему ($A$ или $B$), обозначаемую $A \cdot B$. Символом $A'$ обозначается кран, действующий противоположно крану $A$. В. П. Гончаров

**3872. Об анализе потенциально-импульсных схем при помощи специальных операторов перехода. Таланцев А. Д.**, Докл. АН СССР, 1959, **127**, № 2, 320—323

Излагается новый метод анализа и синтеза потенциально-импульсных схем. Рассматриваются лишь однородные потенциально-импульсные схемы, т. е. такие схемы, у которых все входные шины описываются потенциальными переменными $X(t)$, а все выходные — импульсными переменными $Y(t)$. Переменные $X(t)$ и $Y(t)$ могут принимать лишь два значения: 0 и 1. Переход переменных $Z(t)$, могущих принимать лишь два значения 0 и 1, от одного из этих значений к другому характеризуется операторами перехода $d$ и $D$, определяемыми следующим образом: $dZ(t)=1$, если в момент времени $t$ происходит переход от $Z(t)=1$ к $Z(t)=0$ и $dZ(t)=0$, если такой переход отсутствует; $DZ(t)=dZ(t) \vee d\overline{Z}(t)$, где $\vee$ — знак дизъюнкции, а $\overline{Z}$ — отрицание $Z$.

Отмечены (без доказательств) основные свойства операторов $d$ и $D$ и, в частности, приведено дизъюнктивное разложение оператора $dF$ от любой булевой функции $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. В случае несовпадения переходов, т. е. когда в любой момент времени может изменяться не более чем одна из переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$, дизъюнктивные разложения $dF$ и $DF$ упрощаются и принимают следующий вид:

$$dF = \bigvee_{p=0}^{1} \bigvee_{i=0}^{n} F\binom{X_t}{p}\overline{F}\binom{X_t}{p} dX_i^p,$$

$$DF = \bigvee_{i=0}^{n} \left(F\binom{X_t}{1} F\binom{X_t}{0} \vee \overline{F}\binom{X_t}{1} F\binom{X_t}{0}\right) DX_t.$$

В качестве примера, иллюстрирующего теорию, рассмотрена задача распознавания направления движения так называемой квантованной шкалы относительно неподвижных воспринимающих органов. В. И. Шестаков

**3873. Об анализе и синтезе некоторых электрических схем при помощи специальных логических операторов. Таланцев А. Д.**, Автоматика и телемеханика, 1959, **20**, № 7, 898—907 (рез. англ.)

Более подробное изложение метода алгебраического описания потенциально-импульсных схем, предложенного автором ранее (реф. 3872).

Дополнительно рассматриваются вопросы осуществления преобразования потенциальной переменной величины в импульсную посредством дифференцирующих цепей типа RC и об описании этого преобразования посредством операций булевой алгебры и оператора задержки $\tau$, определяемого равенством

$$\tau X(t) = X(t-\tau).$$

Буква $\tau$ используется здесь одновременно и для обозначения времени запаздывания сигнала $X(t)$ и в качестве оператора задержки действующего на функцию $X(t)$. Выбирая величину $\tau$ достаточно малой, но не равной 0, можно положить $dX(t) = \overline{X}(t) \,\&\, \tau X(t)$, где $\&$ — знак конъюнкции, т. е. можно выразить оператор перехода $d$ через оператор задержки. Отмечается, что подобный способ преобразования, называемый „цифровым дифференцированием", используется для получения импульса переноса в счетных схемах, построенных на динамических элементах.

Дополнительно рассматривается также вопрос об „интегрировании" потенциально-импульсных переменных, т. е. об отыскании функции $F(t)$ по заданной функции $Y(t) = dF(t)$. В. И. Шестаков

**3874. Приложения трехзначной логики к автоматическим механизмам. Мойсил Г.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, **4**, М., АН СССР, 1959, 236

**3875. О теории нейронных сетей. Ригер** (O teorii neuronových sítí. Rieger Ladislav), Aplikace mat., 1958, **3**, № 6, 483 (чешск.)

**3876. Новая операция для анализа последовательно-параллельных схем. Эриксон** (A new operation for analyzing seriesparalled networks. Erickson Kent E.), IRE Trans. Circuit Theory, 1959, **6**, № 1, 124—126, 3 (англ.)

Излагаются основные свойства операции $A * B$, называемой автором приведенной суммой (reduced sum) $A$ и $B$ и определяемой равенством $A * B = AB/(A+B)$, где $A$ и $B$ — любые конечные комплексные числа. Используется также операция $A \otimes B$, определяемая равенством $A \otimes B = A * (-B)$. Доказаны теоремы:

I. Всякое выражение, содержащее только операции $\times$ (умножение), $+$ и $*$, может быть преобразовано в обратное ему, если каждую величину в выражении заменить обратной ей и обменять взаимно все знаки $+$ и $*$ (Операции: $\div$ (деление), $-$ и $\otimes$ рассматриваются как частные случаи операций $+$ и $*$).

II. Из $A * B = C$ следует $A = C \otimes B$.

Из теоремы I следует, что если $A$, $B$, $C$, $D$ — вещественные числа, то равенство $A * iB = C * iD$ влечет равенства $A = C$ и $B = D$.

В качестве иллюстрации применения теоремы I решается уравнение $\mathrm{Re}^{i\varphi} = r_1 e^{i\varphi_1} * r_2 e^{i\varphi_2}$ относительно $R$. Решение имеет вид: $R^2 = r_1^2 * r_2^2 * {}^1\!/_2 r_1 r_2 \sec(\varphi_1 - \varphi_2)$.

Операции $+$ и $*$ используются для алгебраической записи структуры последовательно-параллельных схем. Последовательное и параллельное соединения двухполюсников с импедансами $Z_1$ и $Z_2$ и адмиттансами $Y_1$ и $Y_2$ записываются соответственно посредством выражений $Z_1 + Z_2$ и $Z_1 * Z_2$ или выражений $Y_1 * Y_2$ и $Y_1 + Y_2$. Рассмотрены два примера применения теорем I и II

при решении электротехнических задач. В примере I используется теорема I для определения импеданса $Z_0 = R_0 + iX_0$, при котором мост Уитсона с плечами

$$(Z_0 + R_1) * iX_1,\ R_2 * iX_2,\ R_3 * iX_3,\ R_4 + iX_4$$

будет уравновешен. В примере II теорема II используется для определения импеданса $Z_0$, удовлетворяющего уравнению

$$(((Z_0 + Z_4) * Z_3) + Z_2) * Z_1 = Z.$$

Отмечается, что использование операции * весьма облегчает программирование решений электротехнических задач на цифровых вычислительных машинах.

Примечание референта. Операция $A * B$ совпадает с операцией гармонического сложения $A \cdot B$, основные алгебраические свойства которой были рассмотрены референтом. (Ж. техн. физики, 1941, **11**, № 6, 532—539). В. И. Шестаков

**3877. Диакоптика — решение больших систем по частям. I. Топология анализа по частям. Крон** (Diakoptics—the piecewise solution of large—scale systems. I. Topology of piecewise analysis. Kron Gabriel), Electr. J., 1957, **159**, № 1, 27—34 (англ.)

Излагается часть предложенной автором методики решения больших систем физических и технических уравнений по частям, названной им «диакоптикой».

**3878. Диакоптика — решение больших систем по частям. II. Ортогональные схемы. Крон** (Diakoptics — the piecewise solution of large scale systems. II. Orthogonal networks. Kron Gabriel), Electr. J., 1957, **159**, № 6, 385—394 (англ.)

**3879. Диакоптика — решение больших систем по частям. III. Решение по частям схем диффузионного типа. Крон** (Diakoptics — the piecewise solution of large-scale systems. III. Piecewise solution of diffusion-type networks. Kron Gabriel), Electr. J., 1957, **159**, № 11, 745—753 (англ.)

**3880. Диакоптика — решение больших систем по частям. IV. Топология решения по частям. Крон** (Diakoptics — the piecewise solution of large-scale systems. IV. Topology of piecewise solution. Kron Gabriel), Electr. J., 1957, **159**, № 15, 1041—1049 (англ.)

**3881. Диакоптика — решение больших систем по частям. VI. Оптимизация по частям в линейном программировании. Крон** (Diakoptics — the piecewise solution of large-scale systems. VI. Piecewise optimisation of linear programming. Kron Gabriel), Electr. J., 1957, **159**, № 24, 1713—1721 (англ.)

Часть V, см. РЖМат, 1959, 7263.

**3882. Диакоптика — метод решения больших систем по частям. VII. Приложение топологии к механическим структурам. Крон** (Diakoptics. The piecewise solution of large-scale systems. VII. Generalisation of topology to mechanical structures. Kron Gabriel), Electr. J., 1958, **160**, № 2, 93—98 (англ.)

Проводится обобщение понятий комбинаторной топологии на случай механических систем. При этом существенным шагом является переход от скалярных величин к соответствующим $n$-мерным тензорам. Обобщение основывается на следующих постулатах:

1) Уравнение сложной системы, состоящей из нескольких элементов, каждый с $n$ степенями свободы, имеет такой же вид, как и уравнение простой системы с одной (или небольшим числом) степенью свободы, если каждый скалярный символ в последнем уравнении (или системе уравнений) заменить соответствующим тензором.

2) Топологическая модель сложной системы из элементов, имеющих каждый $n$ степеней свободы, такова же, как и топологическая модель простой системы, состоящей из элементов с одной степенью свободы, если каждую «катушку» (coil) в последней модели заменить соответствующей $n$-элементной системой передачи, т. е. тензорной «катушкой».

Приводятся примеры, показывающие упрощение анализа сложных систем с помощью указанного обобщения. Указывается на возможность постепенно углублять обобщенное описание сложных систем: несколько тензорных элементов можно заменить одним сложным тензорным элементом и т. д. Ф. П. Тарасенко

**3883. Диакоптика — решение больших систем по частям. VIII. Стандартные элементы упругих структур. Крон** (Diakoptics — the piecewise solution of large-scale systems. VIII. Building blocks of elastic structures. Kron Gabriel), Electr. J., 1958, **160**, № 6, 399—407 (англ.)

**3884. Диакоптика — решение больших систем по частям. IX. Направляющие диски турбин. Крон** (Diakoptics — the piecewise solution of large-scale systems. IX. Turbine split-diaphragms. Kron Gabriel), Electr. J., 1958, **160**, № 10, 705—711 (англ.)

**3885. Диакоптика — решение больших систем по частям. X. Деление по частям нелинейных пластических структур. Крон** (Diakoptics. The piecewise solution of large-scale systems. X. Piecewise solution of nonlinear plastic structures. Kron Gabriel), Electr. J., 1958, **160**, № 15, 1141—1147 (англ.)

**3886. Диакоптика — решение больших систем по частям. XI. Топологические модели упругого поля. Крон** (Diakoptics. The piecewise solution of large-scale systems. XI. Topological models of the elastic field. Kron Gabriel), Electr. J., 1958, **160**, № 19, 1435—1444 (англ.)

**3887. Диакоптика — решение больших систем по частям. XII. Решение по частям контурных схем. Крон** (Diakoptics. The piecewise solution of large-scale systems. XII. Piecewise solution of mesh networks. Kron Gabriel), Electr. J., 1958, **160**, № 23, 1711—1718 (англ.)

**3888. Диакоптика — решение больших систем по частям. XIII. Решение по частям схем пуассонова типа. Крон** (Diacoptics. The piecewise solution of large-scale systems. XIII — Piecewise solution of Poisson-type networks. Kron Gabriel), Electr. J., 1958, **161**, № 1, 25.—31 (англ.)

**3889. Диакоптика — решение больших систем по частям. XIV. Пирамиды решений сверхсистем. Крон** (Diakoptics — the piecewise solution of large-scale systems. XIV. Pyramiding supersystem solutions. Kron Gabriel), Electr. J., 1958, **161**, № 5, 289—294 (англ.)

**3890. Диакоптика — решение больших систем по частям. XV. Аналитическое решение по частям. Крон** (Diakoptics. The piecewise solution of large-scale systems. XV. Piecewise analytical solution. Kron Gabriel), Electr. J., 1958, **161**, № 11, 701—705 (англ.)

**3891. Диакоптика — решение больших систем по частям. XVI. Особенные подразделения. Крон** (Diakoptics — the piecewise solution of large-scale systems XVI. Singular subdivisions. Kron Gabriel), Electr. J., 1958, **161**, № 16, 1071—1077 (англ.)

**3892. Диакоптика — решение больших систем по частям. XVII. Решение по частям задач о собственных значениях. Крон** (Diakoptics. The piecewise solution of large-scale systems. XVII. Piecewise solution of

eigenvalue problems. Kron Gabriel), Electr. J., 1958, **161**, № 20, 1371—1377 (англ.)

**3893. Диакоптика — решение больших систем по частям. XVIII. Решение по частям задач, изменяющихся во времени. Крон** (Diakoptics—the piecewise solution of large-scale systems. XVIII. Piecewise solution of time-varying problems. Kron Gabriel), Electr. J., 1958, **161**, № 25, 1727—1732 (англ.)

---

**См. также:** 3748—3750, 3752, 3753, 3759, 3770, 3771, 3935, 3938, 4217, 4266, 4268, 4278, 4279, 4282, 4513.

## ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *С. М. Никольский, П. С. Новиков, С. И. Адян, А. А. Конюшков*

**3894. Об измеримости множеств. Эглстон** (On measureless sets. Eggleston H. G.), Proc. London Math. Soc., 1958, **8**, № 32, 631—640 (англ.)

Рассматривается $s$-размерная мера Хаусдорфа множеств в евклидовом пространстве $R^n$. Доказывается, что каждое множество из $R^n$, имеющее размерность по Хаусдорфу, равную $s$, содержит измеримое в смысле Хаусдорфа подмножество той же размерности.

В частности, при $n=1$ доказывается теорема: Пусть $X$ — подмножество единичного интервала $I$, имеющее конечную положительную $s$-размерную меру по Хаусдорфу, $0<s\leqslant 1$. Тогда существуют подмножество $X_1\subset X$, подмножество $Y\subset I$ и взаимно однозначное отображение $f$ множества $X_1$ на $Y$, $y=f(x)$ такие, что $Y$ содержит все $I$, кроме, самое большее, счетного подмножества. Подмножеству $Y$ размерности 1 соответствует подмножество $X_1$ размерности $s$. Измеримому подмножеству $Y$ всегда соответствует измеримое подмножество $X_1$ и наоборот. Р. С. Гутер

**3895. Об интеграле Марцинкевича. Уотерман** (On an integral of Marcinkiewicz. Waterman Daniel), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **91**, № 1, 129—138 (англ.)

Для произвольной функции $f(x)\in L_p(-\infty,\infty)$, $p>1$, строится функция

$$\mu(x)=\left\{\int_0^\infty t^{-3}[F(x+t)+F(x-t)-2F(x)]^2\,dt\right\}^{1/2},$$

где $F(x)$ — первообразная для $f(x)$. Доказывается, что $A_p\|f\|_p\leqslant\|\mu\|_p\leqslant B_p\|f\|_p$, где постоянные $A_p$ и $B_p$ не зависят от функции $f(x)$. Доказательство проводится методами комплексного переменного и по идеям близко к доказательству аналогичного факта в периодическом случае в работе Зигмунда (Zygmund A., Trans. Amer. Math. Soc., 1944, **55**, 170—204). О. В. Бесов

**3896. Замечание об условиях непрерывности. Кенеди** (A remark on continuity conditions. Kennedy P. B.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 2, 203—204 (англ.)

Пусть $E$ — некоторое множество на $(0, 1)$ и $\omega(t)$ — положительная монотонно возрастающая в $(0, 1)$ функция, для которой $\lim\limits_{t\to 0}\omega(t)=0$. Существует функция $f(x)$, заданная на $(0, 1)$, разрывная в каждой точке дополнения к множеству $E$ и такая, что при любом $x\in E$ и для всех $h$, для которых $x+h\in(0,1)$,

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant\omega(|h|).$$

А. Ф. Тиман

**3897. О теореме Витали. Сикорский** (O twierdzeniu Vitaliego. Sikorski R.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1956, Ser. I, **2**, № 1, 146—151 (польск.; рез. русск., англ.)

Автор переносит теорему Витали и теорему о дифференцируемости монотонной функции на некоторые меры точечных множеств на прямой, отличные от меры Лебега.

В работе предполагается, что мера $\mu$ (счетно-аддитивная неотрицательная функция множеств) удовлетворяет условиям: 1) $\mu$ определена в счетно-аддитивном теле $\mathfrak{M}$ множеств действительных чисел, содержащем все борелевские множества; 2) множество $A\in\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда существуют такие борелевские множества $A_1$ и $A_2$, что $A_1\subset A$, $A-A_1\subset A_2$ и $\mu(A_2)=0$; 3) $\mu(A)<\infty$ для каждого ограниченного множества $A\in\mathfrak{M}$.

Теорема I. Если семейство $\mathfrak{P}$ замкнутых интервалов покрывает в смысле Витали ограниченное множество $E$ действительных чисел, то существует такая счетная или конечная последовательность интервалов $P_n\subset\mathfrak{P}$, что $\mu(E-\sum_n P_n)=0$.

Теорема II. В условиях теоремы I для каждого $\eta>0$ существует конечная последовательность интервалов $P_n\in\mathfrak{P}$, для которой $\sum_{n=1}^{p}\mu(P_n)-\eta<\mu_e(E)<\mu_e(E\sum_{n=1}^{p}P_n)+\eta$ ($\mu_e(E)$, означающая $\inf_{E\subset A\in\mathfrak{M}}\mu(A)$, есть функция множества, определенная для всех множеств; она является внешней мерой, удовлетворяющей условиям Каратеодори).

Теорема III. Пусть $\varphi$ — функция ограниченной вариации, непрерывная в каждой точке $x_0$, в которой $\mu((x_0))>0$. Производная функции $\varphi$ относительно меры $\mu$ существует почти всюду по $\mu$ (т. е. $\mu$-мера множества тех точек, в которых производная не существует, равна нулю).

Производная $y_0$ функции $\varphi$ в точке $x_0$ относительно меры $\mu$ определяется так: для каждого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что если $P=[a, b]$ удовлетворяет условиям $0<b-a<\delta$, $a\leqslant x_0\leqslant b$, то

$$\left|\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\mu(P)}-y_0\right|<\varepsilon.$$

Доказательства аналогичны доказательствам Банаха для меры Лебега, но требуется существенная модификация условий, касающихся меры интервалов, равных нулю, или, точнее, одноточечных множеств $(x)$ таких, что $\mu((x))>0$. В тексте имеются мелкие недостатки; например, в утверждении теоремы I не указано, что интервалы $P_n$ не пересекаются, хотя это следует из их построения и является существенным условием в теореме Витали (не требуя, чтобы интервалы $P_n$ не пересекались, можно проще доказать, что $E-\sum_n P_n=0$, чем это делает автор в лемме (11)). В доказательстве недостает ссылки на то, что отказ от предположения $\mu_e(B)>0$ ведет к противоречию. В построении интервалов $P_n$ отсутствует требование того, что множество $PE$ не пусто. Однако заполнение пробелов не требует большого труда. Z. Zahorski

**3898. Достаточное условие для дифференцируемости некоторых классов функций. Хейс** (A sufficient con-

dition for the differentiation of certain classes of set functions. Hayes Charees A., Jr), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958, **54**, № 3, 346—353 (англ.)

Рассматривается дифференцируемость функции $\psi$ из некоторого класса функций относительно другой фиксированной функции $\varphi$. Ранее (РЖМат, 1957, 2976) автор дал условие, необходимое и достаточное для дифференцируемости данной меры $\psi$ относительно $\varphi$. В реферируемой работе формулируется одно из таких условий, которое обеспечивает дифференцируемость целого класса функций. Необходимость условия не доказывается, но на примере показано, что результаты не могут быть усилены. Пусть $S$ — данное метрическое пространство и $\mathfrak{B}$ — семейство борелевских подмножеств $S$. Если $\mathfrak{F}$ — семейство подмножеств $S$ и $x \in S$, то через $P_{\mathfrak{F}}(x)$ обозначается число элементов $\mathfrak{F}$, которым принадлежит $x$. Пусть $U\mathfrak{F}$ — обычное объединение всех подмножеств, которые входят в $\mathfrak{F}$, и пусть $\theta\mathfrak{F}$ обозначает подмножество $U\mathfrak{F}$, каждая точка которого принадлежит более чем одному элементу $\mathfrak{F}$. Тогда $U\mathfrak{F} = \{x : P_{\mathfrak{F}}(x) \geqslant 1\}$ и $\theta\mathfrak{F} = \{x : P_{\mathfrak{F}}(x) > 1\}$. Пусть $\mathfrak{V}$ обозначает семейство тех мер $\varphi$ типа Каратеодори, определенных на семействе всех подмножеств $S$, для которых: 1) $0 = \varphi(0) \leqslant \varphi(A) \leqslant \varphi(B)$, если $A \subset B \subset S$; 2) $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$, если $A \cup B \subset S$ и расстояние между $A$ и $B$ положительно; 3) $\varphi(U\mathfrak{F}) \leqslant \sum_{\beta \in \mathfrak{F}} \varphi(\beta)$, где $\mathfrak{F}$ — счетное множество подмножеств $S$; 4) $\varphi(A) < \infty$, если $A$ — ограниченное подмножество $S$.

Если $A \subset S$, то говорят, что $A$ $\varphi$-измеримо, когда $\varphi(T) = \varphi(T \cap A) + \varphi(T - A)$ для каждого $T \subset S$. Известно, что борелевские подмножества $S$ $\varphi$-измеримы для каждой $\varphi \in \mathfrak{V}$. $\varphi$-измеримые функции определяются обычным образом. Если $\varphi \in \mathfrak{V}$ и $\mathfrak{F}$ есть счетное семейство $\varphi$-измеримых подмножеств $S$, то $P_{\mathfrak{F}}(x)$ — $\varphi$-измеримая функция. С $\varphi$ связывается мера $\bar{\varphi}$, определенная так, что $\bar{\varphi}(A) = \inf_{\alpha \in \mathfrak{B}_A} \varphi(\alpha)$, где $\mathfrak{B}_A$ обозначает семейство борелевских множеств $\alpha$, для которых $A \subset \alpha$. $\bar{\varphi}$ удовлетворяет соотношениям 1) — 4) и совпадает с $\varphi$ на борелевских подмножествах $S$. Функция $F$ называется покрытием, если для всякого $x$ из области ее определения: 5) $x \in S$ и $F(x)$ — непустое семейство подмножеств $S$, 6) $\operatorname{diam} \beta < \infty$, если $\beta \in F(x)$, 7) $\inf_{\beta \in F(x)} \operatorname{diam} (\beta \cup \hat{x}) = 0$, где $\hat{x}$ — множество, содержащее только один элемент $x$. Если $F$ — покрытие с областью $A$, то множество $\bigcup_{x \in A} F(x)$ называется расширением $F$. $G$ есть подпокрытие $F$, если $F$ и $G$ — такие покрытия, что $G(x) \subset F(x)$, где $x$ принадлежит области определения $G$. Для некоторого числа $p'$, $1 \leqslant p' < \infty$, говорят, что $F$ обладает $S^{(p')}$-свойством, если: 8) $F$ покрывает каждый член, чье расширение является борелевским множеством, 9) для $\varepsilon > 0$ и некоторого подпокрытия $G$ ($G(x) \subset F(x)$) с ограниченной областью $B$ существует счетное подмножество $\Omega$ расширения $G$, для которого а) $\varphi(B - U\Omega) < \varepsilon$, б) $\int_{U\Omega} (P_{\Omega}(x) - 1)^{p'} d\varphi(x) < \varepsilon$. Фиксируется число $p$, $1 < p < \infty$ и определяется $q$ так, что $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Определяется $\mathfrak{V}^{(q)}$ как класс таких мер $\psi$, которые являются интегралами неотрицательных функций $f$, для которых $\int_M \{f(x)\}^q d\varphi(x) < \infty$, где $M$ — ограниченное $\varphi$-измеримое множество. Основные результаты:

1. Некоторое покрытие, обладающее $S^{(p)}$-свойством, дифференцирует каждый член класса $\mathfrak{V}^{(q)}$.

2. $F$ дифференцирует каждый член $\mathfrak{V}^{(q)}$.

Имеются опечатки, например, на стр. 346 в (i) должно быть $A \subset B \subset S$. Ф. И. Шмидов

**3899. Обобщенно-седлообразные функции. Плотников В. И.,** Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 5, 191—196

Обобщается теорема Радо о свойствах седлообразных функций. Непрерывная функция $z(x, y)$, $(x, y) \in G$, где $G$ — двумерная область, называется $R$-обобщенно-седлообразной ($R > 0$), если для любой области $D \subset G$ и для любых $a$ и $b$, удовлетворяющих условию $a^2 + b^2 \geqslant R^2$, функция $z(x, y) - ax - ay$ достигает наибольшего и наименьшего значений на границе $D$. В работе приведено подробное доказательство следующей теоремы: Пусть $z(x, y)$ есть $R$-обобщенно-седлообразная функция, заданная в круге $x^2 + y^2 \leqslant 1$ и удовлетворяющая на границе этого круга условию Липшица с постоянной $L$. Тогда функция $z(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L_1$ в каждом круге $x^2 + y^2 \leqslant \delta^2 < 1$. Константа $L_1$ зависит лишь от $L$, $\delta$, $R$. И. Я. Бакельман

**3900. Абстрактная структура неравенств. Собл** (Abstract structure of inequalities. Soble A. B.), Math. Mag., 1958, **31**, № 4, 179—184 (англ.)

Приводится ряд элементарных фактов, как, например: семейство функций $g(x)$, для которых $g(x) \geqslant f(x)$, если $x$ принадлежит сегментам $[x_1, x_2]$, $[x_3, x_4]$, $[x_5, x_6]$ ($x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$), и $g(x) < f(x)$, если $x$ не принадлежит ни одному из этих сегментов, может быть представлено в виде

$$g(x) = f(x) - G(x) \prod_{i=1}^{6} (x - x_i),$$

где $G(x)$ — любая (действительная) функция, положительная вне сегментов и неотрицательная внутри их. Рассматривается также трактовка неравенств в полярных координатах и дробно-линейные преобразования переменных как пример преобразований, сохраняющих мажоризацию. В. И. Левин

**3901. О структуре множеств уровня действительных функций одной переменной. Часар** (Sur la structure des ensembles de niveau des fonctions réelles à une variable. Császár A.), Colloq. math., 1956, **4**, № 1, 13—29 (франц.)

Изучается поведение действительной функции $f(x)$, определенной для $-\infty < x < +\infty$, в окрестности точки $x_0$. Пусть $W$ — система множеств, расположенных справа от $x_0$, обладающая свойствами: 1) если $A \in W$ и $B \supset A$, то $B \in W$; 2) если $A_k \in W$ ($k = 1, 2, \ldots$), то $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \in W$. Пусть $\bar{W}$ — система множеств, имеющих вид $N + H$, где $N \in W$ и $H$ счетно. $\bar{W}$ обладает свойствами 1) и 2) и может быть отличной от $W$. Вводятся определения: а) $f(x)$ есть возрастающая с правой стороны от $x_0$ относительно $W$ ($f(x)$ есть $C_+(W)$ в точке $x_0$), если для некоторого $\delta > 0$ $E_x [f(x) \leqslant f(x_0), x_0 < x < x_0 + \delta] \in W$; б) $f(x)$ есть неубывающая с правой стороны от $x_0$ относительно $W$ ($f(x)$ есть $C_+^*(W)$ в $x_0$), если для некоторого $\delta > 0$

$$E_x [f(x) < f(x_0), x_0 < x < x_0 + \delta] \in W$$

и

$$E_x [f(x) \leqslant f(x_0), x_0 < x < x_0 + \delta] \notin W$$

для всякого $\delta > 0$; в) $f(x)$ есть колеблющаяся с правой стороны от $x_0$ относительно $W$ ($f(x)$ есть $O_+(W)$ в $x_0$), если для всякого $\delta > 0$

$$E_x [f(x) < f(x_0), x_0 < x < x_0 + \delta] \notin W$$

и

$$E_x [f(x) > f(x_0), x_0 < x < x_0 + \delta] \notin W.$$

Заменяя в а) и б) неравенства $f(x) < f(x_0)$ и $f(x) \leqslant f(x_0)$ соответственно на $f(x) > f(x_0)$ и $f(x) \geqslant f(x_0)$, получаем определения понятий: „$f(x)$ есть убывающая с правой стороны от $x_0$ относительно $W$" ($f(x)$ есть $D_+(W)$ в $x_0$) и „$f(x)$ есть не возрастающая с правой стороны от $x_0$ относительно $W$" ($f(x)$ есть $D^*_+(W)$ в $x_0$). Функция $f(x)$ есть $C_-(W)$ в $x_0$, если $f(-x)$ есть $C_+(W)$ в точке $-x_0$. Аналогично определяются $C^*_-(W)$, $O_-(W)$, $D_-(W)$ и $D^*_-(W)$. При рассмотрении поведения $f(x)$ справа и слева от $x_0$ получаем 9 видов:

1) $C_+(W)$, $C_-(W)$; 2) $C^*_+(W)$, $C_-(W)$;

3) $C^*_+(W)$, $C^*_-(W)$; 4) $C_+(W)$, $D_-(W)$;

5) $C^*_+(W)$, $D_-(W)$; 6) $C^*_+(W)$, $D^*_-(W)$;

7) $C_+(W)$, $O_-(W)$; 8) $C^*_+(W)$, $O_-(W)$;

9) $O_+(W)$, $O_-(W)$.

Доказывается, что если в каждой точке множества $E$: 1. $f(x)$ вида 3), то $E = N + H$, где $N \in W$ и $f(H)$ счетно; 2. $f(x)$ вида 5), то $E \in \overline{W}$; 3. $f(x)$ вида 2), то $E \in \overline{W}$; 4) $f(x)$ вида 8), то $E \in \overline{W}$; 5) $f(x)$ вида 6), то $E = N + R$, где $N \in \overline{W}$ и $R$ можно покрыть системой интервалов таких, что $f(x)$ постоянна на каждом из них; 6. $f(x)$ вида 1), то $E \in \overline{W}$.

Изучается также случай аппроксимативного изменения $f(x)$.

а′) $f(x)$ есть $\Gamma_+$ в $x_0$, если $\underset{x}{E}[f(x) \leqslant f(x_0),\ x > x_0]$ имеет в $x_0$ плотность, равную нулю;

б′) $f(x)$ есть $\Gamma^*_+$ в $x_0$, если $\underset{x}{E}[f(x) < f(x_0),\ x > x_0]$ имеет в $x_0$ плотность, равную нулю, а $\underset{x}{E}[f(x) \leqslant f(x_0),\ x > x_0]$ имеет в $x_0$ положительную верхнюю плотность;

в′) $f(x)$ есть $\Omega_+$ в $x_0$, если $\underset{x}{E}[f(x) < f(x_0),\ x > x_0]$ и $\underset{x}{E}[f(x) > f(x_0),\ x > x_0]$ имеют в $x_0$ положительную верхнюю плотность.

Заменяя соответственно в а′) и б′) неравенства $f(x) < f(x_0)$ и $f(x) \leqslant f(x_0)$ на $f(x) > f(x_0)$ и $f(x) \geqslant f(x_0)$, получаем свойства $\Delta_+$ и $\Delta^*_+$. Функция $f(x)$ есть $\Gamma_-$ в $x_0$, если $f(-x)$ есть $\Gamma_+$ в точке $-x_0$. Аналогично определяются $\Gamma^*_-$, $\Omega_-$, $\Delta_-$, $\Delta^*_-$ и получают:

1′) $\Gamma_+$, $\Gamma_-$; 2′) $\Gamma^*_+$, $\Gamma_-$; 3′) $\Gamma^*_+$, $\Gamma^*_-$;

4′) $\Gamma_+$, $\Delta_-$; 5′) $\Gamma^*_+$, $\Delta_-$; 6′) $\Gamma^*_+$, $\Delta^*_-$;

7′) $\Gamma_+$, $\Omega_-$; 8′) $\Gamma^*_+$, $\Omega_-$; 9′) $\Omega_+$, $\Omega_-$.

Доказывается, что если в каждой точке множества $E$: 7. $f(x)$ вида 3′) или 6′), то $E = N + Q$, где $|N| = 0$ и $f(Q)$ счетно; 8. $f(x)$ вида 5′), то $|E| = 0$; 9. $f(x)$ вида 2′), то $|E| = 0$; 10. $f(x)$ вида 8′), то $|E| = 0$; 11. $f(x)$ вида 1′), то $|E| = 0$; 12. $f(x)$ измерима и вида 3′) или 6′), то $f(E)$ счетно. 13. $f(x)$ измерима и вида 7′), то $E = N + K$, где $|N| = 0$ и $|f(K)| = 0$. В доказательстве последнего используется утверждение: если $f(x)$ измерима и $f'_{ap}(x) = 0$ для $x \in K$, то $|f(K)| = 0$.

Ф. И. Шмидов

## ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

**3902. О независимых множествах в теории отношений.** Маркус (Sur les ensembles indépendants dans la théorie des relations. Marcus Solomon), Monatsh. Math., 1959, **63**, № 3, 244—255 (франц.)

Пусть $E$ — множество действительных чисел. Изучается проблема существования независимых множеств с теми или иными свойствами в соответствиях (отношениях) типа $x \to S(x)$, где $x \in E$, $S(x) \subset E$, $x \notin S(x)$ или $x \notin \overline{S(x)}$ (РЖМат, 1956, 7962; 1958, 1963). Приводится большое число конкретных примеров соответствий указанного типа. В одном из них не существует независимого совершенного множества; в другом не существует независимого множества, резидуального в некотором интервале; в третьем существует независимое совершенное множество, но не существует никакого независимого множества, резидуального в некотором интервале, а также не существует никакого независимого измеримого множества положительной меры; и т. д.

Кроме того, доказывается несколько предложений следующего вида. Пусть $S^{-1}(x)$ означает множество всех элементов $u$ таких, что $x \in S(u)$. Если множества $S(x)$ и $S^{-1}(x)$ счетны, то существует независимое множество, пересекающееся со всяким совершенным множеством. Далее, если для каждого $x \in E$, за исключением, возможно, множества $P$ первой категории, $S(x)$ и $S^{-1}(x)$ первой категории и если $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, то существует независимое множество второй категории. В конце статьи указанные соответствия рассматриваются в сепарабельном метрическом пространстве $E$ в предположении, что $S(x)$ нигде не плотно. Вводится понятие взаимно независимых множеств и доказывается теорема: Для всякого натурального $n$ существует $n$ взаимно независимых непересекающихся множеств второй категории. Как отмечает сам автор, часть результатов статьи известна. Библ. 15 назв.

Д. А. Захаров

**3903. Заметка о порядковых типах.** Падмавалли (A remark on order-types. Padmavally K.), Fundam. math., 1955, **42**, № 2, 312—318 (англ.)

Серпинский (Sierpiński W., Fundam. math., 1949, **36**, 56—67) доказал, что всякий порядковый тип $C$ мощности $\aleph_l$ погружаем в „полную мощность" $2^{((\omega_l))}$, т. е. всякое упорядоченное множество мощности $\aleph_l$ подобно некоторому множеству трансфинитных последовательностей типа $\omega_l$, образованных из чисел 0 и 1 и упорядоченных по лексикографическому принципу. Новак (Novák J., Fundam. math., 1952, **39**, 53—64) несколько уточнил этот результат. Автором было показано (РЖМат, 1955, 4956), что если $\omega_n$ есть начальное порядковое число такое, что ни $\omega_n$, ни его обращение $\omega^*_n$ не погружаемы в порядковый тип $C$, то $C$ погружаем в полную мощность $2^{((\omega_n))}$. В реферируемой работе устанавливаются связи между этими результатами.

Автор замечает, что уточнение Новака сразу следует из результата Серпинского. В дальнейшем используются обозначения: $\omega_l$ — первое порядковое число мощности $\aleph_l$; $\mu(C)$ — минимальное кардинальное число плотного подмножества множества $C$; $\nu(C)$ — наименьшее начальное порядковое число $\omega_k$ такое, что $C$ погружаемо в $2^{((\omega_k))}$; $\lambda(C)$ — наименьшее начальное порядковое число $\omega_n$ такое, что ни $\omega_n$, ни его обращение $\omega^*_n$ не погружаемы в $C$. Доказывается, что: 1) если $\nu(C) = \omega_k$ $(= \omega_k(C))$, то необходимым и достаточным условием того, что $\mu(C) \leqslant \nu(C)$ для непрерывного порядкового типа $C$, будет выполнение равенства $\sum_{\alpha<k} 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_k$; 2) необходимым и достаточным условием того, что $\mu(C) \leqslant \lambda(C)$ для всех непрерывных порядковых типов $C$, будет выполнение не-

равенства $2^{\aleph_\alpha} \leqslant \aleph_n$ для всякого $\alpha < n$ и для всех $n$. Строится пример порядкового типа $P$, для которого $\lambda(P) = \nu(P)$ является наименьшим порядковым числом $\xi$ таким, что $P$ погружаем в $2((\xi))$. Дается следующее обобщение теоремы Серпинского: Для всякого неограниченного регулярного начального порядкового числа $\omega_{n+1}$ существует трансфинитная восходящая последовательность мощности, равной кардинальному числу, следующему за $2^{\aleph_n}$, порядковых типов $\{C_\beta\}_{\beta<\alpha}$, каждый из которых имеет мощность $\leqslant 2^{\aleph_{n+1}}$, где каждое $\lambda(C_\beta) \leqslant \omega_{n+1}$ (порядковые типы $C_\beta$ упорядочены по Серпинскому). В. Я. Арсенин

**3904. О теореме Серпинского и Рузевича. Исэки** (On a theorem of W. Sierpiński and S. Ruziewicz. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 6, 353—354 (англ.)

В предыдущей работе (РЖМат, 1959, 1366) автор доказал теорему: Пусть $M$ — упорядоченное множество мощности $m$. Тогда $m \leqslant n$ в том и только в том случае, если для всякого элемента $a$ из $M$ можно определить семейство $F(a)$ интервалов таких, что каждый из них имеет $a$ в качестве концевой точки, мощность множества $F(a)$ меньше $n$ ($\overline{\overline{F}}(a) < n$), и каждый элемент множества $M$ есть конец некоторого интервала из некоторого $F(a)$. Используя этот результат, автор доказывает теорему:

Пусть $M$ есть упорядоченное множество мощности $m$. Если $m \leqslant n$, то прямое произведение $M \times M$ разлагается на два множества $A$ и $B$, которые с прямыми $x = \text{const}$ и соответственно $y = \text{const}$ пересекаются по множествам мощности $< n$.

С помощью этой теоремы автор доказывает следующую теорему Рузевича:

Пусть $M$ есть упорядоченное множество мощности $m$. Для того чтобы имело место $m \leqslant n$, необходимо и достаточно, чтобы прямое произведение $M \times M$ разлагалось на два непересекающихся множества $A$ и $B$, которые с прямыми $x = \text{const}$ и соответственно $y = \text{const}$ пересекаются по множествам мощности, меньшей $n$. В. Я. Арсенин

## ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

**3905. Приближение сопряженных функций суммами Фейера. Ефимов А. В.**, Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 1, 183—188

Рассматриваются периодические периода $2\pi$ функции $f(x)$ классов $H_k^{(1)}$, т. е. функции, $k$-й модуль гладкости которых удовлетворяет неравенству $\omega_k(f; t) \leqslant t$. Обобщая и уточняя один результат Алексича (Alexits G., Mat. es Fiz. Lapok, 1941, **48**, 410—433), автор показывает, что при $k \geqslant 2$

$$\tilde{f}(x) - \tilde{\sigma}_{n-1}(f; x) = f\left(x - \frac{1}{2n}\right) - f\left(x + \frac{1}{2n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{\sigma}_{n-1}(f; x)$ — соответственно, сопряженная функция к $f(x) \in H_k^{(1)}$ и ее сумма Фейера порядка $n-1$. Кроме того, для функций $f(x) \in H_k^{(1)}$ ($k \geqslant 2$) при условии, что $f(0) = 0$, изучается также разность $\frac{1}{y} f(y) - \frac{1}{z} f(z)$ и устанавливается соотношение порядка

$$\frac{1}{y} f(y) - \frac{1}{z} f(z) = O\left(1 + \ln \frac{z}{y}\right).$$

Опираясь на один результат референта (РЖМат, 1958, 3639), автор уточняет эту оценку при $k = 2$ и показывает, что

$$\sup_{\substack{f \in H_2^{(1)} \\ f(0)=0}} \left| \frac{1}{y} f(y) - \frac{1}{z} f(z) \right| = \frac{1}{2 \ln(\sqrt{2}+1)} \ln \frac{z}{y} + O(1).$$

А. Ф. Тиман

**3906. О теореме, обратной теореме Винера—Леви. Кахан, Кацнельсон** (Sur la réciproque du théorème de Wiener—Lévy. Kahane Jean-Pierre, Katznelson Yitzhak), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 9, 1279—1281 (франц.)

Комплекснозначная функция $f(t)$ принадлежит по определению классу $A(E)$, если она совпадает на замкнутом множестве $E \subset (0, 2\pi)$ с некоторой функцией, ряд Фурье которой абсолютно сходится. Для случая, когда $E$ содержит интервал, Хелсон и Кахан (РЖМат, 1959, 9264) показали, что если функция $F(x, y)$, определенная на выпуклом компактном множестве $D$, такова, что для любой $f \in A(E)$ такой, что $(\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f) \in D$, имеет место соотношение $F(\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f) \in A(E)$, то функция $F(x, y)$ аналитична по $x$ и $y$ в некоторой области, содержащей множество $D$. (Формулировка этого предложения в реферируемой статье содержит опечатки. *Реф.*). Авторы доказывают, что приведенное утверждение остается в силе для любого множества $E$ такого, что при любом $n$ это множество содержит $n$ точек, составляющих арифметическую прогрессию. А. Л. Гаркави

**3907. Множители для сильной сходимости рядов Фурье. I. Гёс** (Multiplikatoren für starke Konvergenz von Fourierreihen. I. Goes G.), Studia math., 1958, **17**, № 3, 299—308 (нем.)

Пусть $E$ — некоторое линейное нормированное пространство интегрируемых периода $2\pi$ функций $f(t)$, $E_N \subset E$ — подпространство функций, для которых $\lim_{n\to\infty} \| s_n(f; t) - f(t) \|_E = 0$, где

$$s_n(f; t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

— частная сумма порядка $n$ ряда Фурье функции $f(t)$, и $E^*$ — пространство, сопряженное к $E$. Для того случая, когда $E$ есть одно из пространств $L_p$ ($1 \leqslant p \leqslant \infty$), $C$ или $L_\Phi$ (Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., ГОНТИ, 1939), устанавливается следующая теорема. Последовательность $\lambda_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) преобразует любой ряд Фурье — Лебега

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad (1)$$

в ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (2)$$

некоторой функции из $E_N$ тогда и только тогда, когда

$$\left\| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cos kt \right\|_E = O(1).$$

При условии, что $p < \infty$ или $\Phi(2u) \leqslant M\Phi(u)$, где $M$ — некоторая константа, ряд Фурье любой функции $f \in E$ преобразуется в равномерно сходящийся ряд (2) тогда и только тогда, когда

$$\left\| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cos kt \right\|_{E^*} = O(1).$$

Эти предложения обобщают одну теорему, установленную Карамата (РЖМат, 1957, 2194). А. Ф. Тиман

**3908. *BK*-пространства и матрицы преобразования для коэффициентов Фурье. Гёс** (*BK*-Räume und Matrixtransformationen für Fourierkoeffizienten. Goes Günther), Math. Z., 1959, **70**, № 4, 345—371 (нем.)

Пусть $F$ есть функциональное пространство Банаха, состоящее из периодических (периода $2\pi$) функций $f(x)$,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad (1)$$

и содержащее тригонометрическую систему, а $\mathfrak{M}$ — бесконечная числовая матрица $\{a_{kl}\}$.

Изучается преобразование $\mathfrak{M}f$, приводящее в соответствие рядам (1) тригонометрические ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a'_k \cos kx + b'_k \sin kx), \qquad (2)$$

где

$$a'_k = \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} a_l, \qquad b'_k = \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} b_l.$$

Исследуется вопрос об условиях, при которых матрица $\mathfrak{M}$ принадлежит данному классу $\mathfrak{M}(F, F_1)$, т. е. преобразует ряды (1) из $F$ в ряды (2), принадлежащие другому пространству $F_1$.

Устанавливаются необходимые и достаточные условия для тех случаев, когда пространствами $F$ и $F_1$ являются пространства $L_p$, $C$, пространство функций ограниченной вариации, пространство абсолютно непрерывных функций или некоторые их подпространства.

А. Ф. Тиман

**3909. Дополнительные пространства коэффициентов Фурье и множители. Гёс** (Komplementäre Fourierkoeffizientenräume und Multiplikatoren. Goes Günther), Math. Ann., 1959, **137**, № 5, 371—384 (нем.)

Пусть $E$ есть некоторое пространство тригонометрических рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (1)$$

и $E^*$ — дополнительное к нему пространство тригонометрических рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos kx + d_k \sin kx) \qquad (2)$$

таких, что для любого ряда (1) из $E$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k c_k + b_k d_k) \qquad (3)$$

сходится.

Через $(C_1E)^*$ обозначается пространство рядов (2) таких, что для любого ряда (1) из $E$ ряд (3) суммируем методом Чезаро первого порядка.

Устанавливаются критерии принадлежности ряда (2) пространству $E^*$ или $(C_1E)^*$ для некоторых конкретных пространств $E$. Так, например, в том случае, когда $E$ — пространство рядов Фурье—Лебега периодических периода $2\pi$ функций $f(t)$, принадлежащих пространству Орлича $L_\Phi$, где $\Phi(2u) \leqslant M\Phi(u)$ ($M$ — константа), ряд (2) принадлежит $L^*_\Phi$, если

$$\sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} (c_k \cos kx + d_k \sin kx) \right\|_\Psi < \infty,$$

где $\Psi$ — дополнительная к $\Phi$ функция. А. Ф. Тиман

**3910. Об ограниченных функциях с ограниченной $n$-й конечной разностью. Уитни** (On bounded functions with bounded $n$th differences. Whitney Hassler), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 3, 480—481 (англ.)

Рассматриваются вещественные функции $f$, определенные на замкнутом отрезке $I$ (ограниченном или неограниченном), $n$-я конечная разность которых

$$\Delta_h^n f(x) = \sum_i (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(x + ih)$$

ограничена при некотором фиксированном $n$.

Теорема. Для всякого целого $n \geqslant 1$ существует число $L_n$, которое обладает следующим свойством. Пусть $f$ определена на $I$ и допустим, что в некотором интервале $I' \subset I$ функция $f$ ограничена. Тогда найдется такой алгебраический многочлен $P$ степени $\leqslant n-1$, что

$$|f(x) - P(x)| \leqslant L_n \sup |\Delta_h^n f(y)|, \quad x \in I.$$

Доказательство проводится тем же методом, который был применен в предыдущей работе автора (РЖМат, 1957, 6968), где сформулированная выше теорема была доказана в предположении, что $f$ непрерывна.

При $I = [0, \infty]$ $L_n \leqslant 1$, а при $I = [-\infty, \infty]$

$$L_n \leqslant 1/\sup_k \binom{n}{k}.$$

В. С. Виденский

**3911. О приближении многочленами функций, удовлетворяющих обобщенному условию Липшица. Потапов М. К.**, Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-т, 1958, 18, 109—116

По определению, функция $f(x)$, интегрируемая в $p$-й степени с весом $[(x-a)(b-x)]^{-1/2}$ на отрезке $[a, b]$, удовлетворяет обобщенному условию Липшица степени $\alpha$, или $f(x) \in \overline{H}_p^{(\alpha)}(M; [a,b])$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, если для любого $h$ $(0 < |h| < b-a)$

$$\left( \int_c^d |f(x+h) - f(x)|^p \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \right)^{1/p} \leqslant M |h|^\alpha,$$

$$1 \leqslant p \leqslant \infty,$$

где $c$ и $d$ выбраны так, что $a \leqslant c < d \leqslant b$ и из $x \in [c, d]$ следует, что $x + h \in [a, b]$, и $M$ не зависит от $c$, $d$ и $h$.

Класс функций $f(x)$, для которых

$$\left( \int_a^b |f(x)|^p \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \right)^{1/p} \leqslant M,$$

обозначим через $\overline{H}_p^{(0)}(M; [a, b])$.

Основным результатом работы является теорема:

Если $f(x)$ имеет $r$-ю производную $f^{(r)}(x)$, принадлежащую к классу $\overline{H}_p^{(\alpha)}(M; [-1, 1])$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, то для $n \geqslant r+1$ найдется многочлен $P_n(x)$ степени не выше $n$ такой, что

$$\left( \int_{-1}^{1} \left| \frac{f(x) - P_n(x)}{\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^r} \right|^p \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right)^{1/p} \leqslant C \frac{M}{n^{r+\alpha}},$$

где $C$ не зависит от $M$ и $n$.

Отметим, что частный случай этой теоремы ($\alpha = 0$) может быть получен из результатов референта (РЖМат, 1959, 2528). Г. К. Лебедь

**3912. Аппроксимация полиномами с целыми коэффициентами, формулировка теоремы Стоуна — Вейерштрасса. Хьюитт, Цуккерман** (Approximation by polynomials with integral coefficients, a reformulation of the Stone — Weierstrass theorem. Hewitt Edwin, Zuckerman Herbert S.), Duke Math. J., 1959, **26**, № 2, 305—324 (англ.)

Пусть $A(\alpha, \beta)$ есть совокупность всех не равных нулю тождественно алгебраических многочленов

$$Q(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k x^k \qquad (1)$$

с целыми коэффициентами и таких, что $0 \leqslant Q(x) < 1$ для всех $x \in [\alpha, \beta]$. В том случае, когда $A(\alpha, \beta)$ не пусто, обозначим через $J(\alpha, \beta)$ множество тех $x \in [\alpha, \beta]$, где $Q(x)=0$ для всех $Q(x) \in A(\alpha, \beta)$. Если $\beta - \alpha < 4$, то $J(\alpha, \beta)$ совпадает с множеством корней всех многочленов (1) с целыми коэффициентами со старшим коэффициентом, равным единице, и таких, у которых все корни вещественны и расположены на $[\alpha, \beta]$.

Непрерывная на $[\alpha, \beta]$ функция $f(x)$ может быть с любой степенью точности равномерно аппроксимирована многочленами (1) с целыми коэффициентами тогда и только тогда, когда существует многочлен (1) с целыми коэффициентами, совпадающий на $I(\alpha, \beta)$ с $f(x)$.

Рассматривается также случай, когда $\beta - \alpha \geqslant 4$, и дано распространение на компактные хаусдорфовы пространства. А. Ф. Тиман

**3913. О равномерной аппроксимации с узлами. Пашковский** (Sur l'approximation uniforme avec des noeuds. Paszkowski S.), Ann. polon. math., 1955, 2, № 1, 118—135 (франц.)

Пусть функции $p_1(t), \ldots, p_n(t)$ составляют систему Чебышева $T_n$ на интервале $(a', b')$; $t_1, t_2, \ldots, t_m$ $(m < n)$ — точки из $(a', b')$ и $f(t)$ — функция, определенная на $(a', b')$ и непрерывная на $[a, b] = (a', b')$. Рассматривается задача наилучшего равномерного приближения функции $f(t)$ на отрезке $[a, b]$ полиномами по системе $T_n$, принимающими в точках $\{t_k\}$ те же значения, что и $f(t)$. Эта задача занимает, в известном смысле, промежуточное положение между обычным равномерным приближением и интерполированием (которым отвечают случаи $m=0$ и $m=n$ соответственно). Полагая $m < n$, автор обобщает на этот случай результаты Чебышева, Бореля, Валле-Пуссена о наилучшем равномерном приближении, как-то: существование и единственность полинома наилучшего приближения, его характеристические свойства и т. д. В качестве приложения полученных результатов приводится построение алгебраического полинома, наименее уклоняющегося от нуля среди полиномов $n$-й степени с нулевым свободным членом и старшим коэффициентом, равным единице. А. Л. Гаркави

**3914. Многочлены наилучшего приближения на действительном конечном множестве точек. Моцкин, Уолш** (Polynomials of best approximation on a real finite point set. I. Motzkin T. S., Walsh J. L.), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **91**, № 2, 231—245 (англ.)

На конечном множестве $E$, содержащем $\geqslant n+2$ различные действительные точки, рассматриваются многочлены $p_n(x)$, осуществляющие наилучшее степенное или равномерное (чебышевское) взвешенное приближение данной функции $f(x)$. Исследуются общие осцилляционные свойства экстремальных многочленов, соответствующих всевозможным положительным весовым функциям. Доказывается, что множество экстремальных многочленов ограничено, замкнуто и связно. В. С. Виденский

**3915. Вариационный метод для тригонометрических полиномов. Боас** (A variational method for trigonometric polynomials. Boas R. P., Jr), Illinois J. Math., 1959, **3**, № 1, 1—10 (англ.)

Пусть $f(x)$ — тригонометрический полином. Рассматривается линейный функционал $\mathfrak{L}$, определенный соотношением

$$\mathfrak{L}(f)=\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{j=0}^{n_\nu} \alpha_\nu^{(j)} f^{(j)}(x_\nu),$$

где $x_\nu$, $\alpha_\nu$ — действительные числа, $0 \leqslant x_\nu < 2\pi$, все $x_\nu$ различны, $\alpha_\nu^{(n_\nu)} \neq 0$ и $n_\nu > 0$ по крайней мере для одного значения $\nu$. Порядком функционала $\mathfrak{L}$ называется число $l = n_1 + \ldots + n_m + m$. Ищется максимум $|\mathfrak{L}(f)|$, когда $f(x)$ принадлежит классу $\mathfrak{T}_n$ тригонометрических полиномов порядка $\leqslant n$, удовлетворяющих неравенству $|f(x)| \leqslant 1$ при действительных $x$.

Лемма. Если $f(x) \in \mathfrak{T}_n$, причем $f(x) \not\equiv \text{const}$, и является функцией, для которой реализуется максимум $|\mathfrak{L}(f)|$, то при $n \geqslant [l/2]$ найдутся такие действительные точки, в которых $|f(x)| = 1$; если $F(x) \in \mathfrak{T}_n$ и $F(x)$ обращается в нуль во всех точках периода, в которых $f(x) = \pm 1$, то $\mathfrak{L}(F) = 0$.

Основной результат состоит в следующем. Пусть $n \geqslant [l/2]$. Экстремальная функция $f(x) \in \mathfrak{T}_n$ для $\mathfrak{L}$ является либо константой, либо тригонометрическим полиномом порядка $m > n - [l/2]$. Если $f(x)$ отлична от константы, то $1 - f^2(x)$ имеет не более чем $2k$ мнимых нулей в полосе периода, где $\frac{k}{2} < m - n + [l/2]$, и $f(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{[f'(x)]^2}{1-f^2(x)} = \frac{R(x)}{S(x)},$$

где $R(x)$ и $S(x)$ — действительные тригонометрические полиномы порядка $q \leqslant k$; $S(x)$ представима в виде

$$S(x) = 2^k \prod_{j=1}^{k} \sin\frac{x-b_j}{2} \sin\frac{x-\overline{b}_j}{2},$$

$b_j$ — мнимые числа; $R(x)$ имеет нули четной кратности, не совпадающие с каким-либо $b_j$. Если $n \geqslant 2[l/2]+1$, то экстремальная функция, если она отлична от константы, будет единственной. Далее эта теорема применяется к исследованию линейного функционала

$$\mathfrak{L}(f) = \lambda n^2 f(0) + f''(0)$$

порядка $l=3$. Если $n > 1$, то при $\lambda \leqslant 1/3 + 1/(6n^2)$ экстремальной функцией для него будет функция $\pm\cos nx$, а при $\lambda > 1/3 + 1/(6n^2)$ экстремальная функция будет иметь вид

$$\pm \cos n \arccos(\omega \cos x + \omega - 1), \quad [0 < \omega < 1.$$

Во втором случае $\max|\mathfrak{L}(f)|$ равен максимуму при $0 < \theta < \pi$ функции $\left|\lambda n^2 \cos n\theta - \frac{1}{2} \sin n\theta \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right|$. При $n=1$ максимум $|\mathfrak{L}(f)|$ реализуется функцией $\pm\cos nx$, если $\lambda \leqslant 1/2$, и функцией $\pm 1$ при $\lambda \geqslant 1/2$. Таким образом, в $\mathfrak{T}_1$ при $\lambda = 1/2$ имеются две различные экстремальные функции. Из сформулированного предложения вытекает такое следствие относительно алгебраических многочленов. Если $P_n(x)$ — многочлен степени $n > 1$, удовлетворяющий неравенству $|P_n(x)| \leqslant 1$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то выражение

$$|\lambda n^2 P_n(x) - xP_n'(x) + (1-x^2) P_n''(x)|$$

не превосходит $(1-\lambda)n^2$, когда $\lambda \leqslant 1/3 + 1/(6n^2)$, и не превосходит максимума $\left|\lambda n^2 \cos n\theta - \frac{1}{2} n \sin n\theta \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right|$, когда $\lambda > 1/3 + 1/(6n^2)$. В. С. Виденский

**3916. О неравенствах Стилтьеса и С. Н. Бернштейна для многочленов Лежандра. Виденский В. С.**, Докл. АН СССР, 1959, **124**, № 5, 973—975

Обозначим через $P_n(x)$ многочлен Лежандра, нормированный услозием $P_n(1)=1$, и через $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ — многочлены Якоби, соответствующие весовой функции $(1-x^2)^\alpha$. Положим, кроме того, $P_n^{(\lambda)}(x) = AP_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ $\left(\alpha = \lambda - \frac{1}{2}, 0 < \lambda < 1\right)$.

Известно, что на отрезке $[-1, 1]$

$$(1-x^2)^{1/4} |P_n(x)| < \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot n}}, \qquad (1)$$

$$(1-x^2)^{\lambda/2}\,|\,P_n^{(\lambda)}(x)\,| \leqslant \frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)\,n^{1-\lambda}}. \qquad (1)$$

Устанавливается, что неравенства для производных

$$(1-x^2)\,|\,(P_n'(x)\,| \leqslant \sqrt{\frac{2n}{\pi}},\ (1-x^2)^{3/4}\,|\,P_n'(x)\,| \leqslant \sqrt{\frac{6n}{\pi}},$$

$$(1-x^2)^{\frac{1+\lambda}{2}}\,|\,\frac{d}{dx}P_n^{(\lambda)}(x)\,| \leqslant C\,\frac{2^{1-\lambda}}{\Gamma(\lambda)}\,n^{\lambda},\quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

полученные Стилтьесом, Фейером и С. Н. Бернштейном, с учетом специальных свойств этих многочленов, по сути дела являются следствиями неравенств (1) и что они в смысле порядка остаются верными для произвольных многочленов степени $\leqslant n$, удовлетворяющих (1). По поводу (1) и (2) см. Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 2, 1954, статья 51. Г. К. Лебедь

**3917. Обобщения теоремы А. А. Маркова об оценке производной многочлена. Виденский В. С.**, Докл. АН СССР, 1959, 125, № 1, 15—18

Рассматривается вопрос о точной верхней грани производной алгебраического многочлена $P_n(x)$.

1) Пусть $P_n^2(x) \leqslant \prod_1^m (1 + a_k^2 x^2)$ $(m \leqslant n)$ на $[-1, 1]$, тогда на этом отрезке

$$|\,P_n'(x)\,| \leqslant M_n'(1), \qquad (1)$$

где $M_n(x) = \mathrm{Re}\prod_1^n (\alpha_k x + i\sqrt{1-x^2})$, $\alpha_k = \sqrt{1+a_k^2}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $\alpha_k = 0$, $m < k \leqslant n$.

Равенство в (1) достигается только для $P_n(x) = \gamma M_n(x)$ $(|\gamma| = 1)$ в точках $\pm 1$.

2) Пусть $|P_n(x)| \leqslant |\alpha x + \beta + i\sqrt{1-x^2}|$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $\alpha$, $\beta$ вещественны и $0 < |\beta| < \alpha$, тогда

$$|\,P_n'(x)\,| < \max\{|\,\overline{M}_n'(1)\,|,\ |\overline{M}_n'(-1)\,|\},\quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \qquad (2)$$

где

$$\overline{M}_n(x) = \frac{1+\alpha}{2}T_n(x) + \beta\,T_{n-1}(x) + \frac{\alpha-1}{2}T_{n-2}(x),$$

$$T_k(x) = \cos k \arccos x.$$

Равенство в (2) достигается только для $P_n(x) = \gamma\,\overline{M}_n(x)$ $(|\gamma| = 1)$ в точке 1 или $-1$.

Работа примыкает к предыдущим исследованиям автора (РЖМат, 1959, 2526). Г. К. Лебедь

**3918. Об одном обобщении методов суммирования Хаусдорфа и решении проблемы моментов. Эндлы** (Sur une généralisation des procédés de sommation de Hausdorff et la solution d'un problème de moments. Endl Kurt), C. r. Acad. sci., 1959, 248, № 4, 515—518 (франц.)

Для произвольного $\alpha \geqslant 0$ образуем матрицу $\delta^{(\alpha)} = \left((-1)^n\binom{m+\alpha}{n-\alpha}\right)$. Пусть $\mu$ — матрица, элементы главной диагонали которой образуют последовательность $\{\mu_n\}$, а все остальные элементы равны нулю. Изучаются методы суммирования с матрицами $H^{(\alpha)} = \delta^{(\alpha)}\,\mu\,\delta^{(\alpha)}$, представляющие собой обобщение методов Хаусдорфа (Харди Г., Расходящиеся ряды, М., Изд-во ин. лит., 1951).

Доказывается:

1) Для того чтобы последовательность $\{\mu_n\}$ удовлетворяла условию

$$\sum_{n=0}^{m}\binom{m+\alpha}{n-\alpha}\,|\,\Delta^{m-n}\mu_n\,| < K,\ m = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (1)$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\chi$ ограниченной вариации такая, что

$$\mu_n \int_0^1 x^{n+\alpha}\,d\chi,\quad n = 0, 1, \ldots$$

2) Для того чтобы метод $H^{(\alpha)} = \delta^{(\alpha)}\,\mu\,\delta^{(\alpha)}$ был регулярен, необходимо и достаточно, чтобы $\mu_n = \int_0^1 x^{n+\alpha}\,d\chi$, где $\chi$ — функция ограниченной вариации, для которой $\chi(1) - \chi(+0) = 1$.

3) Для того чтобы последовательность $\mu_n = \int_0^1 x^n d\chi$ удовлетворяла (1), необходимо и достаточно, чтобы $\int_0^1 x^{-\alpha}\,|\,d\chi\,| < \infty$. М. Д. Калашников

**См. также:** 3719, 3726, 4153, 4154, 4173, 4174.

## ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *А. И. Маркушевич, Г. Ц. Тумаркин*

**3919. Представление аналитических функций обобщенными рядами Лагерра. Сас, Йердли** (Representation of an analytic function by general Laguerre series. Szász Otto, Yeardley Nelson), Pacif. J. Math., 1958, 8, № 3, 621—633 (англ.)

Речь идет о представлении функции $f(z)$ рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\alpha)} L_n^{(\alpha)}(z), \qquad (1)$$

где $L_n^{(\alpha)}(z)$ — полиномы Лагерра порядка $\alpha$ $(\alpha > -1)$ и коэффициенты определяются по формуле

$$a_n^{(\alpha)} = \left\{\binom{n+\alpha}{n}\Gamma(\alpha+1)\right\}^{-1}\int_0^{\infty} e^{-x}\,x^{\alpha}\,L_n^{(\alpha)}(x)\,f(x)\,dx.$$

Случай $\alpha = 0$ был рассмотрен Поллардом (Pollard H., Ann. Math., 1947, 48, 358—365).

Пусть $p(b)$ — открытая область, ограниченная параболой

$$y^2 = 4b^2(x + b^2),\ b > 0$$

(начало принадлежит области), $\overline{p}(b)$ — замыкание $p(b)$. Положим

$$d_{\alpha} = -\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(2n^{1/2})^{-1}\ln|\,a_n^{(\alpha)}\,|.$$

Доказывается теорема: Для того чтобы функция $f(z)$ разлагалась в ряд (1) в области $p(d_{\alpha})$, где $d_{\alpha} > 0$, необходимо и достаточно, чтобы $f(z)$ была аналитической в этой области и чтобы при любом $b$, $0 < b < d_{\alpha}$, в области $\overline{p}(b)$ выполнялось условие

$$|\,f(z)\,| < B(\alpha, b)\exp\left\{\frac{1}{2}x - |x|^{1/2}\left[b^2 - \frac{1}{2}(r-x)\right]^{1/2}\right\},$$

где $B(\alpha, b)$ — положительная постоянная и

$$z = x + iy = re^{i\theta}.$$

А. Ф. Леонтьев

**3920. Равномерная аппроксимация по Чезаро рядами Фабера функции, аналитической на континууме с вполне гладкими границами.** Чень Цзянь-гун, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, 4. М., АН СССР, 1959, 180—182

**3921. О последовательностях полиномов Дирихле.** Леонтьев А. Ф., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, 3. М., АН СССР, 1958, 218—226

Дается обзор исследований свойств полиномов Дирихле $\left\{\sum_{k=1}^{p_n} a_{nk} e^{-\lambda_k z}\right\}$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|} < \infty\right)$ и их приложений. Основное внимание уделяется приложениям к дифференциальным уравнениям бесконечного порядка вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n y^{(n)}(z) = 0$ (линейные уравнения с запаздывающим аргументом и постоянными запаздываниями входят сюда, как частный случай). В качестве приложений приводятся также решения одной интерполяционной задачи и одной проблемы квазианалитичности.

Г. Л. Лунц

**3922. О неполноте некоторых систем показательных функций на интервалах достаточной длины.** Косис (Sur la non-totalité de certaines suites d'exponentielles sur des intervalles assez longs. Koosis Paul), Ann. scient. Ecole norm. supér., 1958, 75, № 2, 125—152 (франц.)

Пусть $\{\lambda_n\}$ — возрастающая последовательность положительных чисел, имеющая конечную плотность $D$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = D$. Известно, что система $\{e^{\pm i\lambda_n x}\}$ полна на каждом интервале длиной меньше $2\pi D$. Лоран Шварц высказал гипотезу, что эта система не полна ни на каком интервале длиной больше $2\pi D$. Как отмечает автор, эта гипотеза оказалась неверной: Каган (J-P. Kahane) построил пример (работа еще не опубликована, но находится в печати) последовательности $\{\lambda_n\}$ такой, что $D = 0$ и система $\{e^{\pm i\lambda_n x}\}$ полна в каждом конечном интервале. В связи с этим в настоящей работе изучается проблема: каковы те условия, которые надо наложить на $\{\lambda_n\}$ с плотностью $D$, чтобы система $\{e^{\pm i\lambda_n x}\}$ не была полной ни на каком интервале длиной больше $2\pi D$?

Пусть

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right),$$

эта функция — целая первого порядка типа $\pi D$. Если $|G(z)|$ ограничен на действительной оси некоторой степенью $|z|$, например,

$$|G(x)| < A|x|^m \qquad (1)$$

при больших $|x|$, то функция

$$f(z) = \left(\frac{1}{z}\sin\frac{\varepsilon z}{m+2}\right)^{m+2} G(z),\ \varepsilon > 0,$$

— первого порядка типа $< \pi(D+\varepsilon)$ и она интегрируема на всей действительной оси; следовательно, ее можно представить в виде интеграла

$$\int e^{izt}\varphi(t)\,dt,$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная функция, равная нулю при $|t| > \pi(D+\varepsilon)$.

Отсюда

$$\int e^{\pm i\lambda_n t}\varphi(t)\,dt = 0$$

и, значит, система $\{e^{\pm i\lambda_n t}\}$, поскольку $\varepsilon > 0$ — любое, не полна на интервале длиной $> 2\pi D$. Таким образом, если выполняется условие (1), то рассматриваемая система не полна в интервале длиной $> 2\pi D$. Имея в виду этот факт, приводится ряд теорем, в которых указывается, когда имеет место условие (1). Отметим следствие из теоремы 5. Обозначим через $L$ полигон, у которого первое звено (прямолинейное) соединяет точки (0, 0) и $(\lambda_1, 1)$, второе — точки $(\lambda_1, 1)$ и $(\lambda_2, 2)$, и т. д. Утверждается, что если полигон $L$ выпуклый, то условие (1) выполняется. Затем доказывается следующая теорема (теорема 7): Для того чтобы система $\{e^{\pm i\lambda_n x}\}$ не была полной на каждом интервале длиной $> 2\pi D$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала последовательность положительных чисел $\{\mu_n\}$ с плотностью $\leqslant \varepsilon$, обладающая свойством: функция $G(x) \times G_\varepsilon(x)$, где

$$G_\varepsilon(x) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{\mu_n^2}\right)$$

удовлетворяет условию вида (1).

Последовательность $\{\lambda_n\}$ называется заглаживаемой (redress able), если для любого $\varepsilon > 0$ действительно имеется последовательность $\{\mu_n\}$ со свойством, указанным в формулировке теоремы. Приводится ряд достаточных условий, налагаемых на $\{\lambda_n\}$, при которых $\{\lambda_n\}$ — заглаживаемая последовательность. Отметим следующие два из относящихся сюда результатов: 1) Если (теорема 8) полигон $L$, о котором говорилось выше, вогнутый, то $\{\lambda_n\}$ — заглаживаемая последовательность; 2) Пусть $n(t)$ — число $\lambda_m$, меньших или равных $t$, и пусть $\psi(t) = n(t) - Dt$ (последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет плотность $D$, в силу чего $\frac{n(t)}{t} \to D$ при $t \to \infty$). Если (теорема 11) для $p < 1$

$$\int_0^{\infty} \frac{|\psi(t)|}{t^{1+p}}\,dt < \infty,$$

то последовательность $\{\lambda_n\}$ — заглаживаемая.

А. Ф. Леонтьев

**3923. О конформных преобразованиях колец и об основном базисе пространства функций, аналитических в элементарной окрестности произвольного континуума.** Ерохин В. Д., Докл. АН СССР, 1958, 120, № 4, 689—692

Если $K$ — ограниченный континуум на плоскости $z$, не разделяющий плоскости, и $l_\rho$ — его линии уровня, т. е. прообразы окружностей $|w| = \rho$ при однолистном отображении $w = \varphi(z)$ внешности $K$ на $|w| > 1$, то хорошо известно (С. Н. Бернштейн), что из определенной скорости наилучших приближений полиномами на $K$ некоторой функции $f(z)$ можно заключить, что $f(z)$ аналитична внутри $l_\rho$ и наоборот. Этот факт связан с другим: в пространстве функций, аналитических внутри $l_\rho$ имеется базис из полиномов (этот базис образуют полиномы Фабера), разложения по которому сходятся на $K$ со скоростью наилучших приближений.

Если теперь $G$ — произвольная односвязная область, $G \supset K$, причем $G$ не совпадает с внутренностью $l_\rho$, то скорость полиномиальных приближений на $K$ не является точным критерием аналитичности в $G$. В связи с этим автор устанавливает следующую теорему:

Теорема 3. В односвязной области $G \supset K$ существует такой базис $e_0(z) \equiv 1, e_1(z), \ldots, e_n(z), \ldots$, что для того чтобы $f(z)$, определенная на $K$, была аналитической в $G$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого

$\delta > 0$ и любого натурального $n$ можно было найти „многочлен" $\sum_0^n a_k e_k(z)$ такой, что $|f(z) - \sum_0^n a_k e_k(z)| \leqslant C(\delta)\left(\frac{1+\delta}{R}\right)^n$, $z \in K$. При этом $C(\delta)$ зависит только $\sup_{z \in G} |f(z)|$, если $f(z)$ ограничена в $G$. Здесь $R$ — модуль двусвязной области $G \setminus K$.

Конструкция базиса $\{e_n z\}$ осуществляется с помощью следующей теоремы о конформном отображении двусвязных областей. Пусть двусвязная область $G$ ограничена континуумами $\Gamma$ и $K$. Обозначим через $\Gamma(K)$ ту из дополнительных к $\Gamma$ областей, которая содержит $K$; аналогичный смысл имеет обозначение $K(\Gamma)$.

Теорема 1. Для любой двусвязной области $G$, ограниченной континуумами $K$ и $\Gamma$, однолистное конформное отображение $w = \varphi(z)$ ее можно представить как суперпозицию: $\varphi(z) = \varphi^2(\varphi^1(z))$, где функции $t = \varphi^1(z)$ и $w = \varphi^2(t)$ аналитичны и однолистны в односвязных областях $\Gamma(K)$ и $K^1(\Gamma^1)$ ($\Gamma^1 = \varphi^1(\Gamma)$, $K^1 = \varphi^1(K)$) соответственно. Функция $t = \varphi^1(z)$ определяется по области $G$ однозначно с точностью до произвольного дробно-линейного преобразования плоскости $t$.

Как подчеркивает автор, его результаты возникли из задачи об асимптотике $\varepsilon$-энтропии классов аналитических функций, выдвинутой А. Н. Колмогоровым.

С. Я. Хавинсон

**3924. О знакопеременном методе Шварца — Неймана как методе приближенного конформного отображения. Штальман** (Über das alternierende Verfahren von Schwarz und Neumann als Näherungsmethode der konformen Abbildung. Stallmann F.), Z. angew. Math. und Mechn., 1958, 38, № 7-8, 279—280 (нем.)

Автор обращает внимание на то, что если односвязная однолистная область $G$ является пересечением любого конечного числа односвязных однолистных областей $G_\nu$, и $C$ есть граница $G$, то задача Дирихле в $G$ приводится к такому интегральному уравнению вида

$$g(\zeta) = f(\zeta) - \int_C g(\zeta_1)\, d\omega\ (\zeta; \zeta_1) \qquad (1)$$

($\zeta$, $\zeta_1$ — точки на $C$), в котором функция $\omega(\zeta; \zeta_1)$ отлична от нуля только на части границы области $G$. По утверждению автора, это существенно улучшает сходимость процесса последовательных приближений применительно к уравнению (1). В заключение автор высказывает некоторые соображения относительно дальнейших возможных обобщений рассмотренного им случая.

В. А. Зморович

**3925. Конформные инварианты и линейные дифференциальные уравнения. Нехари** (Conformal invariants and linear differential equations. Nehari Zeev), Semin. Analyt. Funct. Vol. I. Princeton, N. J., Inst. Advanced Study, (1958), 289—301 (англ.)

Пусть $D$ — плоская область конечной связности, $A$ и $B$ — некоторые подмножества $D$, а $f(z)$ и $p(z)$ — однозначные и аналитические в $D$ функции. Рассматривается задача о собственных значениях уравнения

$$\left[\frac{y'(z)}{f'(z)}\right]' + \lambda p(z)\, y(z) = 0,\ y(a) = y(b) = 0, \qquad (1)$$

где $a \in A$, $b \in B$, а функции $f(z)$ и $p(z)$ предполагаются, кроме того, выбранными так, чтобы задача (1) имела однозначные решения. Изложение ведется в упрощающем предположении однолистности $f(z)$.

Утверждается, что решение $y(z, \lambda)$ уравнения (1), подчиненное условиям $y(a, \lambda) = 0$, $y'(a, \lambda) = f'(a)$, является целой относительно $\lambda$ функцией, порядка не превосходящего $\frac{1}{2}$.

Выбирая пары $(a, b)$ и классы функций $f(z)$ и $p(z)$ конформно-инвариантным образом, автор вводит конформные инварианты при помощи экстремальных условий, налагаемых на собственные значения задачи (1). Так для классов функций $f(z)$ и $p(z)$, подчиненных условиям

$$\iint_D |f'(z)|^2\, d\omega = 1, \quad \iint_D |p(z)|^2\, d\omega = 1, \qquad (2)$$

($d\omega$ — элемент площади области $D$) вводится величина $\lambda(f) = \inf |\lambda|$, где $\lambda$ пробегает всевозможные собственные значения задачи (1) соответственно всевозможным функциям $p(z)$, удовлетворяющим условию (2) и всевозможным парам $(a, b)$, $a \in A$, $b \in B$. Конформный инвариант $\Lambda$ определяется равенством $\Lambda = \sup \lambda(f)$, где $f(z)$ пробегает множество всех однолистных в $D$ функций, подчиненных условию (2).

Другим условием конформно-инвариантного типа является $|f'(z)\, p(z)| \leqslant K(z, z)$, где $K(z, z)$ — кернфункция области $D$.

Аналогично предыдущему, для этого класса вводится величина $\lambda_0(f)$ и конформный инвариант $\Lambda_0$. Устанавливается, что $0 < \Lambda_0 \leqslant \Lambda < \infty$.

С помощью введенных конформных инвариантов, автор приводит новые достаточные условия однолистности. Отметим, например, теорему: Если $C$ — конформный класс областей, то существует положительная константа $\Lambda_0$ и область $D_0 \in C$ такие, что каждая функция $F(z)$, для которой $|\{F, z\}| < 2\Lambda_0 K(z, z)$, $\left[\{F, z\} = \left(\frac{F''}{F'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2\right]$, однолистна в $D_0$. При этом $\Lambda_0$ — наилучшая возможная константа.

В. В. Покорный

**3926. Моделирование функции, бесконечнолистно конформно отображающей двусвязную область на полосу. Тозони О. В.**, Изв. высш. учебн. заведений. Электромеханика, 1958, № 5, 14—22

Предлагается метод моделирования аналитической функции, бесконечнолистно конформно отображающей двусвязную область на полосу, комплексным потенциалом поля тока в проводящем листе. Пусть область $L$ ограничена двумя контурами $L_1$ и $L_2$. Функция $\Omega = v + iJ$, бесконечнолистно конформно отображающая область $D$ на полосу шириною $J_N$, определяется граничными условиями $J|_{L_1} = J_N$, $J|_{L_2} = 0$. Для ее моделирования в работе поступают следующим образом. Из проводящей бумаги изготовляются две модели одинакового размера в форме области $D$. У первой модели контакты присоединены к контурам $L_1$ и $L_2$, у второй—к берегам разреза по линии, соответствующей линии $J_1 = \text{const}$ первой модели, а контуры $L_1$ и $L_2$ свободны от контактов. На первой модели при помощи нульгальванометра, включенного по потенциальной схеме, строится семейство линий $J = \text{const}$ отображающей функции $\Omega$. На второй модели строится семейство линий $v = \text{const}$. Рассматриваются условия, при которых вещественная и мнимая части отображающей функции $\Omega$ на обеих моделях будут измеряться в одном и том же масштабе.

Н. А. Пахарева

**3927. О мероморфных однолистных функциях. Клуни** (On meromorphic schlicht functions. Clunie J.), J. London Math. Soc., 1959, 34, № 2, 215—216 (англ.)

Пусть $S_t$ — семейство функций $f(z) = \frac{1}{z} + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$, $|z| < 1$, отображающих круг $|z| < 1$ однолистно на области с дополнением, звездообразным относительно начала, $A_n = \sup_{f \in S_t} |a_n|$. Недавно Нехари и

Нетаньяху (РЖМат, 1958, 6632) показали, что $A=2(n+1)^{-1}$, $1\leqslant n\leqslant 6$, и что если $|a_n|=A_n$, то $f(z)=z^{-1}\prod_{\nu=1}^{n+1}(1-k_\nu z)^{\lambda_\nu}$, где $|k_\nu|=1$, $\lambda_\nu\geqslant 0$ и $\lambda_1+\ldots+\lambda_{n+1}=2$. Автор весьма просто доказывает следующую теорему.

Теорема. Для всех $n$ $A_n=2(n+1)^{-1}$. Если $|a_n|=A_n$, то $f(z)=z^{-1}(1+\lambda z^{n+1})^{2/(n+1)}$, $|\lambda|=1$. Ю. Е. Аленицын

**3928. О некоторых классах однолистных функций. Чакалов Л. Н.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 178—180

**3929. Гиперболический трансфинитный диаметр и некоторые теоремы об аналитических функциях в кольце. Кубо** (Hyperbolic transfinite diameter and some theorems on analytic functions in an annulus. Kubo Tadao), J. Math. Soc. Japan, 1958, **10**, № 4, 348—364 (англ.)

Применением к гиперболическому трансфинитному диаметру идей работы Хеймана „Некоторые приложения трансфинитного диаметра к теории функций" (Hayman W. K., J. analyse math., 1951, **1**, 155—179) доказываются две основные теоремы, аналогичные двум первым теоремам упомянутой работы Хеймана, но касающиеся гиперболического трансфинитного диаметра. Эти теоремы используются для получения ряда теорем, характеризующих множество значений, принимаемых функциями, регулярными или мероморфными в кольце, и принадлежащих некоторым определенным классам. Соответствующие оценки выражаются через параметр, определяющий экстремальную область Гретцша. Формулировать эти теоремы здесь было бы затруднительно, приведем только просто формулируемые теоремы об ограниченных функциях. Пусть $D$ есть кольцо $1<|z|<R$ и $\mathfrak{R}$ — класс всех тех функций $w=f(z)$, однозначных и аналитических в $D$, для которых множество $D_f$ значений $f(z)$ в $D$ лежит в области $|w|>1$ и которые при отображении кольца $D$ переводят окружность $|z|=1$ в окружность $|w|=1$. Обозначим через $\mathfrak{R}(M)$ класс всех функций $w=f(z)$ из $\mathfrak{R}$, ограниченных в $D$: $1<|f(z)|<M$, $z\in D$.

Теорема 6. Если $f(z)\in\mathfrak{R}(M)$, то $R\leqslant M$, где знак равенства имеет место только для $f(z)=\varepsilon z$, $|\varepsilon|=1$. Ранее эта теорема была доказана Шиффером (Nehari Z., Proc. London. Math. Soc., Ser. 2, 1949, **50**, 120—136). Пусть кольцо $D$ однолистно отображается функцией класса $\mathfrak{R}$ на кольцо $1<|w|<M$ с разрезом по отрезку $[\gamma, M]$, $\gamma>0$. Тогда $\gamma=\gamma(M)$.

Теорема 7. Если $f(z)\in\mathfrak{R}(M)$ и $d$ есть кратчайшее расстояние от начала до внешней границы области $D_f$ значений $f(z)$ в $D$, то $d\geqslant\gamma(M)$. Знак равенства имеет место только для функции, отображающей $D$ однолистно на кольцо $1<|w|<M$ с разрезом по отрезку $[\varepsilon\gamma(M), \varepsilon M]$, $|\varepsilon|=1$. Для однолистных функций эта теорема ранее была доказана Гретцшем (Grötzsch H., Verhandl. Sächsisch. Akad. Wiss Leipzig. Math.-naturwiss. Kl., 1°28, **80**, 363—369) и Комацу (Komatu Y., Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, 1943, **25**, 1—42). Обозначим через $\mathfrak{R}_c$ класс тех функций из $\mathfrak{R}$, для которых $\mathrm{Re}\, f(z)>-c$, $z\in D$, где $c$ — фиксированная положительная постоянная (необходимо $c\geqslant\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right)$).

Теорема 9. Пусть $f(z)\in\mathfrak{R}_c$ и $\tau$ есть любая точка на внешней границе $D_f$. Тогда $|\tau|\leqslant\frac{1+M\gamma(M)}{M+\gamma(M)}$, где $M+\frac{1}{M}=2c$, $M\geqslant R$, для каждого фиксированного $c$. Этот результат не может быть улучшен.

Теоремы 8 (о кругах не покрываемых функциями класса $\mathfrak{R}$) и 9 являются обобщениями соответствующих теорем, доказанных автором ранее для функций, однолистных в кольце (РЖМат, 1956, 2148). Ю. Е. Аленицын

**3930. О теоремах Гросса и Иверсена. Ловатор А. Дж.,** Докл. АН СССР, 1959, **126**, № 4, 707—708

Пусть $f(z)$ — функция, мероморфная в круге $|z|<1$ и $E$ — произвольное множество на $|z|=1$; $C(f, e^{i\theta})$ обозначает множество всех предельных значений $f(z)$ в точке $e^{i\theta}$, $C_\rho(f, e^{i\theta})$ — множество всех радиальных предельных значений в той же точке, $C_{R\setminus E}(f, e^{i\theta})=\bigcap_{\eta>0}\bigcup_{0<|\theta'-\theta|<\eta, e^{i\theta'}\in E} C_\rho(f, e^{i\theta'})$ (радиальное граничное предельное множество по отношению к $E$). Ссылкой на предшествующие работы автора (РЖМат, 1954, 2568; 1959, 6828; Duke. Math. J., 1952, **19**) формулируются теоремы: Если мера $E$ равна нулю, то каждое значение из $C(f, e^{i\theta})-C_{R\setminus E}(f, e^{i\theta})$, за возможным исключением множества емкости нуль, принимается $f(z)$ в любой окрестности точки $e^{i\theta}$. В случае существования исключительных значений эти значения являются асимптотическими либо в $e^{i\theta}$, либо в точках, сколь угодно близких к $e^{i\theta}$. Если емкость $E$ равна нулю, то каждое значение из $C(f, e^{i\theta})-C_{R\setminus E}(f, e^{i\theta})$, за возможным исключением конечного числа точек, принимается $f(z)$ в любой окрестности $e^{i\theta}$. Остается невыясненным, можно ли утверждать, что число исключительных точек не превосходит 2. Библ. 11 назв. А. И. Маркушевич

**3931. Граничное поведение мероморфных функций. Ловатер А.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, **4**. М., АН СССР, 1959, 163—164

**3932. О краевой задаче Римана с разрывными коэффициентами. Мельник И. М.,** Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 2, 158—166

Рассмотрена граничная задача теории функций комплексного переменного

$$\Phi^+(t)=G(t)\,\Phi^-(t)+g(t),\quad t\in L,\qquad(1)$$

где $L$ — совокупность конечного числа гладких непересекающихся замкнутых или разомкнутых линий, $G(t)$, $g(t)$ — заданные на $L$ функции, а $\Phi(z)$ — искомая кусочно-голоморфная функция. Развивая известные результаты, касающиеся задачи (1) (Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, М.—Л., 1946, § 79, 81), автор изучает задачу (1) в случае, когда $G(t)$ имеет разрывы как первого, так и второго рода, причем, если $c_k$ есть точка разрыва $G(t)$, то в случае замкнутой линии предполагается, что $G(c_k+0)\neq 0$, а предел $G(c_k-0)$ может обращаться в нуль или в бесконечность степенно-логарифмического характера. Если линия $L$ разомкнута, то предполагается, что $G(t)$ может обращаться на концах линий в нуль или в бесконечность логарифмического характера (случай степенного характера автор рассмотрел в предыдущей работе: РЖМат, 1959, 287). Б. В. Хведелидзе

**3933. Краевая задача Римана над полем алгебраических функций для систем $n$ пар функций. Месис А. В.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4**. М., АН СССР, 1959, 49

**3934. Экстремальные длины и геометрия «в целом». Херш** (Longueurs extrémales et géométrie globale. Hersch Joseph), Ann. scient. Ecole norm. supér., 1955, **72**, № 4, 401—414 (франц.)

Показано, как с помощью понятия экстремальной длины семейства кривых (РЖМат, 1957, 477 К, 293—298; 1958, 292 К, гл. VI. 4, IX. 10) можно единым простым методом получить разнообразные теоремы интегральной геометрии. Экстремальная длина семейства кривых определяется в статье для двумерных римановых многообразий. Существенно используется инвариантность экстремальной длины относительно конформных отображений и известная оценка сверху точной нижней грани длин кривых семейства через корень квадратный из произведения экстремальной длины семейства и площади области, в которой это семейство рассматривается. Следующие теоремы типичны:

1. Пусть $T$ — жорданов треугольник площади $A$. На каждой стороне $T$ (на одной из сторон $T$) существует бесконечное число точек, сумма расстояний (в $T$) от которых до двух других сторон $\leqslant \sqrt{2A}\left(\leqslant \sqrt{\sqrt{3}A}\right)$. В $T$ можно вписать жорданов треугольник с периметром $\leqslant \sqrt{2\pi A}$.

2. Пусть $A$ — площадь риманова многообразия $R$, топологически эквивалентного проективной плоскости. Тогда на $R$ существует бесконечное число циклов негомотопных нулю с длиной $\leqslant \sqrt{\pi A/2}$ (этот результат уточняет одну теорему Пу Бао-мина (Pu P. M., Pacific J. Math., 1952, 2, 55—71).

3. Пусть $S$ — поверхность, образованная вращением жордановой области вокруг оси, имеющей одну общую точку с границей области; $A$ — площадь $S$. Тогда длина каждой параллели на $S$ не превышает $\sqrt{2\pi A}$.

А. А. Гольдберг

**3935. О нулях одного класса неоднозначных функций. Мейман Н. Н.,** Докл. АН СССР, 1959, **124**, № 6, 1211—1214

Пусть область $G$ обладает следующими свойствами: 1) точка $z=\infty$ не является внешней точкой $G$; 2) $\mathrm{fr}\,G$ (граница $G$) состоит из кусочно-аналитических компонент, причем любой круг пересекается лишь с конечным числом компонент границы; 3) каждая точка $\mathrm{fr}\,G$ имеет в $G$ некоторую угловую окрестность. Универсальную накрывающую $G$ обозначим $\widetilde{G}$. Зафиксируем точку $z_0 \in G$ (или $z_0$ на каком-нибудь листе $\widetilde{G}$), $z_0 \neq \infty$, и обозначим $\rho(z)$ $\inf$ длин кривых, соединяющих в $G(\widetilde{G})$ точку $z \in G(\widetilde{G})$ с $z_0$. Однозначную аналитическую в $G(\widetilde{G})$ функцию $f(z)$ будем называть допустимой в $G(\widetilde{G})$ если $f(z)=g(z)+ih(z)$, где $g(z)$ и $h(z)$ — однозначные аналитические вплоть до регулярных точек $\mathrm{fr}\,G$ ($\mathrm{fr}\,\widetilde{G}$), вещественны на $\mathrm{fr}\,G$ ($\mathrm{fr}\,\widetilde{G}$) и не имеют общих нулей. Обозначим $\overline{f}(z)=g(z)-ih(z)$. Определим следующие классы допустимых функций в $G(\widetilde{G})$: 1) $f \in H$, если $f(z)\neq 0$ в $G(\widetilde{G})$; 2) $f \in B$, если $\varlimsup |\overline{f}(z):f(z)| \leqslant 1$ при $\rho(z)\to\infty$; 3) $HB=H\cap B$. В случае, когда $G=\widetilde{G}$ является верхней полуплоскостью, класс допустимых функций совпадает с классом целых функций и классы $B$ и $HB$ изучались во многих работах. В реферируемой работе результаты автора (Чеботарёв Н. Г., Мейман Н. Н., Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1949, **26**, гл. VI) для целых функций классов $B$ и $HB$ распространяются на общий случай.

Пусть $M$ — множество точек области $G(\widetilde{G})$, в которых $|\zeta(z)|=|\overline{f}(z):f(z)|>1$, $N$ — взаимно однозначный образ $M$ при отображении $\zeta(z)$. Граничной кратностью точки $z$ называется кратность, с которой $z$ входит в $\mathrm{fr}\,M$. Сумма граничных кратностей всех корней уравнения $h(z):g(z)=\lambda$ называется $\lambda$-индексом $f(z)$ и обозначается $S_\lambda f$.

Теорема 2. Для того чтобы $f(z)\in B$, необходимо и достаточно, чтобы $N$ состояло из конечного числа полных листов, расположенных над $|\zeta|>1$. Число нулей $f(z)$ в $G(\widetilde{G})$ равно числу листов $N$.

Теорема 3. Пусть $f(z)=g(z)+ih(z)$ — допустимая в $\widetilde{G}$ функция и точка $z'$ является $k$-кратным корнем $h(z):g(z)=\lambda$, где $\lambda$ вещественно ($\lambda=\infty$ не исключается). Тогда граничная кратность точки $z'$ есть целое число, равное: $k$, если $z' \in \widetilde{G}$; $\alpha k/2$, если $z'$ является угловой точкой границы с раствором $\alpha\pi$ и $\alpha k$ четное (для допустимых функций $\alpha k$ являются натуральными числами) и $(\alpha k \pm 1)/2$, если $\alpha k$ нечетное, причем $+$ ($-$) берем, если $\arg f(z)$ убывает (возрастает) в точке $z'$.

Теорема 4. Если $f(z)\in B$ относительно $G(\widetilde{G})$, то $S_\lambda f$ не превышает числа нулей $f(z)$ в $G(\widetilde{G})$, и если $\lambda$ не является асимптотическим значением отношения $h(z):g(z)$ в $G(\widetilde{G})$, то $S_\lambda f$ равно числу нулей $f(z)$ в $G(\widetilde{G})$.

Для функций $\varphi(z)$, мероморфных на $\widetilde{G}$, получена теорема типа Фрагмена—Линделёфа. Подробно изучен случай, когда $\mathrm{fr}\,G$ состоит из конечного числа интервалов на вещественной оси. Приведем одну из теорем.

Теорема 5. Пусть $\mathrm{fr}\,G$ состоит из конечного числа интервалов на вещественной оси, в том числе не более одного полубесконечного интервала. Тогда для любой допустимой $f(z)$ $S_\lambda f = Sf = \sup\limits_\lambda S_\lambda f$ для всех вещественных $\lambda$ с возможными двумя исключениями. Исключительные $\lambda$ равны асимптотическим значениям $h(z):g(z)$. Если имеются два исключительных значения, то $Sf=\infty$ и $f(z)$ имеет бесконечное число нулей в $G$. $f(z)\in B$ тогда и только тогда, когда $Sf<\infty$. Если $f(z)\in B$, то имеется не более одного исключительного $\lambda$ и число нулей $f(z)$ в $G$ равно $Sf$.

Рассмотрены примеры. Доказательства не приводятся. Имеются мелкие опечатки. А. А. Гольдберг

**3936. Замечание по поводу одного специального случая теоремы Гаусса — Люка в геометрии нулей полиномов. Кёйперс, Велдкамп** (Commentary on a special case of the Gauss—Lucas theorem in the geometry of the zeros of polynomials. Kuipers L., Veldkamp G. R.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1958, **A61**, № 4, 430—433; Indagationes math., 1958, **20**, № 4, 430—433 (англ.)

Анализируя неточное доказательство одной из теорем о взаимном расположении нулей полинома и его производной на комплексной плоскости, авторы приходят к следующей геометрической задаче. На коническом сечении $\varepsilon$ заданы $n$ точек $P_1,\ldots,P_n$. Найти в плоскости $\varepsilon$ пару точек $G_1$ и $G_2$ таких, что прямые $P_iG_1$ и $P_iG_2$ симметричны относительно нормали $p_i$ к $\varepsilon$ в точке $P_i$ ($i=1,\ldots,n$). При $n=2, 3$ задача имеет нетривиальные решения; в последнем из этих случаев $G_1$ и $G_2$ располагаются на некоторой кривой 3-го порядка. При $n=4$ $G_1$ и $G_2$ совпадают с фокусами $\varepsilon$. Г. Н. Чеботарев

**3937. Обобщение теории Нёрлунда о главном решении линейного разностного уравнения. II. Сиккема** (A generalization of Nörlund's theory of principal solutions of linear difference equations. II. Sikkema P. C.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1956, **A59**, № 1, 83—94; Indagationes math., 1956, **18**, № 1, 83—94 (англ.)

В первой части (РЖМат, 1958, 270) были отмечены случаи а), б), в), г), когда уравнение (1) имеет решение $\eta(x)$ того же роста, что и функция $h(x)$. В случае

б) было указано (теорема 2), в каком виде можно брать соответствующее решение $\eta(x)$. Во второй части доказаны теоремы, аналогичные теореме 2 и относящиеся к оставшимся случаям а), в), г). А. Ф. Леонтьев

**3938. О распределении нулей инфрамногочленов. Ш и ш а** (On the location of the zeros of infrapolynomials. Shisha O.), Bull. Res. Council Israel, 1957, **F7**, № 1, 44—45 (англ.)

Приводятся без доказательства две теоремы частного характера. В. С. Виденский

**3939. О существовании некоторых общих экстремальных метрик. Д ж е н к и н с** (On the existence of certain general extremal metrics. Jenkins James A.), Ann. Math., 1957, **66** № 3, 440—453 (англ.)

Пусть $\mathfrak{R}$ — конечная риманова поверхность и $\mathfrak{R}'$ получается из $\mathfrak{R}$ удалением конечного числа точек. На $\mathfrak{R}'$ рассматриваются свободные семейства классов гомотопии $\mathfrak{H}_l$ двух типов ($i=1, 2,\ldots, k$). Классы $\mathfrak{H}_l$, $i=1,\ldots, j$, различных, нетривиальных, не гомотопных выделенным точкам, состоящие из простых замкнутых кривых. Классы $\mathfrak{H}_i$, $i=j+1,\ldots, k$ дуг, соединяющих граничные компоненты $\mathfrak{R}$ (не обязательно различные), причем существуют кривые $h_i\in\mathfrak{H}_l$ ($i=1,\ldots, j$) и дуги $h_l\in\mathfrak{H}_i$ ($i=j+1,\ldots, k$) попарно без общих точек. Далее, на $\mathfrak{R}$ рассматриваются конформно инвариантные метрики $\rho(w)\,|\,dw\,|$ ($w=u+iv$ — локальный параметр) с конечными интегралами $\int_\gamma \rho(w)|dw|$ ($\gamma$ — произвольная спрямляемая кривая) и $\iint_{\mathfrak{R}} \rho^2(w)\,du\,dv$. Фиксируются неотрицательные числа $a_i$ ($i=1, 2,\ldots, k$), не все равные нулю, и рассматриваются только такие допустимые метрики $\rho(w)\,|\,dw\,|$, что для локально спрямляемых кривых $h_i\in\mathfrak{H}_l$ величины $\int_{h_i}\rho(w)\,|\,dw\,|\geqslant a_i$. Доказывается, что при этих условиях модуль

$$M(a_1, a_2,\ldots, a_k)=\inf\iint_{\mathfrak{R}}\rho^2(w)\,du\,dv$$

достигается для некоторой экстремальной метрики вида $|Q(w)|^{1/2}\,|\,dw\,|$, где $Q(w)\,dw^2$ — квадратичный дифференциал на $\mathfrak{R}$, регулярный с точностью до возможных простых полюсов в выделенных точках. Траектории $Q(w)\,dw^2$ (определяются направлениями $Q(w)\,dw^2>0$) разбивают $\mathfrak{R}$ на допустимое семейство $\mathfrak{D}^*$ областей $D_l^*$ ($i=1, 2,\ldots, k$) ассоциированных с $\mathfrak{H}_l$. (Двусвязная область $D\subset\mathfrak{R}'$ по определению ассоциирована с классом гомотопии $\mathfrak{H}$ первого типа, если простые замкнутые кривые в $D$, разделяющие ее границы, содержатся в $\mathfrak{H}$; если $\mathfrak{H}$ состоит из указанных выше дуг (класс гомотопии второго типа), то $D$-четырехугольник называется ассоциированным с $\mathfrak{H}$, если пара его противоположных сторон расположена на тех же граничных компонентах, что концы дуг из $\mathfrak{H}$, причем дуги в $D$, соединяющие эти граничные компоненты, содержатся в $\mathfrak{H}$). Допустимое семейство $\mathfrak{D}$ состоит из областей $D_l$, ассоциированных с классами $\mathfrak{H}_l$ не более чем по одной и попарно взаимно простых. Доказывается, что

$$M(a_1, a_2,\ldots, a_k)=\sum_{i=1}^k a_i^2\,M_i^*,$$

где $M_i^*$ — модуль $D_i^*$ (определяется для $D_i^*$ как $M(a_1)$ с $a_1=1$). Для всякого другого допустимого семейства $\mathfrak{D}$ выполняется неравенство $\sum_{i=1}^k a_i^2\,M_i\leqslant M(a_1, a_2,\ldots, a_k)$ (обобщение известных лемм Грёчш). Доказательство получается путем изучения $\sup\sum_{i=1}^k a_i^2\,M_i$, сперва—для случая замкнутой поверхности, затем — методом удвоения — для конечной поверхности без выделенных точек, наконец, — для общего случая. Известное неравенство $M/Q\leqslant M'\leqslant MQ$ для модуля при $Q$-квазиконформных отображениях ($M'$ — модуль преобразованной фигуры) переносится и на рассматриваемый случай в связи с экстремальными квазиконформными отображениями и квадратичными дифференциалами. Библ. 19 назв.

Л. И. Волковыский

**3940. Операционные методы в теории комплексных функций. Н а д ь Б., К о р а н ь и А.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, **4**. М., АН СССР, 1959, 184—185

**3941. Проблема аналитичности функций многих действительных переменных. Н и к о л е с к у М.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, **4**. М., АН СССР, 1959, 183

**3942. О функциях двух комплексных переменных с заданным множеством особых поверхностей. А р а в и й с к а я Е. Н.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, **4**. М., АН СССР, 1959, 45

**3943. Проблемы роста гармонических и родственных им функций в $E^n$. Д и н г х а с** (Wachstumsprobleme harmonischer und verwandter Funktionen in $E^n$. Dinghas Alexander. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1958, Sar. AI, № 250/8, 14 S.) (нем.)

Пусть $E^n$ — евклидово пространство,

$$E^n=\{x;\ x=(x_1,\ldots, x_n),\ |\,x\,|^2=\sum_{l=1}^n x_l^2\}.$$

В дальнейшем в областях $G\subset E^n$ с границей $\Gamma$ рассматриваются действительные однозначные гармонические функции $u(x)$, удовлетворяющие условию Линделёфа:

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\,u(x)\leqslant 0\quad (x\in G,\ x_0\in\Gamma).$$

Пусть $\Gamma$ пересекается любой сферой с центром в $x=0$. Примем обозначения: $G_r=\{x;\ x\in G,\ |\,x\,|<r\}$; $S_r$—часть границы $G_r$, лежащая на сфере радиуса $r$;

$$S_n=\{x;\ |\,x\,|=1\};\quad \nabla u=\frac{1}{g}\left(\sum_{i=1}^{n-1} g_i^2\left(\frac{\partial u}{\partial v_l}\right)^2\right),$$

где $g=\prod_{k=1}^{n-1} g_k$ и $\sum_{i=1}^{n-1} g_i^2\,dv_i^2=ds^2$ — элемент длины на $S_n$; $G_m=\left\{x;\ x\in G,\ u(x)\geqslant\frac{1}{m}\right\}$; $G_m^r=$

$$=\{x;\ x\in G_m,\ |\,x\,|\leqslant r\};\ S_m^r=\{x;\ x\in G_m^r,\ |\,x\,|=r\},$$

$\Gamma_m^r$ — граница $S_m^r$.

В дальнейшем под $S_r$, $S_m^r$, $\Gamma_m^r$ понимается их центральная проекция на $S_n$. Пусть $V_m$ — класс действительных функций, определенных на $S_m^r$ и обладающих следующими свойствами: 1) функции $v\in V_m$ дифференцируемы во внутренних и непрерывны в граничных точках $S_m^r$; 2) $v=0$ при $x\in\Gamma_m^r$; 3) если $v\equiv 0$, то $v\overline{\in}V_m$; 4) $\int_{S_m^r}\nabla v\,d\omega<\infty$, $v\in V_m$. Положим

$$\lambda_m=\inf\left\{\int_{S_m^r}\nabla v\,d\omega\Big/\int_{S_m^r} v^2\,d\omega;\ v\in V_m\right\},$$

$$\sigma^2(r)=\lim_{m\to\infty}\{4\lambda_m(r)+(n-2)^2\},\quad \varphi(r)=\int_{r_0}^r\sigma(t)\,\frac{dt}{t},$$

$$\lambda(r)=\lim_{m\to\infty}\lambda_m(r),\quad \overset{+}{u}=\max\{0, u\},$$

$$\mu(r)=\int_{S_r}\overset{+}{u}{}^2\,d\omega,\quad \psi(r)=\int_{r_0}^r e^{\varphi(t)}\,\frac{dt}{t},$$

$$r_0>\inf\{\,|\,x\,|;\ x\in G,\ u(x)>0\}.$$

Доказывается, что функция $\mu(r)\,r^{n-2}$ есть выпуклая функция от $\psi(r)$ при $r \geqslant r_0$, величина $(\mu(r)\,r^{n-2} - \mu(r_0)\,r_0^{n-2})/\psi(r)$ положительна, монотонно возрастает и существует $\lim\limits_{r\to\infty}(\mu(r)\,r^{n-2})/\psi(r) = \alpha > 0$, если не всюду в $G$ $u(x) \leqslant 0$.

Если пересечение $S_x$ области $G$ плоскостью $E_x\,(x = x_n)$ ограничено при любом $x$, то полагаем

$$\mu(x) = \int_{S_x}^{+} u^2\,dx_1 \ldots dx_{n-1} \quad \varphi(r) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\lambda}\,dt,$$

$$\psi(x) = \int_{x_0}^{x} e^{2\varphi(t)}\,dt,$$

где $\lambda(x)$ определяется аналогично $\lambda(r)$.

Автор показывает, что $\mu(x)$ есть выпуклая функция от $\psi(x)$, причем существует $\lim \mu(x)/\psi(x) = \alpha > 0$, если не всюду в $G$ $u(x) \leqslant 0$.

Пусть

$$G \subseteq H = \{x;\, x_n > 0\},\ S_r = \{x;\, x \in G,\ |x| = r\},$$

$\theta$ — угол между радиусом-вектором $x$ и осью $ox_n$, $m(r) = \int_{S_r}^{+} u \cos\theta\,d\omega$, $x = 0$ — граничная точка $G$, тогда функции $\mu(r)\,r^{n-2}$ и $m^2(r)\,r^{n-2}$ будут выпуклыми функциями от $r^n$.

Автор указывает, что некоторые из его результатов остаются справедливыми и для решений других уравнений и систем с частными производными.

Ю. Т. Антохин

**3944. О плюригармонических функциях. Айзенберг Л. А.**, Докл. АН СССР, 1959, **124**, № 5, 967—969

Плюригармоническая функция — это действительная часть голоморфной функции $n$ комплексных переменных. В заметке рассматривается случай пространства $C^2$ двух комплексных переменных $w, z$. В этом случае плюригармоническая функция называется бигармонической. Пусть $D \subset C^2$ — двоякокруговая область с центром в точке $(0, 0) \in D$, ограниченная дважды непрерывно дифференцируемой, аналитически выпуклой извне гиперповерхностью

$$\{|w| = r_1(\tau),\ |z| = r_2(\tau),\ 0 \leqslant \tau \leqslant 1\},$$

где

$$r_1(0) = 0,\ 0 < r_1'(\tau) < \frac{r_1(\tau)}{\tau},$$

$$r_1(1) < \infty,\ r_2(\tau) = \exp\left[-\int_0^{\tau} \frac{\tau}{1-\tau}\,d\ln r_1(\tau)\right].$$

Далее,

$$l[f(w, z)] = w f_w' + \overline{w}\, f_{\overline{w}}' + z f_z' + \overline{z}\, f_{\overline{z}}',$$

$$l[f(r_1(\tau)\,u,\ r_2(\tau)\,ue^{-it}] = f + v f_v' + s f_s',$$

где $u = v + is$.

В заметке анонсируется

Теорема. $f(w, z)$ — действительная, непрерывно дифференцируемая функция в области $D$, $F = l(f)$. Для того чтобы функция $f$ была бигармонической в области $D$, необходимо и достаточно, чтобы, начиная с достаточно малых $r$, в этой области имела место одна из формул:

$$f(r_1(\tau_0)\,ke^{iQ_0},\ r_2(\tau_0)\,ke^{i(Q_0-t_0)}) = \frac{1}{4\pi^2} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\tau \int_0^{2\pi} F(r_1(\tau)\,m,\ r_2(\tau)\,me^{-it})\,d\alpha,$$

$$\int_0^{2\pi} f(r_1(\tau_0)\,n,\ r_2(\tau_0)\,ne^{-it_0})\,d\alpha =$$

$$= \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 F(r_1(\tau)\,u,\ r_2(\tau)\,ue^{-it})\,d\tau;$$

где $m = u + r\rho e^{i\alpha}$; $n = \kappa e^{iQ_0} + re^{i\alpha}$; $u = ke^{iQ_0}\rho$;

$$\rho = \tau \frac{r_1(\tau_0)}{r_2(\tau)} + (1-\tau)\frac{r_2(\tau_0)}{r_2(\tau)}\,e^{i(t-t_0)},\ 0 \leqslant k < 1,\ r > 0.$$

Б. А. Фукс

**3945. О представлении квазианалитических функций. Бадалян Г. В.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, **4**. М., АН СССР, 1959, 45—47

**3946. Теорема Фату для обобщенных аналитических функций. Гофман** (Fatou's theorem for generalized analytic functions. Hoffman Kenneth), Semin. Analyt. Funct. Vol. 2. Princeton, N. J., Inst. Advanced Study, (1958), 227—239 (англ.)

Продолжение работы Аренса и Сингера (РЖМат, 1957, 2486). Обозначения те же, что и в указанном реферате. Комплексная функция $F(\zeta)$, определенная на диске $\Delta$ (пространстве максимальных идеалов кольца $A_1$) называется аналитической, если она на каждом компактном подмножестве области $\Delta - \Gamma$ равномерно аппроксимируется функциями из $A_1$. Доказывается теорема: для всякой ограниченной аналитической функции предел $F(a) = \lim\limits_{\rho\to 1} F(\rho a)$ существует почти для всех $a \in \Gamma$, за исключением множества меры $m\zeta$, равной нулю для каждого $\zeta \in \Delta - \Gamma$, и имеет место аналог интеграла Пуассона

$$F(\rho a) = \int_{\Gamma} F(ab)\,m_{\rho}(db).$$

Г. Е. Шилов

**3947. Исследование некоторых классов дискретных аналитических функций. Мередов М.**, Ылмы язгылар. Түркм. унив., Уч. зап. Туркм. ун-та, 1957, вып. 11, 307—330

Работа посвящена исследованию некоторых классов так называемых дискретных функций, определенных в точках с целочисленными координатами комплексной плоскости. Рассматриваются дискретные аналитические функции, удовлетворяющие условию:

$$f(z+1+i) - f(z) - if(z+1) + if(z+i) = 0,$$

и дискретные гармонические функции, удовлетворяющие конечноразностному аналогу уравнения Лапласа. Исследуются свойства и строятся некоторые примеры дискретных гармонических функций.

Установлены рекуррентные соотношения для последовательностей символических степеней $z^{(n)}$ и $z^{*(n)}$ в форме

$$z^{(n)} = z \cdot z^{(n-1)} + \frac{(n-1)(n-2)}{4}\,z^{(n-3)}\,\overline{z} +$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{16}\,z^{(n-4)}$$

и

$$z^{*(n)} = 4\{\overline{z}\,z^{*(n-1)} +$$

$$+ 4(n-1)(n-2)[z\,z^{*(n-3)} + (n-3)(n-4)\,z^{*(n-4)}]\}.$$

Получена биномиальная формула для $z^{(n)}$. Найдены оценки сверху и снизу для $z^{(n)}$ и $z^{*(n)}$:

$$\frac{n!\,(2n)^{k-1}}{2^n\,(k-1)!} < |z^{(n)}| < \frac{n!}{2^n}\,n^{|x|+|y|}$$

$$2^n \cdot n! \frac{(2n)^{k-1}}{(k-1)!} < |z^{*(n)}| < 2^n \cdot n! \, n^{|x|+|y|},$$

где $k = \max(|x|, |y|)$.

Рассматривается ряд дискретных функций $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ и устанавливаются некоторые его свойства. Исследуется "степенной" ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{(k)}$. Получен некоторый дискретный аналог ряда Тейлора, доказана теорема, являющаяся аналогом теоремы Лиувилля. Построен некоторый аналог функции $\frac{4}{z}$. Указываются методы построения дискретных аналитических функций. В частности, если $\Phi(u, v)$ — некоторая регулярная функция в области $G: |u| \leqslant 1$, $|v| \leqslant 1$, то функция

$$f(x, y) = -\frac{1}{\pi^2} \oint_{|u|=1} \left( \oint_{|v|=1} \frac{(u^x v^y - 1)\, \Phi(u, v)}{1 + i(u-v) - uv} \, dv \right) du$$

является дискретной аналитической в I, II и IV квадрантах.

В заключение дается приложение развиваемой теории к доказательству арифметических тождеств.

Н. А. Фуксман

**3948. Об аналитических и *P*-аналитических функциях дискретного аргумента, допускающих моделирование. Силич** (Про аналітичні та *P*-аналітичні функції дискретного аргументу, що допускають моделювання. Сіліч З. О.), Наук. зап. Київськ. ун-т, 1957, **16**, № 16, 239—246 (укр., рез. русск.)

Вводится определение аналитической функции дискретного или сетчатого аргумента в сетчатой области, формально отличное от определения, введенного Ж. Ферран, Н. П. Романовым и другими авторами. Вещественная часть такой функции определена в узлах квадратной сетки и удовлетворяет разностному уравнению Лапласа, а мнимая часть определена в так называемых „фиктивных точках", являющихся серединами отрезков, соединяющих соседние узлы. Вещественная и мнимая части связаны некоторыми соотношениями, введенными автором. Доказывается, что мнимая часть аналитической функции дискретного аргумента удовлетворяет разностному уравнению Лапласа в области, составленной из фиктивных точек. Далее вещественная часть аналитической функции дискретного аргумента доопределяется в фиктивных точках как среднее арифметическое ее значений в двух ближайших узлах сетки. Доказывается, что вещественная часть удовлетворяет разностному уравнению Лапласа в области, составленной из фиктивных точек, и в этих точках вещественная и мнимая части удовлетворяют разностным условиям Коши — Римана, которые непосредственно моделируются при помощи электрического тока. Указанная физическая интерпретация аналитической функции дискретного аргумента позволяет ее определить на модели в любой сетчатой области, если задана ее вещественная часть на границе области.

Указывается, что при неограниченном уменьшении шага сетки $h$ разностные условия Коши — Римана переходят в условия Коши — Римана из теории функций комплексного переменного, а построенная физическая модель аналитических функций дискретного аргумента вырождается в модель аналитических функций комплексного переменного.

Доказывается теорема о том, что построенная указанным методом аналитическая функция дискретного аргумента при уменьшении шага $h$ как угодно мало отличается от точного решения краевой задачи теории аналитических функций при граничном условии $U|_L = \varphi(s)$.

Доказанная теорема позволяет приближенно решать краевые задачи теории аналитических функций при помощи моделирования аналитических функций дискретного аргумента.

Аналогично строятся *P*-аналитические функции дискретного аргумента, допускающие электромоделирование

Н. А. Фуксман

**3949. Соответствие границ при топологических отображениях плоских областей с переменными границами. Суворов Г. Д.**, Докл. АН СССР, 1959, **124**, № 4, 772—774

Автор распространяет развитую им теорию простых концов последовательности плоских областей, сходящейся к невырожденному ядру (в смысле Каратеодори) при конформных отображениях на случай более общих топологических отображений, а именно отображений, принадлежащих к классу $C_k$; при этом отображение $w = T(z) = f_1(x, y) + if_2(x, y)$, $z = x + iy$, плоской области $D$ (открытой или замкнутой) принадлежит классу $C_k$ в $D$ (относительно системы прямоугольных координат $x, y$), если $f_1, f_2$ обладают первыми частными производными в смысле С. Л. Соболева, суммируемыми с квадратом, и

$$\iint_D \sum_{i=1}^{2} \operatorname{grad}^2 f_i \, dx dy \leqslant k.$$

В качестве примера приведем аналог теоремы Каратеодори для отображений класса $C_k$:

Пусть $w = T_n(z)$, $T_n(0) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, отображает круг $Q_0$: $|z| < 1$, на области $B_n$, причем все $B_n$ расположены в конечной части плоскости $w$ и последовательность $\{B_n\}$ имеет невырожденное ядро относительно точки 0. Если $T_n \in C_k$ в $Q_0$ и $\tau_n = T_n^{-1}$, $\tau_n \in C_k$ в $B_n$, то можно определить последовательность целых чисел $\{n'\}$ такую, что:

1) $\{B_{n'}\}$ сходится относительно точки 0 к невырожденному ядру $B_0$;

2) $\{T_{n'}\}$ сходится к топологическому отображению $T$, $T(Q_0) = B_0$;

3) $\{\tau_{n'}\}$ сходится в $B_0$ к топологическому отображению $\tau = T^{-1}$.

Ю. Ю. Трохимчук

**3950. Применение комплексных потенциалов и обобщенных функций в задачах о штампе, круглом в плане. Ростовцев Н. А.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 111—112

**3951. Ускоренно движущееся тело с вихревым следом в переменном двумерном потоке. Пауэр** (Accelerating body with vortex trail in variable two-dimensional flow. Power G.), Z. angew. Math. und Mech., 1959, **39**, № 3-4, 139—146 (англ.; рез. нем., франц., русск.)

Получены выражения для гидродинамических сил, действующих на цилиндр, оставляющий вихревой след при движении в невязкой несжимаемой жидкости. Заданное неравномерное движение среды аппроксимируется рядом переменных спиралеобразных вихрей. Отмечается, что, поскольку положенные в основу допущения на практике никогда вполне не реализуются, полученные результаты нужно рассматривать лишь как приближение, позволяющее оценивать порядок соответствующих величин.

М. Т. Нужин

**3952 К. Задачник-практикум по курсу теории функций комплексного переменного. (Для студ.—заочн., матем. специальности пед. ин-тов). Авдеев Н. Я.**, М., Учпедгиз, 1959, 46 стр., илл., 65 к.

**3953 К. Практические занятия по конформным отображениям. Коппенфельс, Штальман** (Praxis der konformen Abbildung. Koppenfels Werner

von, Stallmann Friedemann. Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer, 1959, XIII, 375 S., 69.—DM). Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, **A**, № 25, 1943 (нем.)

**3954 Д. Геометрия ограниченных однородных областей в $n$-мерном комплексном пространстве и теория автоморфных функций. Пятецкий-Шапиро И. И.** Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1959

---

**См. также:** 3742, 3743, 3755, 3757, 3895, 4195, 4200, 4223, 4227, 4292 Д, 4311, 4312

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

## ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редакторы *В. В. Немыцкий, Н. И. Мозжерова*

**3955. Сингулярные дифференциальные уравнения. Чечик В. А.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4.** М., АН СССР, 1959, 40—41

**3956. О практических методах решения систем нелинейных дифференциальных уравнений. Панкратов С. А.,** Изв. АН СССР. Отд. техн. н. 1957, № 8, 156—159

**3957. Применение теоремы о неподвижной точке к теории дифференциальных уравнений. Кордуняну** (Une application du théorème du point fixe à la théorie des équations différentielles. Corduneanu C.), An. ştiinţ. Univ. Iaşi, 1958, Sec. 1, **4**, № 2, 43—47 (франц.; рез. рум., русск.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$dx/dt = f(t, x),$$

где $f(t, x)$ — $n$-мерный вектор. Используя принцип неподвижной точки А. Н. Тихонова в локально выпуклых топологических пространствах, автор устанавливает некоторые нелокальные теоремы существования. Аналогичные теоремы известны и аналогичные методы уже применялись (см., например, работу Красносельского и Крейна и работу Стокса (Stokes)). В. В. Немыцкий

**3958. О матричном дифференциальном уравнении типа Риккати. Шандор** (Asupra ecuaţiei diferenţiale matriciale de tip Riccati. Şandor Ştefan), Comun. Acad. RPR, 1959, **9**, № 1, 11—15 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматривается матричное уравнение $\dot{W} + AW + WB + WCW + D = 0$, где $A, B, C, D$ — квадратные матрицы, зависящие от $t$. Доказывается, что если $W_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$, — решения, определенные в интервале $[\alpha, \beta]$ и такие, что $\det[W_3(\alpha) - W_2(\alpha)] \neq 0$, $\det[W_4(\alpha) - W_1(\alpha)] \neq 0$, то сложное отношение $[W_3(t) - W_1(t)][W_3(t) - W_2(t)]^{-1} \times [W_4(t) - W_2(t)][W_4(t) - W_1(t)]^{-1}$ постоянно. Если $R = \begin{pmatrix} DA \\ BC \end{pmatrix}$ — симметрическая матрица, а $C$ положительно определенная и если уравнение имеет симметрическое продолжаемое решение, то существует единственное продолжаемое решение $W_+$ такое, что

$$\lim_{t\to\infty} \lambda \left\{ \int_\alpha^t \Omega_\tau^\alpha (B + CW_+)\, C(\tau)\, [\Omega_\tau^\alpha (B + CW_+)]^* d\tau \right\} = \infty;$$

Здесь $\lambda\{z\}$ — наименьшее собственное значение матрицы $z$, $\Omega_\alpha^\beta(\xi)$ — фундаментальная матрица решений системы $\frac{dx}{dt} = P(t)\,x$, а $S^*$ — транспонированная матрица для $S$.

Это решение является нижним продолжаемым решением в том смысле, что для любого симметрического продолжаемого решения $W(t)$ имеем $W(t) \geqslant W_+(t)$ (т. е. $W(t) - W_+(t)$ — положительно определенная матрица). Устанавливаются также и другие свойства симметрических решений, аналогичные свойствам для скалярного уравнения Риккати. Все эти вопросы связаны с вопросами неколеблемости для систем второго порядка.

A. Halanay

**3959. Исключение специальных функций из дифференциальных уравнений. Пауэрс** (Elimination of special functions from differential equations. Powers John E.), Communs Assoc. Comput. Mach., 1959, **2**, № 3, 3—4 (англ.)

Показывается, как путем введения новых дополнительных искомых функций можно данное уравнение свести к системе более простых уравнений. В. В. Немыцкий

**3960. О дифференциальном уравнении Якоби и различных аналогиях. Бомпьяни** (Sull'equazione differenziale di Jacobi ed altre analoghe. Bompiani Enrico), Ann. mat. pura ed appl., 1955, **39**, 15—24 (итал.)

**3961. Решения в конечной форме однородных линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами. Латышева К. Я.,** Наук. зап. Київськ. ун-т, 1957, **16**, № 2, 137—157

**3962. Оценка области существования интеграла уравнения в частных производных первого порядка в случае комплексных переменных. Павельский** (Appréciation du domaine d'existence de l'intégrale d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, dans le cas de variables complexes. Pawelski W.), Ann. polon. math., 1955, **2**, № 1, 37—55 (франц.)

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n), \qquad (1)$$

где $q_i \equiv \frac{\partial z}{\partial y_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Функция $f(x, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n)$ — аналитическая по всем переменным в области (A): $|x - x_0| \leqslant k$, $|y_i - y_i^0| \leqslant k$, $|z - z_0| \leqslant k$, $|q_i - q_i^0| \leqslant k$ и $\varphi(y_1, \ldots, y_n)$ — аналитическая функция в области $(A_1)$: $|y_i - y_i^0| \leqslant k$; причем $|\varphi(y_1^0, \ldots, y_n^0) - z_0| < \frac{k}{4}$, $|\varphi_{y_i}(y_1^0, \ldots, y_n^0) - q_i^0| < \frac{k}{4}$. Модули $f$ и ее первых и вторых производных в области (A), модули первых и вторых производных функций $\varphi$ в области $(A_1)$ и числа $|q_i^0|$ $(i = 1, \ldots, n)$ меньше $M$. В этих предположениях уравнение (1) имеет единственный интеграл $z(x, y_1, \ldots, y_n)$, аналитический в области (B):

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y_i - y_i^0| \leqslant \frac{k}{4n(M+1)} - M|x - x_0|$$

$$\left(\text{где } \delta = \frac{k^3}{(2n+1)(n+1)^5(M+k+1)^5}\right),$$

который совпадает с функцией $\varphi(y_1, \ldots, y_n)$ в области (C):

$$x = x_0, \quad |y_i - y_i^0| \leqslant \frac{k}{4n(M+1)}.$$

Доказательство состоит из трех частей. В первой части оценивается радиус круга с центром в точке $x_0$, в котором существуют интегралы системы дифференциальных уравнений, определяемой совокупностью характеристик для уравнения (1), начальные значения которых удовлетворяют неравенствам $|y_i^* - y_i^0| \leqslant \frac{k}{2}$, $|q_i^* - q_i^0| \leqslant \frac{k}{2}$, $|z^* - z_0| \leqslant \frac{k}{2}$ и которые при $|x - x_0| \leqslant a$ и при этих начальных значениях удовлетворяют неравенствам

$$|y_i(x) - y_i^0| \leqslant \frac{3}{4}k, \quad |z(x) - z_0| \leqslant \frac{3}{4}k,$$

$$|q_i(x) - q_i^0| \leqslant \frac{3}{4}k.$$

Во второй части начальные значения подставляются в вычисленные функции: $y_i^* = v_i$, $z^* = \varphi(v_1, \ldots, v_n)$, $q_i^* = \frac{\partial \varphi}{\partial v_i}$, и показывается, что существует такое $\delta < a$, что в круге $|x - x_0| \leqslant \delta$ якобиан $J(v_1, \ldots, v_n) = D(\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_n})/D(v_1, \ldots, v_n)$ для функций $\overline{y_i}(x, v) = y_i\left(x, v_1, \ldots, v_n, \varphi(v_1, \ldots, v_n), \frac{\partial \varphi}{\partial v_i}\right)$ отличен от нуля, поэтому в этом круге преобразование $(T_x)$: $\overline{y_i} = \overline{y_i}(x, v)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ имеет единственное обратное.

В третьей части доказывается, что область (B) содержится в поле обратного преобразования $T_x^{-1}$, что заканчивает доказательство существования интеграла уравнения (1). Единственность интеграла следует из его аналитического вида и из того факта, что этот интеграл должен принимать в области (C) значения аналитической функции $\varphi(y_1, \ldots, y_n)$. В. Ф. Осипов

**3963. Об алгебраической особенности логарифмического типа элементарных решений линейных уравнений высших порядков. Теодореску Н.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, **4**. М., АН СССР, 1959, 161

**3964. Об одном линейном дифференциальном уравнении $n$-го порядка. Дуболарь В. К., Болотин А. С.,** Уч. зап. Кишиневск. ун-та, 1959, **39**, 285—292

В линейном уравнении

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \frac{d^{k+1}w}{dz^{k+1}} - z\frac{dw}{dz} - aw = 0 \qquad (1)$$

постоянные $a_k$ подбираются так, чтобы определяющее уравнение (см., например, Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, М.-Л., ГИТТЛ, 1941, стр. 220) имело бы вид

$$\rho(\rho - 1 + \alpha_1)(\rho - 1 + \alpha_2)\ldots(\rho - 1 + \alpha_{n-1}) = 0,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ — данные числа. При таком выборе параметров уравнение (1) имеет $n$ линейно независимых решений в виде обобщенных гипергеометрических рядов (там же, стр. 237). Указана возможность аналогичных построений для некоторых других линейных дифференциальных уравнений. Ю. С. Богданов

**3965. О структуре решений инвариантной линейной системы дифференциальных уравнений. Еругин Н. П.,** Докл. АН БССР, 1959, **3**, № 2, 33—37

Линейная дифференциальная система

$$\dot{x} = P(t)\,x \qquad (1)$$

названа инвариантной, если она не меняет вида при замене независимой переменной $t = \varphi(z)$. Основные результаты: 1) общее решение инвариантной системы (1) представимо как

$$x = T(z)\exp\left(B\int_{z_0}^{z} p(\tau)\,d\tau\right)c,$$

где $T, B$ — матрицы, $p$ — скаляр, $c$ — вектор, причем $T(\varphi(z)) \equiv T(z)$, $B = \text{const}$, $p(\varphi(z))\,\varphi'(z) \equiv p(z)$, $c = \text{const}$; 2) для инвариантной (1) найдено преобразование независимой переменной, переводящее (1) в систему с периодическими коэффициентами. Указано, что О. И. Самуэль (РЖМат, 1959, 4662) частично рассмотрел задачу 1) для системы (1) инвариантной относительно дробно-линейной $\varphi(z)$.

Примечание референта. Автор не оговаривает, что для существования неограниченного вместе с $t$ решения уравнения в конечных разностях (21) необходимо (и достаточно) $\varphi^n(z_1) \to \infty$ при $n \to \infty$ или $n \to -\infty$, где $\varphi^2(z) \equiv \varphi(\varphi(z))$ и т. д., для некоторого $z_1$.

Ю. С. Богданов

**3966. Асимптотическое решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений и его приложения к расчету оболочек и лопастей. Тумаркин С. А.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4**. М., АН СССР, 1959, 39—40

**3967. Логарифмическое разложение систем линейных дифференциальных уравнений с особой иррегулярной точкой. Терещенко** (Логарифмічні розв'язки систем лінійних диференціальних рівнянь з особливою ірегулярною точкою. Терещенко М. І.), Вісник Київськ. ун-ту, 1958, № 1, Сер. астрон., матем. та механ., вип. 1, 115—118 (укр.; рез. русск.)

Автор рассматривает системы линейных дифференциальных уравнений следующего вида

$$y' = t^k\left(\sum_{m=0}^{\infty} A_m t^{-m}\right)y, \qquad (1)$$

$k$ — целое положительное число, $A_m$ — постоянные квадратные матрицы. Утверждается, что систему (1) с помощью преобразования

$$y = e^{Q(t)E}u, \qquad (2)$$

где $E$ — единичная матрица, $Q(t)$ — некоторый полином степени $k + 1$, можно свести к системе

$$u' = \sum_{m=1}^{\infty}(A_{k+m}t^{-m})\,u. \qquad (3)$$

Далее исследуется, в каком случае решения системы (3) содержат логарифмические члены.

Примечание референта. Систему (1), вообще говоря, нельзя преобразованием (2) свести к системе (3).

Д. П. Костомаров

**3968. Об алгебраической теории дифференциальных уравнений Микусинского. Сикорский** (On Mikusiński's algebraical theory of differential equations. Sikorski R.), Studia math., 1957, **16**, № 2, 230—236 (англ.)

Если $F$ — линейное пространство решений всех линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, то преобразование $T$, определенное уравнением $Tx(t) = tx(t)$, является линейным эндоморфизмом для $F$ и $DTx(t) = TDx + x$, где $D$ обозначает обычное дифференцирование. Микусинский доказал, что для произвольного линейного пространства $F$ и абстрактного дифференцирования $D$ существует эндомор-

физм $T$ такой, что $DTx = TDx + x$. Автор дает новое доказательство этой теоремы. A. Halanay

**3969. Сравнение частот свободных колебаний корабля в море, описываемых совместными и несовместными дифференциальными уравнениями движения. Радосавлевич** (The comparison of the frequencies of free oscillations of a ship in a seaway based on the coupled and uncoupled differential equations of motion. Radosavljević Lj. B.), Internat. Shipbuild Progr., 1959, **6**, № 54, 63—71 (англ.)

Проблема движения корабля в море приводит к паре совместных линейных неоднородных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\ddot{\zeta} + a_{12}\ddot{\psi} + b_{11}\dot{\zeta} + b_{12}\dot{\psi} + c_{11}\zeta + c_{12}\psi = F_\zeta(t), \\ a_{21}\ddot{\zeta} + a_{22}\ddot{\psi} + b_{21}\dot{\zeta} + b_{22}\dot{\psi} + c_{21}\zeta + c_{22}\psi = F_\psi(t). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

В уравнении (1) не известны функции координат $\zeta$ и $\psi$, первая из которых представляет собой смещение гравитационного центра корабля в вертикальном направлении и другая — угол наклона при килевой качке.

Коэффициенты $a_{ik}$, $b_{ik}$ и $c_{ik}$ $(i, k = 1, 2)$ левой части уравнения (1) постоянны. Далее исследуются эти уравнения. В. В. Немыцкий

**3970. Об устойчивости решений уравнений с запаздывающим аргументом. Ван Лянь** (в подл. Ван Лиань), Sci. Rec., 1959, **3**, № 7, 280—288

Рассматривается система уравнений

$$\dot{x}_s(t) = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma}(t)\, x_\sigma(t) + q_{s\sigma}(t)\, x_\sigma(t - \tau(t)) + \quad (1)$$

$$+ X_s(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), x_1(t - \tau(t)), \ldots, x_n(t - \tau(t)),$$

где функция $X_s$ непрерывна и равномерна по $t$ удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам, начиная со второго, $p_{s\sigma}(t)$, $q_{s\sigma}(t)$ и $\tau(t)$ при $t \geqslant A$ — непрерывные ограниченные функции, $\tau(t) \geqslant 0$.

Доказывается сохранение асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1) при малых возмущениях запаздывания и малых изменениях функций $p_{s\sigma}(t)$, $q_{s\sigma}(t)$ и $X_s$ в предположении, что тривиальное решение уравнения (1) асимптотически устойчиво по показательному закону.

Примечание референта. Более сильные результаты по рассматриваемым в статье вопросам получены Н. Н. Красовским (РЖМат, 1957, № 3, 2316 и др.), однако метод доказательства в реферируемой статье совершенно отличен от метода Н. Н. Красовского. Л. Э. Эльсгольц

**3971. Спектральное разложение оператора $p^2 - q^2$. Кампен** (Spectral decomposition of the operator $p^2 - q^2$. Kampen N. G. van), Physica, 1958, **24**, № 7, 545—556 (англ.)

Рассматривается спектральное разложение оператора

$$H = -d^2/dx^2 - x^2 = p^2 - q^2$$

$\left(p = i\dfrac{d}{dx}\right.$, $q$ есть оператор умножения на $x)$.

Собственные функции $\varphi_\lambda(x)$ оператора $H$ являются функциями Вебера (Уиттекер, Ватсон, Курс современного анализа, Л.-М., Гостехиздат, 1934):

$$\varphi_\lambda(x) = D_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}i\lambda}(\pm(1+i)x).$$

Кроме выражения $\varphi_\lambda(x)$ через функции Вебера, автор дает для них непосредственное представление с помощью контурного интеграла аналогично тому, как это делается для гармонического осциллятора.

Доказана формула

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi_\lambda(x)\,\varphi_\lambda^*(x') + \overline{\varphi}_\lambda(x)\,\overline{\varphi}_\lambda^*(x')\right]dx = 8\pi^2\delta(x - x'),$$

устанавливающая, что спектр оператора $H$ является непрерывным, двукратно вырожденным и простирающимся от $-\infty$ до $+\infty$.

Далее автор рассматривает действие операторов $p$ и $q$ на функции $\varphi_\lambda(x)$.

Легко получаются тождества

$$q\varphi_\lambda(x) = x\varphi_\lambda(x) = -\frac{1}{2}(\lambda + i)\,\varphi_{\lambda+2i} + \frac{1}{2}\varphi_{\lambda-2i},$$

$$p\varphi_\lambda(x) = i\frac{d}{dx}\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{2}(\lambda + i)\,\varphi_{\lambda+2i} + \frac{1}{2}\varphi_{\lambda-2i}.$$

Однако эти формулы автора не удовлетворяют, поскольку стоящие в правой части функции являются возрастающими.

Для того чтобы обойти эту трудность, автор строит „волновые пакеты", состоящие из функций вида

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda)\,\varphi_\lambda(x)\,d\lambda,$$

где $a(\lambda)$ — функция, голоморфная в полосе $z = \lambda + i\mu$, $|\mu| < 2$, и непрерывная при $|\mu| \leqslant 2$. Оператор $q$ действует на $f(x)$ по формуле

$$qf(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda)\left[-\frac{1}{2}(\lambda + i)\,\varphi_{\lambda+2i}(x) + \frac{1}{2}\varphi_{\lambda-2i}(x)\right]d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda - 2i)\left[-\frac{1}{2}(\lambda - i)\right]\varphi_\lambda(x)\,d\lambda +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda + 2i)\,\varphi_\lambda(x)\,d\lambda.$$

Аналогично действует оператор $p$.

В последней части статьи обсуждается поведение решений полного уравнения Шредингера с оператором $H$. Ф. А. Березин

**3972. К вопросу о точечном спектре несамосопряженного дифференциального оператора 2-го порядка на полуоси. Агранович З. С.**, Уч. зап. Харьковск. гос. пед. ин-та, 1956, **18**, 3—17

**3973. Структура явного решения уравнения интегральных кривых одного класса систем двух дифференциальных уравнений с неголоморфными правыми частями. Еругин А. Н.**, Весці АН БССР. Сер. фіз.-тэхн. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-техн. н., 1958, № 4, 29—32

Настоящая работа является продолжением предыдущей работы того же автора (РЖМат, 1960, 2935). В ней решается та же задача, что и в работе [1], но в отличие от работы [1] здесь рассматривается система уравнений несколько более общая, а именно:

$$\frac{dx}{dt} = -y + P(x, y); \quad \frac{dy}{dt} = x + Q(x, y), \quad (1)$$

где $P$ и $Q$ — аналитические функции от $x$, $y$ и $\sqrt{x^2+y^2}$. Автор приводит систему (1) к полярным координатам $z$ и $\theta$:

$$\frac{dz}{d\theta} = \widetilde{R}_0(\theta)\,z^2 + \widetilde{R}_1(\theta)\,z^3 + \ldots = \sum_0^\infty \widetilde{R}_n(\theta)\,z^{n+2}, \quad (2)$$

где $\widetilde{R}_n(\theta) = g_n + \widetilde{\widetilde{R}}_n(\theta)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, $g_n = \text{const}$, $\widetilde{\widetilde{R}}_n(\theta)$ — $T$-полиномы. В случае, когда $g_0 = 0$, автор ищет решение уравнения (1), согласно второму методу Ляпунова, в виде ряда:

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} C^n u_n(\theta), \quad (3)$$

$u_1(\theta)=1$, $u_n(0)=0$, $(n=2,3,\ldots)$, $C$ — произвольная постоянная.

Если $g_0\neq 0$, то с помощью преобразования $z=r+r^2\widetilde{R}_0(\theta)$ уравнение (2) приводится к виду:

$$\frac{dr}{d\theta}=g_0r^2+R_1(\theta)\,r^3+\ldots=g_0r^2+\sum_{n=1}^{\infty}R_n(\theta)\,r^{n+2},$$

где $R_n(\theta)=g_n+\widetilde{R}_n(\theta)$ $(n=1,2,\ldots)$, $g_n=\text{const}$, $\widetilde{R}_n(\theta)$ — $T$-полиномы. Так же, как и в работе 1, автор получает явное уравнение интегральных кривых в форме

$$r=-\frac{1}{r_0\theta}\left[1+\gamma(\theta)+o\left(\frac{1}{\theta^x}\right)\right],$$

где $x=1,2,\ldots$, а $\gamma(\theta)$ имеет вид:

$$\gamma(\theta)=\sum_{r=0}^{x}\sum_{l=r}^{x}h_{r,l}\frac{\ln^r\theta}{\theta^l}+\sum_{r=0}^{x-2}\sum_{l=2+r}^{x}H_{r,l}(\theta)\frac{\ln^r\theta}{\theta^l},$$

где $h_{r,l}$ — постоянные, а $H_{r,l}(\theta)$ — $T$-полиномы, причем для определения этих постоянных и полиномов автор выводит рекуррентные формулы. Таким образом автор получает решение в виде асимптотически сходящегося ряда.

Автор показывает, что с точностью до бесконечно малых порядка $\frac{1}{\theta^{2x}}$, все интегральные кривые в окрестности начала имеют одно и то же аналитическое представление.

И. С. Куклес

**3974. Об особых точках и периодических решениях. Альбрехт** (Despre puncte singulare şi soluţii periodice. Albrecht Felix), Comun. Acad. R. P. R., 1955, **5**, № 7, 1035—1040 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — две действительные функции в $\Omega$ окрестности начала координат, для которых эта точка является изолированным нулем. Пусть $X(x,y,t)$ и $Y(x,y,t)$ — две периодические по отношению к $t$ функции класса $C$ в $\Omega$ и для $0\leqslant t\leqslant\omega$. Если: а) все вещественные ветви $R(x,y)=xP+yQ$ в $\Omega$ простые, б) множество $\Omega$ допускает по отношению к системе

$$dx/dt=P(x,y),$$
$$dy/dt=Q(x,y)$$

по крайней мере четыре последовательные точки внешнего касания $p_1$, $p_2$, $p_3$, $p_4$ и в) всякая точка внутреннего касания $p$ удовлетворяет некоторому условию, то существует такое $\mu_0>0$, что система

$$dx/dt=P(x,y)+\mu X(x,y,t),$$
$$dy/dt=Q(x,y)+\mu Y(x,y,t)$$

допускает при $|\mu|<\mu_0$ периодическое решение, расположенное в окрестности начала координат.

Резюме автора

**3975. Об устойчивых центрах. Сибирский К. С., Щербаков Б. А.**, Уч. зап. Кишиневск. ун-та, 1959, **39**, 219—224

Изучается существование особой точки типа центра, устойчивого относительно некоторой совокупности коэффициентов уравнения

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x+P(x,y)}{y+Q(x,y)},$$

где $P$ и $Q$ — полиномы от $x$ и $y$. Указываются все случаи устойчивых центров для уравнения, в котором $P$ и $Q$ — полиномы не выше третьей степени.

М. И. Альмухамедов

**3976. К вопросу о продолжении и устойчивости характеристических кривых. II. Ура Таро**, Сугаку, 1958, **9**, № 4, 218—235 (японск.)

Ч. I см. РЖМат, 1959, 2639

Вторая часть содержит §§ 3—7. § 3 посвящен изложению классических результатов Пуанкаре и Бендиксона об особой точке системы дифференциальных уравнений

$$dx/dt=ax+by+\xi(x,y),\quad dy/dt=cx+dy+\eta(x,y).$$

В § 4 определяется и обсуждается $D$-продолжение. Доказывается, что для каждого ненулевого множества $M$ $D^+(M)=\bigcup_{P\in M}D^+(P)$, где $D^+(P)$ представляет положительную полухарактеристику точки $P$.

В § 5 обсуждается устойчивость инвариантных множеств. Доказывается, что для замкнутого инвариантного множества $M$ необходимым и достаточным условием, чтобы $M$ было безусловно устойчивым, является $D^+(M)=M$.

В § 6 с помощью трансфинитной индукции повторяется предельный процесс для $D^+$ и то, что получается, обозначается $D_\alpha^+(M)$. Формулируются некоторые свойства $D_\alpha^+(M)$.

В § 7 устойчивость по $\lambda$ в точке. А затем это понятие распространяется на область.

Chin Yuan-shun.

**3977. Об уравнении $xy'=Ay^k+B(x)$. Сансоне Г., Конти Р.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, **4**. М., АН СССР, 1959, 156—161

**3978. Обобщение уравнения Ван-дер-Поля. Картрайт М. Л.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, **4**. М., АН СССР, 1959, 245

**3979. Графический метод изучения нелинейной системы на фазовой плоскости. Брайер** (Méthode graphique pour l'étude des systèmes non linéaires dans le plan des phases. Braier Alfred), Bul. Inst. politechn. Iaşi, 1958, **4**, № 3-4, 107—112 (франц.; рез. русск., рум.)

Приводится графоаналитический метод решения уравнений $\ddot{x}+\varphi(\dot{x})+x=0$ и $\ddot{x}+\varphi(x\dot{x})+g(x)=F(t)$. Метод автора аналогичен известному методу Ку (РЖМат, 1954, 3462).

В. В. Немыцкий

**3980. Начальные условия для определенного типа нелинейных колебаний. Хаяси** (Initial conditions for certain types of nonlinear oscillations. Hayashi Chihiro), Proc. Sympos. Nonlinear Circuit Analysis (1956, New York, N. Y.). Brooklyn, N. Y., Polytechn. Inst. Brooklyn, 1957, 63—92 (англ.)

**3981. Об одном определении наилучшей константы в теории дифференциальных уравнений. Фавар Ж.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4**. М., АН СССР, 1959, 183

**3982. О структурной устойчивости. Пейшоту** (On structural stability. Peixoto M. M.), Ann. Math., 1959, **69**, № 1, 199—222 (англ.)

В реферируемой статье автор продолжает исследования, начатые А. Андроновым и Л. Понтрягиным в работе (Докл. АН СССР, 1937, **14**, № 5, 247—250), где вводится определение грубых систем II порядка с аналитическими правыми частями и указываются без доказательства необходимые и достаточные условия грубости таких систем. Для систем класса $C^1$ доказательство выполнено в работе Баггиса (РЖМат, 1956, 8033).

Пусть $\sum^*$ — множество систем дифференциальных уравнений класса $C^1$:

$\dot{x}_i=X_i(x_1,\ldots,x_n)$ $(i=1,\ldots,n)$ (коротко: $X\equiv(X_1,\ldots,X_n)$), рассматриваемых на единичном шаре $B^n$ (круге $B^2$ при $n=2$) $\sum_{i=1}^n x_i^2\leqslant 1$ и определенных в некоторой области, содержащей $B^n$, такой, что векторное поле $X$ не имеет контакта с $S^{n-1}$-границей $B^n$ и всегда направлено внутрь $B^n$. Определим расстояние $\sum^*$ между $X\equiv(X_1,\ldots,X_n)$, $Y\equiv(Y_1,\ldots,Y_n)$, где $X,Y\in\sum^*$ следующим образом:

$$\rho(X, Y) = \max_{B^n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} | X_i - Y_i | + \right.$$
$$\left. + \left| \sum_{i,j=1}^{n} \left| \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} \right| \right| \right\}. \quad (1)$$

Система $X$ называется грубой, если существует $\delta > 0$ такое, что для каждой системы $Y$ с $\rho(X, Y) \subset \delta$ можно найти гомеоморфизм $T: B^2$ в себя, который преобразует траектории $X$ в траектории $Y$. Такая система $Y$ называется допустимым возмущением $X$ или, короче, допустимой. Это определение отличается от определения А. Андронова и Л. Понтрягина отсутствием ограничения на гомеоморфизм $T$ быть $\varepsilon$-гомеоморфизмом.

Переходя к рассмотрению систем $n$-го порядка, автор вводит определение 3 грубости системы $X \equiv (X_1, \ldots, X_n)$, которое получается из определения 2 заменой $B^2$ на $B^n$. В качестве примера грубой системы рассматривается система

$$x_i = -x, \; x = (x_1, \ldots, x_n).$$

Вопрос об эквивалентности определения 3 и соответствующего определения 1 (при $n > 2$) не исследуется.

Затем в статье дается используемое в дальнейшем определение 4: Гомеоморфизм $T: B^n$ в $B^n$ класса $C^2$ называется $C^2$-изотопным тождеству, если существует преобразование $F: B^n \times I \to B^n$.

Отметим следующие леммы:

Лемма 4. У грубой системы $X$ нет траекторий, идущих из седла в седло.

Лемма 6. Если $\gamma$ — предельный цикл $X$, то индекс устойчивости Пуанкаре

$$h(\gamma) = \frac{1}{\tau} \int_{\gamma} \operatorname{div}(X_1, X_2)\, dt \neq 0,$$

где $I = [0 \leqslant s \leqslant 1]$ такое, что $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) = T(x)$, $x \in B^n$ и для каждого $SF(x, s) = B^n \times S \to B^n$ является гомеоморфизмом класса $C^2$, причем соответствующие производные одновременно непрерывны по $x$ и $s$.

В следующем разделе статьи изучается характер вложения множества $\sum$ всех грубых систем в множество $\mathfrak{B}$ всех дифференциальных систем $X \equiv (X_1, \ldots, X_n)$ в $B^n$, рассматриваемое как действительное банахово пространство с расстоянием (1) между $X$ и $Y \in \mathfrak{B}$.

Теорема 2. $\sum$ есть открытый конус, состоящий не более чем из счетного числа компонент. Если $X, Y \in \sum$ принадлежат одной компоненте, то существует гомеоморфизм $T: B^n$ в себя, преобразующий траектории $X$ в траектории $Y$. Обратно, если такой гомеоморфизм класса $C^2$ и $C^2$, изотопный тождеству, существует, то $X$ и $Y$ принадлежат одной связной компоненте $\sum$.

Автор указывает, что для $n = 2$ множество $\sum$ имеет действительно бесконечное число связных компонент. В последней части статьи для $n = 2$ доказывается теорема 3 о том, что множество $\sum$ всюду плотно в $\Sigma^*$.

Е. А. Сидоров

**3983. Замечание по поводу асимптотического поведения интегралов дифференциальных уравнений. Важевский Т.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, 4. М., АН СССР, 1959, 150—151

**3984. О верхней границе характеристических показателей при малых возмущениях. Виноград Р. Э.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 14

**3985. Об устойчивости решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков. Огурцов А. И.**, Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 3, 200—209

Дано уравнение

$$\frac{d^3x}{dt^3} + \psi\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\frac{d^2x}{dt^2} + \varphi\left(\frac{dx}{dt}\right) + f(x) = 0, \quad (1)$$

где $f(x)$ непрерывно дифференцируема, $\varphi(y)$ непрерывна, $\psi(x, y)$ непрерывна по $x, y$ и имеет непрерывную производную по $x$ в области $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$.

Устанавливается:

Теорема 1. Если $f(x)$, $\varphi(y)$, $\psi(x, y)$ удовлетворяют условиям $\varphi(0) = f(0) = 0$, $f(x)\, x > 0$ при $x \neq 0$, $\psi(x, y) \geqslant \alpha > 0$, $\alpha \frac{\varphi(y)}{y} - f'(x) > 0$ при $y \neq 0$, $y \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \leqslant 0$,

$$\lim_{r \to \infty} \left[ \alpha \int_0^x f(x)\, dx + f(x)\, y + \int_0^y \varphi(y)\, dy \right] = \infty,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, то нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях.

Эта теорема является обобщением теорем Е. А. Барбашина (Прикл. матем. и механ., 1952, 16, № 5) и С. Н. Шиманова (РЖМат, 1954, 1188). Приводятся также некоторые другие условия устойчивости для уравнений третьего порядка.

Далее рассмотрено уравнение четвертого порядка

$$\frac{d^4x}{dt^4} + \psi\left(\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{d^3x}{dt^3} + c\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + ax = 0, \quad (2)$$

где $\psi(y, z)$ непрерывна и имеет непрерывную производную по $y$.

Автор доказывает, что для асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы (2) достаточно выполнение условий

$$\psi(y, z) > 0, \; bc\psi(y, z) - b^2 - a\psi^2(y, z) > 0, \; z\frac{\partial \psi(y, z)}{\partial y} < 0.$$

Для асимптотической устойчивости в целом нулевого решения уравнения

$$\frac{d^4x}{dt^4} + d\frac{d^3x}{dt^3} + c\frac{d^2x}{dt^2} + \varphi\left(\frac{dx}{dt}\right) + ax = 0 \quad (3)$$

($\varphi(y)$ — непрерывная) достаточно выполнения условий

$$a > 0, \; d > 0, \; \varphi(0) = 0, \; \varphi(y)\, y > 0 \text{ при } y \neq 0,$$
$$cd\frac{\varphi(y)}{y} - \left(\frac{\varphi(y)}{y}\right)^2 - ad^2 > 0.$$

Достаточные условия асимптотической устойчивости в целом нулевого решения уравнения

$$\frac{d^4x}{dt^4} + d\frac{d^3x}{dt^3} + c\frac{d^2x}{dt^2} + \varphi(x)\frac{dx}{dt} + ax = 0 \quad (4)$$

имеют вид: $a > 0$, $d > 0$, $\varphi(x) > 0$, $cd\varphi(x) - \varphi^2(x) - ad^2 > 0$. Все результаты получены путем построения функций Ляпунова для соответствующих нелинейных систем.

Е. А. Барбашин

**3986. Теория устойчивости. Каплан** (Stability theory. Kaplan Wilfred), Proc. Sympos. Nonlinear Circuit Analysis. (1956, New York, N. Y.). Brooklyn, N. Y., Polytechn. Inst. Brooklyn, 1957, 3—21 (англ.)

**3987. Об устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений. Барбашин Е. А.** Тр. Уральского политехн. ин-та, 1958, сб. 74, 91—98

Изучаются достаточные условия устойчивости тривиального решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$u_i'(t) = \sum_{k=1}^{n} F[x_i, x_k, t, u_k(t)]\, h + \lambda(t)\, u_i(t), \quad (1)$$
$$(i = 1, \ldots, n)$$

где

$$h=\frac{b-a}{n},\quad x_k=a+\left(k-\frac{1}{2}\right)h.$$

$F(x, s, t, u)$ и $\lambda(t)$ — заданные функции.

Пусть

$$F(x, s, t, u)\equiv K(x, s, t)\,u+R(x, s, t, u). \qquad (2)$$

Тривиальное решение уравнения

$$u'_t(x, t)=\int_a^b F[x, s, t, u(s, t)]\,ds+\lambda(t)\,u(x, t) \qquad (3)$$

автор называет асимптотически устойчивым по первому приближению, если оно устойчиво при всех функциях $R(x, s, t, u)$, удовлетворяющих условию $|R(x, s, t, u)|\leqslant\gamma(|u|)|u|$; $\gamma(|u|)\to 0$ при $u\to 0$. Приведем формулировку одной из теорем: Если тривиальное решение $u=0$ уравнения (3) асимптотически устойчиво по первому приближению, то при достаточно большом $n$ тривиальное решение системы уравнений (1) равномерно асимптотически устойчиво. Я. В. Быков

**3988. О периодических решениях обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Одзи Митио,** Оё рикигаку кэнкюсё сёхо, 1958, № 11, 21—31 (японск.)

Рассматривается дифференциальное уравнение типа

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x),$$

где $f$ — периодическая функция по $t$ и удовлетворяет условию Липшица по $x$. Методом неподвижной точки устанавливается существование периодического решения и обсуждается его устойчивость.

Результаты применяются для изучения колебаний поверхностных морских волн, описываемых уравнением

$$\frac{dx}{dt}=\begin{cases}-\rho\sqrt{x}-\sin t, & x\geqslant 0,\\ \rho\sqrt{-x}-\sin t, & x<0\end{cases}$$

с постоянной $\rho$.

Для $x>\frac{1}{\rho^2}$ $\frac{dx}{dt}<0$; для $x<-\frac{1}{\rho^2}$ $\frac{dx}{dt}>0$; для $|x|<\frac{1}{\rho^2}$ по теореме о неподвижной точке существует периодическое решение. Доказывается его единственность и устойчивость. Chin Yuan-shun

**3989. О почти периодических колебаниях в нелинейных системах с запаздыванием. Шиманов С. Н.,** Докл. АН СССР, 1959, **125**, № 6, 1203—1206

Устанавливаются условия существования почти периодических решений квазилинейных систем с запаздывающим аргументом:

$$\dot{x}(t)=\sum_{j=1}^{k}a_j x(t-\tau_j)+\varepsilon F(t, x(t-\tau_1),\ldots$$
$$\ldots, x(t-\tau_k), \varepsilon), \qquad (1)$$

где $x(t)$ — $n$-мерный вектор, $a_j$ — постоянная квадратная $n$-мерная матрица, $\varepsilon$ — малый параметр, $\tau_1=0$, постоянные $\tau_s>0$ $(s=2,\ldots,k)$, $F(t, x_1, x_2,\ldots,x_k, \varepsilon)$ — почти периодическая функция $t$ равномерно по отношению к переменным $x_1, x_2,\ldots,x_k$, удовлетворяющая условию Липшица по переменным $x_1, x_2,\ldots,x_k$.

Доказывается теорема: Если все корни $\lambda_l$ характеристического уравнения для порождающего линейного уравнения удовлетворяют условию $\mathrm{Re}\lambda_l<-2\alpha<0$, то при каждом достаточно малом по модулю $\varepsilon$ система (1) имеет почти периодическое решение $x(t, \varepsilon)$.

Эта теорема обобщается и на случай уравнения

$$\dot{x}(t)=\sum_{j=1}^{k}a_j x(t-\tau_j)+X(t, x(t-\tau_1),\ldots$$
$$\ldots, x(t-\tau_k))+\varepsilon F(t, x(t-\tau_1),\ldots, x(t-\tau_k), \varepsilon),$$

где $X(t, x(t-\tau_1),\ldots,x(t-\tau_k))$ удовлетворяет некоторому обобщенному условию Липшица. Доказательство проводится методом последовательных приближений.

Л. Э. Эльсгольц

**3990. Существование периодических колебаний $n$-кратного маятника в случае, когда отдельные корни его характеристического уравнения различны между собой. Брадистилов, Бояджиев** (Existenz periodischer Bewegungen eines $n$-fachen Pendels im Falle, daß einige Wurzeln seiner charakteristischen Gleichung ein Vielfaches einer anderen sind. Bradistilov G., Boyadjiev G.), Z. angew. Math. und Mech., 1959, **39**, № 7-8, 284—290 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

В одной из своих более ранних работ Брадистилов доказывает существование $n$ семейств периодических колебаний системы, состоящей из $n$ последовательно связанных маятников, лежащих в одной плоскости, в предположении, что ни один корень характеристического уравнения системы не является ни равным, ни даже кратным другому корню. В настоящей работе рассматривается тот же вопрос, причем, однако, допускается, что $p-1$ корней являются кратными другому.

Резюме авторов

**3991. Некоторые замечания к методу Пуанкаре — Лейтхилла — Ку (метод PLK). Тзян Ху-шен,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4**. М., АН СССР, 1959, 240—241

**3992. Асимптотическое разложение для решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных. Васильева А. Б.,** Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 3, 188—190

**3993. Обобщенные решения квазилинейного дифференциального уравнения в банаховом пространстве. Фояш Ч., Гусси Г., Поенару В.,** Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 5, 884—887

Рассматривается уравнение

$$\frac{dx}{dt}=A(t)\,x \qquad (1)$$

в пространстве Банаха $X$, где $A(t)$ — линейные замкнутые операторы с плотными в $X$ областями определения $D_{A(t)}$, удовлетворяющие условию.

C. I. Существуют такие последовательности идемпотентных операторов $J_n$, что $J_n\cdot J_m=0$ при $m\neq n$ и

1) $I=J_1+J_2+\ldots$ (ряд сходится сильно),
2) $J_nA(t)\subset A(t)J_n$, $n=1, 2,\ldots, t\in(a, b)$,
3) $A(t)J_n$ ограничен в $X_n=J_nX$,
4) $A(t)J_n$ непрерывен по норме в $X_{(n)}$ для $n=1, 2,\ldots t\in(a, b)$.

Рассматривается пространство $\mathfrak{X}$ последовательностей $\tilde{x}=\{x_n\}$, где $x_n\in X_{(n)}$ с семейством полунорм

$$p_{n_1, n_2,\ldots, n_k}(\tilde{x})=\sup(\|x_{n_1}\|,\ldots,\|x_{n_k}\|),$$

где $(n_1,\ldots,n_k)$ — любая конечная совокупность натуральных чисел.

Наряду с (1) рассматривается в $\mathfrak{X}$ уравнение

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}=\tilde{A}(t)\tilde{x}, \qquad (1')$$

где

$$\tilde{A}(t)\,\tilde{x}=\{A(t)\,x_n\}.$$

Теорема 1. 1) Задача Коши для уравнения (1′) имеет решение и притом единственное в $(a, b)$ для любых начальных данных из $\mathfrak{X}$. 2) Задача Коши корректна в $\mathfrak{X}$, т. е. на любом, содержащемся в $(a, b)$, замкнутом интервале решение зависит непрерывно от начального значения, равномерно относительно $t$. 3) Если $x(t)$ — решение задачи Коши для (1) и $x(c) = x_0$, то $\tilde{x}(t)$ — решение задачи Коши для (1′) и $\tilde{x}(c) = \tilde{x}_0$.

Далее исследуются свойства решения задачи Коши для уравнения (1′) и связь их с решениями этой задачи для уравнения (1). При этом на оператор $A(t)$ налагаются ограничения, несколько более слабые, чем у Като (РЖМат, 1955, 2769). Во второй части рассматривается нелинейное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + f(t,\ x).$$

А. М. Красносельский

**3994 К. Несколько лекций из курса обыкновенных дифференциальных уравнений. Азимов М. А.** (Ади дифференсиал тәнликләр курсундан бир нечә мүһазирә. Әзимов М. Ә. Азәрб. девләт гияби пед. инст. Бакы, 1958 109 сәһ., шәкилли, пулсуз), (азерб.)

**3995 К. Учебное пособие по курсу высшей математики. Дифференциальные уравнения. Болгов М. И.** Всес. заочн. энерг. ин-т. М., 1959, 68 стр., илл., 1 р. 25 к.

**3996 К. Дифференциальные уравнения. Кито.** Ому-ся, 1954, 177 стр., 190 иен. Кокунай сюппанбуцу мокуроку, Japan. Nat. Bibliogr., 1954, **6**, № 6, 16 (японск.)

**3997 Д. К теории характеристических показателей Ляпунова. Виноград Р. Э.** Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., МГУ, М., 1959

## УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Редакторы *И. Н. Векуа, Н. И. Мозжерова*

**3998. Новые результаты итальянских математиков в теории уравнений с частными производными. Миранда М.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4**. М., АН СССР, 1959, 155—156

**3999. Асимптотические разложения решения уравнений в частных производных по степеням малого параметра при старшей производной. Панич О. И.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4**. М., АН СССР, 1959, 36

**4000. О существовании решения уравнений Навье — Стокса. Лион** (Sur l'existence de solutions des équations de Navier — Stokes. Lions Jacques-Louis), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 20, 2847—2849 (франц.)

Рассматриваются решения уравнений Навье-Стокса в ограниченной области $\Omega$ евклидова пространства $R^n$ ($n = 2, 3, 4$), обращающиеся в нуль на границе $\Omega$. Для них устанавливается априорная оценка производной по $t$ порядка $\gamma \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ в $L_2(\Omega \times (0, \infty))$ через норму свободного члена в $L_2(\Omega \times (0, \infty))$ и норму вектора начальных значений в $L_2(\Omega)$. Соответствующая теорема существования выделяет класс решений, включающий решения, полученные в работах А. А. Киселева и О. А. Ладыженской (РЖМат, 1958, 726), и входящий в класс „турбулентных решений" Лере. О. В. Гусева

**4001. Теорема единственной продолжимости для уравнения диффузии. Ямабе** (A unique continuation theorem of a diffusion equation. Yamabe Hidehiko), Ann. Math., 1959, **69**, № 2, 462—466 (англ.)

Доказывается следующая теорема: Если решение $U(x, t)$ уравнения диффузии

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \Delta U,$$

исчезающее на разомкнутой границе области $D$ риманового многообразия $c^4$, обращается в нуль в открытой подобласти области $D$ при $t > 0$, то оно должно равняться нулю во всей области при всяком $t$. Доказательство основывается на оценке остатка в разложении функции $U(x, t)$ в обобщенный ряд Фурье.

Д. Е. Долидзе

**4002. Задачи Коши для операторных уравнений в частных производных. Панайоти Б. Н.,** Физ. вэ-ријазијјат инст. әсәрләри. АзәрбССР Елмләр Акад., Тр. Ин-та физ. и матем., АН АзербССР, 1959, 8, 54—76 (рез. азерб.)

З. И. Халилов (Докл. АН СССР, 1952, 85, 959 — 962) перенес теорию И. Г. Петровского корректности задачи Коши для систем вида

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P\left(t,\ i\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) + f(x, t)$$

на случай банаховых вектор-функций $u(x, t)$ и операторной функции $P\left(t, i\frac{\partial}{\partial x}\right)$. Условие (А) Петровского в этой схеме означает, что разрешающая банахова вектор-функция двойственной системы

$$\frac{dv(\sigma, t)}{dt} = P(t, \sigma)\,v(\sigma, t) + g(\sigma, t)$$

возрастает по норме при $|\sigma| \to \infty$ не быстрее некоторой степени $|\sigma|$. С другой стороны, В. Э. Лянце (Укр. матем. ж. 1949, № 4) (а также Лоран Шварц, о котором автор не упоминает) расширил область применения схемы Петровского с класса ограниченных функций на класс функций, растущих при $|x| \to \infty$ (в основном, не быстрее степени $|x|$). Автор, объединяя методы Халилова и Лянце, строит теорию корректности задачи Коши для банаховых вектор-функций, растущих по норме при $|x| \to \infty$, как у Лянце. Г. Е. Шилов

**4003. Об условиях корректной разрешимости задачи Коши для систем линейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами. Житомирский Я. И.,** Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 4, 229—231

**4004. Абстрактная проблема Коши и проблема Коши для параболических дифференциальных уравнений. Хилле** (The abstract Cauchy problem and Cauchy's problem for parabolic differential equations. Hille Einar), Итоги анализа математит, J. Analyse Math., 1953—1954, **3**, 81—196 (англ.; рез. евр.)

**4005. Абстрактная формулировка проблемы Коши. Хилле** (An abstract formulation of Cauchy's problem. Hille Einar), 12te Skand. matematikerkongr. Lund, 1953, Lund, 1954, 79—89 (англ.)

**4006. О задаче Коши для некоторых систем линейных уравнений с частными производными. Гусаров Л. А.,** Докл. АН СССР, 1959, **125**, № 5, 966—969

Система уравнений

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P\left(t,\ i\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) + f(x, t),$$

у которой вещественные части корней $\lambda_j(t, \sigma)$ уравнения $\det \| P_0(t, \sigma) - \lambda E \| = 0$ ($P_0$ — старшие члены в $P$) остаются при $|\sigma| = 1$ и $0 \leqslant t \leqslant T$ меньше отрицательной постоянной, является, как известно, корректной по Петровскому (даже параболической). Автор распространяет это утверждение на случай, когда $\mathrm{Re}\lambda_j(t, \sigma)$ могут обращаться в нуль в конечном числе значений $t$. При

этом на матрицу $P$ он налагает жесткие дополнительные условия, трудно обозримые. К сожалению автор не привел примеров, которые могли бы дать представление об области применимости его метода. Г. Е. Шилов

**4007. О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения. Олейник О. А.**, Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 2, 165—170

Исследуется вопрос о корректной постановке задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial \varphi(u,t,x)}{\partial x}=0 \qquad (1)$$

без предположения $\varphi_{uu}\neq 0$ в классе разрывных функций. Ранее этот вопрос изучался при условии $\varphi_{uu}\neq 0$; см. обзорную статью О. А. Олейник (РЖМат, 1959, 5852). Назовем обобщенным решением уравнения (1) функцию $u(t,x)$ со следующими свойствами: $u(t,x)$ непрерывно дифференцируема всюду при $t\geqslant 0$, кроме конечного числа гладких линий; во всех точках разрыва $u(t,x)$, за исключением, быть может, конечного числа их, существуют предельные значения $u_+(t,x)\equiv u(t,x+0)$ и $u_-(t,x)\equiv u(t,x-0)$; для любого кусочно-гладкого замкнутого контура $\Gamma$, содержащего конечное число точек разрыва $u(t,x)$, справедливо равенство

$$\int_\Gamma u\,dx-\varphi(u,t,x)\,dt=0.$$

Будем говорить, что обобщенное решение $u(t,x)$ уравнения (1) удовлетворяет условию $E$, если во всех точках разрыва $u(t,x)$, за исключением, быть может, конечного их числа, выполнено такое условие: если $u_+>u_-$, то $l(u)\leqslant\varphi(u,t,x)$ при всех $u\in[u_-,u_+]$; если же $u_+<u_-$, то $l(u)\geqslant\varphi(u,t,x)$ при всех $u\in[u_+,u_-]$; здесь

$$l(u)\equiv\frac{\varphi(u_+,t,x)-\varphi(u_-,t,x)}{u_+-u_-}(u-u_+)+\varphi(u_+,t,x).$$

Доказаны следующие утверждения:

Теорема 1. Обобщенное решение уравнения (1), принимающее при $t=0$ заданные значения $u_0(x)$ и удовлетворяющее условию $E$, единственно.

Теорема 2. Пусть $u(t,x)$ и $v(t,x)$ — обобщенные решения задачи Коши для уравнения (1), удовлетворяющие условию $E$. Если для любых $\xi_1$ и $\xi_2$ из отрезка $[a,b]$

$$\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2}[u(0,x)-v(0,x)]\,dx\right|\leqslant\varepsilon,$$

то

$$\left|\int_{x_1}^{x_2}[u(t_1,x)-v(t_1,x)]\,dx\right|\leqslant\varepsilon$$

для любого отрезка $[x_1,x_2]$ прямой $t=t_1$, принадлежащего области, ограниченной прямыми $t=0$, $x-a-At=0$, $x-b+At=0$, где $A=\max|[\varphi(u)-\varphi(v)]/(u-v)|$. Обе теоремы доказываются весьма простым методом. Указан также путь построения обобщенных решений задачи Коши для уравнения (1) из определенного выше класса. А. С. Калашников

**4008. О порядке экспоненциального роста решений некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Рутман М. А.**, Докл. АН СССР, 1959, **124**, № 4, 764—767

Обозначения: $E$ — комплексное банахово пространство; $C_E$ — пространство непрерывных векторных функций $x=x(t_1,\ldots,t_n)$ $(0\leqslant t_j<\infty,\ j=1,\ldots,n)$ со значениями в $E$; для любого вещественного $\alpha$ $C_{E;\alpha}$ — подпространство функций $x\in C_E$, удовлетворяющих условию

$$\sup\|x(t_1,\ldots,t_n)\|\cdot\exp[-\alpha(t_1+\ldots+t_n)]<\infty;$$

$$C_{E;\alpha^+}=\bigcap_{\beta>\alpha}C_{E;\beta}.$$

В статье рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^{p_1+\ldots+p_n}y}{\partial t_1^{p_1}\ldots\partial t_n^{p_n}}-\sum_{q_1,\ldots,q_n}A_{q_1,\ldots,q_n}\frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n}y}{\partial t_1^{q_1}\ldots\partial t_n^{q_n}}=x \qquad (1)$$

$$(q_j\leqslant p_j;\ \textstyle\sum q_j<\sum p_j)$$

при начальных условиях

$$y\mid_{t_j=0}=\left.\frac{\partial y}{\partial t_j}\right|_{t_j=0}=\ldots=\left.\frac{\partial^{p_j-1}y}{\partial t_j^{p_j-1}}\right|_{t_j=0}=0 \qquad (2)$$

$$(j=1,\ldots,n).$$

В (1) $A_{q_1,\ldots,q_n}$ — непрерывные и равномерно ограниченные операторные функции от $t_1,\ldots,t_n$.

Когда $x$ пробегает класс $C_{E;\alpha}$, совокупность решений $\{y\}$ покрывается некоторым $C_{E;\beta}$. Нижняя грань тех $\beta$, для которых $\{y\}\in C_{E;\beta}$, обозначается через $\varkappa(\alpha)$. Основным результатом статьи является

Теорема 1. Для всякой задачи типа (1) — (2) существует „критическое“ значение $\alpha_0$ такое, что

$$\varkappa(\alpha)=\alpha_0 \text{ при } \alpha\leqslant\alpha_0;$$

$$\varkappa(\alpha)=\alpha \text{ при } \alpha>\alpha_0.$$

Во втором соотношении нижняя грань $\varkappa(\alpha)$ всегда достигается, однако $\varkappa(\alpha_0)=\alpha_0^+$; т. е. совокупность решений $\{y\}$ при всевозможных $x\in C_{E;\alpha_0}$ покрывается подпространством $C_{E;\alpha_0^+}$, но не покрывается $C_{E;\alpha_0}$.

Дальнейшая часть работы посвящена оценкам, а в ряде случаев — точному вычислению критического значения $\alpha_0$ для некоторых конкретных классов уравнений. Отметим, что в случае, когда пространство $E$ неодномерно, результаты получены в предположении перестановочности любых двух операторов, являющихся предельными значениями коэффициентов уравнения (1) на бесконечности. М. З. Соломяк

**4009. Вычетный метод решения краевых и смешанных задач. Расулов М. Л.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 36—37

**4010. Уравнение Монжа — Ампера с тремя переменными. Тюрпен** (Equation de Monge — Ampère à trois variables. Turpin Maurice), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 1, 60—62 (франц.)

Под уравнением Монжа — Ампера с тремя переменными автор понимает всякое уравнение в частных производных второго порядка, эквивалентное системе внешних уравнений вида $\omega\equiv dz-p_1dx_1-p_2dx_2-p_3dx_3=0$, $\theta_1\wedge\theta_2\wedge\theta_3=0$, где $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ — формы Пфаффа от переменных $x_1,x_2,x_3,p_1,p_2,p_3,z$ с аналитическими коэффициентами. Естественным образом определяется понятие регулярного двумерного элемента и двумерного интегрального многообразия. Формулируется теорема существования и единственности трехмерного интегрального многообразия, определяемого двумерным интегральным многообразием с регулярным начальным элементом и лежащим на многообразии $x_1=x_1^0$ (или $x_2=x_2^0$, или $x_3=x_3^0$). Формулируются некоторые результаты, касающиеся частных случаев рассматриваемого уравнения. В. В. Рыжков

**4011. Письмо в редакцию [по поводу статьи А. И. Кошелева «Априорные оценки в $L_p$ и обобщенные решения эллиптических уравнений и систем»]. Кошелев А. И.**, Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 3, 235

См. РЖМат, 1958, 9875.

**4012. Некоторые обобщения понятия энергии и вопросы устойчивости для уравнений с частными производными. Волков Д. М.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4.** М., АН СССР, 1959, 16

**4013. О приводимости уравнений с частными производными. Хаимовичи Мендель,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4.** М., АН СССР, 1959, 151

**4014. Задача Дирихле для уравнений типа Монжа — Ампера и их $n$-мерных аналогов. Бакельман И. Я.,** Докл. АН СССР, 1959, **126**, № 5, 923—926

Уравнение Монжа — Ампера $rt - s^2 = ar + 2bs + ct + d$ с непрерывными коэффициентами, зависящими от $x, y, z, p, q$, называется сильно эллиптическим, если $d > 0$ и квадратичная форма $a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2$ переменных $\xi, \eta$ является неотрицательной. Обобщенным решением этого уравнения в области $G$ называется любая выпуклая функция $z(x, y)$, для которой на любом борелевском множестве $H \subset G$

$$\iint_H (rt - s^2)\,dxdy = \iint_H (ar + 2bs + ct)\,dxdy + \iint_H ddxdy$$

(хотя вторые производные функции $z(x, y)$ могут и не существовать, каждому из этих интегралов можно придать определенный смысл). Доказывается при некоторых условиях существование обобщенных решений сильно эллиптического уравнения Монжа — Ампера и разрешимость задачи Дирихле в некоторой обобщенной постановке. Приводятся также формулировки результатов для $n$-мерного аналога сильно эллиптического уравнения Монжа — Ампера. А. В. Погорелов

**4015. Решение краевых задач для эллиптических уравнений в некоторых функциональных пространствах, Вишик М. И.** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, **4.** М., АН СССР, 1959, 14—15

**4016. О вырождающихся уравнениях эллиптического и параболического типа. Ильин А. М.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4.** М., АН СССР, 1959, 23—24

**4017. Первая краевая задача для некоторых нелинейных эллиптических уравнений. Бакельман И. Я.,** Докл. АН СССР, 1959, **124**, № 2, 249—252

Рассматривается задача Дирихле для нелинейного уравнения эллиптического типа $F(r, s, t, p, q, z, x, y) = 0$, левая часть которого представляет собой полином нечетной степени относительно вторых производных $r, s, t$. При некоторых условиях, налагаемых на функцию $F$, утверждается разрешимость задачи Дирихле для этого уравнения в круге $\omega: x^2 + y^2 < R^2$. Например, утверждается разрешимость задачи Дирихле для уравнения $(r + t)^3 - 3(r + t)(rt - s^2) + (r + t) = g(x, y)$ в круге $\omega$ для любой функции $\psi \subset C^5$, заданной в качестве граничных значений решения. А. В. Погорелов

**4018. Нелинейные уравнения эллиптического типа без нелинейных общих решений. Берс** (Non linear elliptic equations without non linear entire solutions. Bers Lipman), J. Rational Mech. and Analysis, 1954, **3**, № 6, 767—787 (англ.)

**4019. Первая краевая задача для уравнений эллиптического типа второго и четвертого порядков, вырождающихся или имеющих особенности в конечном числе внутренних точек области. Захаров В. К.,** Докл. АН СССР, 1959, **124**, № 4, 747—750

На плоскости $(x, y)$ рассматривается ограниченная область $D$, граница которой состоит из замкнутой кривой $\Gamma'$ и изолированной точки (0, 0). В области $D$ дано линейное эллиптическое уравнение 2-го порядка, старшие коэффициенты которого имеют степенной порядок роста (или убывания) в окрестности точки (0, 0). Формулируется теорема о существовании обобщенного решения первой краевой задачи для этого уравнения в области $D$ при определенных предположениях относительно коэффициентов уравнения. Аналогичная теорема при более сложных предположениях относительно коэффициентов формулируется для линейного эллиптического уравнения 4-го порядка, вырождающегося в точке (0, 0). Доказательства нет. Функциональные пространства, в которых ищется обобщенное решение, построены автором (РЖМат, 1958, 3759).

Уравнения 2-го порядка, вырождающиеся на произвольном замкнутом множестве точек области, при несколько иных предположениях рассматривались А. М. Ильиным (РЖМат, 1960, 1669). А. Ф. Филиппов

**4020. О разрывах в решениях квазилинейных уравнений. Яненко Н. Н.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4.** М., АН СССР, 1959, 42—43

**4021. Граничные свойства гармонических функций в трехмерном пространстве. Мозжерова Н. И.** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4.** М., АН СССР, 1959, 49—50

**4022., Несколько задач для уравнения Лапласа. Маховиков** (Кілька задач для рівняння Лапласа. Маховиков В. І.), Доповіді АН УРСР, 1959, № 3, 245—251 (укр.; рез. русск., англ.)

Для трехмерного уравнения Лапласа приводятся решения в виде конечных сумм различных видов. Эти решения удовлетворяют либо краевым условиям на боковой поверхности цилиндра и в некоторых точках оснований либо — для цилиндра малой высоты (плита) — условиям на основаниях (при заданных полигармонических функциях) и на некоторых образующих боковой поверхности, а также позволяют свести объемную краевую задачу для тела, получающегося вращением плоской области вокруг одной из осей, к плоским краевым задачам на границе этой области. Ю. Н. Валицкий

**4023. Скачки вторых производных потенциалов простого слоя. Мак** (Discontinuities of second derivatives of single-layer potentials. Mack Sidney F.), Math. Ann., 1959, **137**, № 5, 417—426 (англ.)

Пусть $S$ — конечная поверхность класса $C^2$ в трехмерном пространстве; точка $P \in S$ ($P$ не лежит на границе $S$) принята за начало прямоугольной системы координат $x, y, z$, и ось $z$ направлена по нормали к $S$ в $P$; $\sigma(Q)$, $(Q \in S)$ — интегрируемая по $S$ функция, непрерывная в точке $P$; $M(0, 0, \delta)$ и $M'(0, 0, -\delta)$, $(\delta > 0)$, — две симметричные точки нормали; $u(x, y, z)$ — потенциал простого слоя по $S$ с плотностью $\sigma(Q)$. Пусть $k_1, k_2$ — главные кривизны $S$ в точке $P$, $K = \frac{k_1 + k_2}{2}$ — средняя кривизна $T_x = \frac{k_2 - k_1}{2} \sin 2\theta_1$ — геодезическое кручение в направлении оси $x$ (здесь $\theta_1$ — угол от оси $x$ до направления первой главной кривизны), $k_x = k_1 \cos^2\theta_1 + k_2 \sin^2\theta_1$ — нормальная кривизна $S$ в направлении оси $x$.

Доказываются теоремы:

A. $$\lim_{\delta \to 0} \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_M - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{M'} \right\} = -8\pi\sigma(P)\,K$$

B. $$\begin{cases} \lim\limits_{\delta \to 0} \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_M - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{M'} \right\} = 4\pi\sigma(P)\,k_x \\ \lim\limits_{\delta \to 0} \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_M - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{M'} \right\} = -4\pi\sigma(P)\,T_x \end{cases}$$

C. (предполагая еще $\sigma \in C^1$ как функцию $(x, y)$ в окрестности точки $P$)

$$\lim_{\delta \to 0} \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right)_M - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right)_{M'} \right\} = -4\pi \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_P.$$

Обозначим

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{P+}, \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{P-}, \ldots, \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right)_{P+}, \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right)_{P-}$$

конечные пределы (если они существуют) соответствующих производных для $M \to P$ и $M' \to P$.

Из теорем A, B, C следует существование предела с индексом $P^+$ ($P^-$) из существования соответствующего предела с индексом $P^-$ ($P^+$) и известна разность между этими пределами. Отсюда для вторых производных электростатического потенциала на замкнутой поверхности $S$ ($u \equiv \text{const}$ в области внутри $S$) имеют место равенства

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right)_{P+} = 2K(P)\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{P+}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{P+} = -k_x(P)\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{P+}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{P+} = T_x(P)\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{P+}.$$

Для доказательства теорем A, B, C введена „соприкасающаяся" поверхность $S_0$, касательная плоскость которой в $P$ совпадает с $(x, y)$, а нормальные сечения в $P$ суть окружности кривизны соответствующих нормальных сечений поверхности $S$ в точке $P$. Сначала теоремы A, B, C доказаны для $S_0$ и затем для $S$. Между прочим доказывается, что $S_0$ в окрестности $P$ есть поверхность класса $C^3$ и не принадлежит $C^4$ в случае $k_1 \neq k_2$.

Х. Л. Смолицкий

**4024. Об устойчивости задачи Неймана. Олейник О. А.**, Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 1, 223—225

**4025. Два выражения для распределения собственных значений. Мак-Лауд** (Two expressions for the distribution of eigenvalues. McLeod J. B.), Proc. Roy. Soc., 1958, **A249**, № 1259, 513—517 (англ.)

Изучается распределение собственных значений для уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \{\lambda - q(r)\}\psi = 0, \qquad (1)$$

где $q(r)$ зависит только от $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ и стремится к $+\infty$ при $r \to \infty$. С помощью разделения переменных уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \left\{\lambda - q(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right\}\psi = 0. \qquad (2)$$

Кембл и Лангер доказали в 1937 г., что собственные значения $\lambda_m$ уравнения (2) суть корни уравнения

$$I_1 = \int_{R_1}^{R_2}\left\{\lambda_m - q(r) - \frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right\}dr = \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi + \delta, \qquad (3)$$

где $R_1$, $R_2$ — нули функции $\lambda_m - q(r) - \left(l+\frac{1}{2}\right)^2/r^2$ и $\delta \to 0$ при $m \to \infty$. Недавно Титчмарш показал (РЖМат, 1959, 3810), что $\lambda_m$ суть корни уравнения

$$I_2 = \int_0^{p_m}\{\lambda_m - q(r)\}^{1/2}dr = \left(\frac{1}{2}l + m + {}^3/_4\right)\pi + \delta',$$

где $p(\lambda)$ — функция, обратная функции $\lambda = q(r)$, $p_m = p(\lambda_m)$, $\delta'$ стремится к нулю при $m \to \infty$.

В работе доказывается следующая теорема: Пусть $q(r)$ непрерывно дифференцируема, $q(r) \to +\infty$ при $r \to \infty$ и $q'(r)$ монотонно возрастает. Тогда

$$I_2 - I_1 = \left(\frac{1}{2}l + \frac{1}{4}\right)\pi + O\left(\lambda_m^{-1}\right) + O\left(\lambda_m^{-1/2}p_m^{-1}\right) + O\left(\lambda_m^{-1/2}\int_1^{p_m}\frac{q(r)\,dr}{r^2}\right).$$

Б. М. Левитан

**4026. О собственных значениях в задачах со сферической симметрией. II. Титчмарш** (On the eigenvalues in problems with spherical symmetry. II. Titchmarsh E. C.), Proc. Roy. Soc., 1959, **A251**, № 1264, 46—54 (англ.)

Изучается уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \{\lambda - q(r)\}\psi = 0, \qquad (1)$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $q(r) \to +\infty$ при $r \to \infty$, во всем пространстве $R_3$. Известно, что при помощи разделения переменных, уравнение (1) приводится к уравнению

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \left\{\lambda - q(r) - \frac{l^2+l}{r^2}\right\}\psi = 0, \qquad (2)$$

где $l = 0, 1, \ldots$. В предыдущей работе (РЖМат, 1959, 3810) автор рассмотрел распределение собственных значений уравнения (2) для больших $\lambda$ и фиксированного $l$. Однако для изучения распределения собственных значений уравнения (1) необходимо предполагать, что одновременно велики и $\lambda$, и $l$. Для малых $r$ собственная функция $\psi(r)$ уравнения (2) приближенно равна $Cr^{l+1}$, где $C$ постоянная, которую можно предполагать положительной Поэтому $\psi(r)$ и $\psi'(r)$ положительны для малых $r$. Далее, если $s$ — фиксированное положительное число, то функция $Q(r, s) = q(r) + sr^{-2}$ убывает от бесконечности при $r = 0$ до минимума в некоторой точке $r = \rho = \rho(s)$ и затем возрастает до бесконечности при $r \to \infty$. Если $Q\{\rho(l^2+l), l^2+l\}$ больше чем $\lambda$, то $Q(r^2, l^2+l)$ всюду положительна. Эти $\lambda$ не могут быть собственными значениями, и, следовательно, собственные значения удовлетворяют условию $Q\{\rho(l^2+l), l^2+l\} \leqslant \lambda$. Обозначим через $L$ наибольшее из таких $l$ (при данном $\lambda$). Если $Q\{\rho(l^2+l), l^2+l\} < \lambda$, то $\lambda - Q(r^2, l^2+l)$, как функция $r$, имеет два нуля $R'$ и $R$, причем $R' < \rho < R$. В этом случае $\psi(r)$ и $\psi'(r)$ положительны для $r < R'$ и $\psi(r)$ осциллирует для $R' < r < R$. В работе доказывается, что собственные значения $\lambda_{l,n}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) уравнения (2) суть корни уравнения

$$\int_{R_1}^{R}\left\{\lambda_{l,n} - Q(r, l^2+l)\right\}^{1/2}dr = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi + O\left(\frac{L}{l(L-l)}\right). \qquad (3)$$

Эта формула хорошо известна и основная цель работы состоит в выводе остаточного члена указанного вида. Как и в предыдущей работе используется метод Лангера аппроксимации собственных функций функциями Бесселя порядка $1/3$. Получены две такие аппроксимации, одна годная в окрестности $R$ и вторая годная в окрестности $R'$.

Б. М. Левитан

**4027. О спектре одного оператора. Денчев Р.**, Докл. АН СССР, 1959, **126**, № 2, 259—262

При изучении задачи о вращающейся жидкости С. Л. Соболев пришел к задаче:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta\Phi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0,$$

$$\Phi|_S = 0, \quad \Phi|_{t=0} = \psi_0(x, y, z), \quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_1(x, y, z),$$

где $S$ — граница некоторой области $\Omega$. Вопрос о почти периодичности решения этого уравнения, поставленный С. Л. Соболевым, сводится при помощи разделения переменных к задаче о том, при каких значениях $\lambda$ уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \lambda\Delta u = 0$$

имеет нетривиальные решения $u(x, y, z)$, обращающиеся в нуль на $S$. Иначе говоря, нужно изучить спектр оператора $L = \Delta^{-1}\frac{\partial^2}{\partial z^2}$, где

$$\Delta^{-1}u=\int_{\Omega} G(x, y, z; x', y', z')\, u(x', y', z')\, dx'\, dy'\, dz'.$$

$G$ — функция Грина области $\Omega$ для оператора Лапласа при условиях Дирихле. В заметке показывается дискретность спектра этой задачи в следующих двух случаях: I. $\Omega$ — произвольный эллипсоид. II. $\Omega$ — цилиндр с образующими параллельными оси $z$, основание его—произвольная область в плоскости $(x, y)$. Одновременно доказывается существование полной и ортогональной в $W_2^1$ системы собственных функций оператора $L$.

Б. М. Левитан

**4028. Об одной смешанной задаче. Искендеров Ш. А.,** Физ. вə рijазијjат инст. эсərləри. АзəрбССР Елмləр Акад., Тр. Ин-та физ. и матем. АН АзербССР, 1959, 8, 190—193 (рез. азерб.)

Доказана единственность обобщенного решения смешанной задачи

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t_1\, \partial t_2}=\sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial U}{\partial x_j}\right)-a(x)\,U+f(x, t_1, t_2),$$

$U(x, t_1, t_2)\mid_{t_1=0}=\varphi(x, t_2)$, $U(x, t_1, t_2)\mid_{t_2=0}=\psi(x, t_1)$, $U\mid_S=0$ при $t_1\in[0, l_1]$ и $t_2\in[0, l_2]$, где $x=(x_1, \ldots, x_n)$—точка конечной области $\Omega$ с границей $S$; $a(x)\geqslant 0$; $a_{ij}=a_{ji}$;

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\alpha\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\quad \alpha=\text{const}.$$

В. Э. Аболина

**4029. Об обобщенном решении одной смешанной задачи. Искендеров Ш. А.** Физ. вə рijазијjат инст. эсərləри. Азəрб. ССР Елмləр Акад., Тр. Ин-та физ. и матем. АН Азерб. ССР, 1959, 8, 99—106 (рез. азерб.)

Даны достаточные условия для существования и единственности обобщенного решения смешанной задачи:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial U}{\partial x}\right)-q(x)\,U+C(t, x)\frac{\partial U}{\partial t}+D(t, x)\,U-$$

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=f(t, x),$$

$$U(t, 0)=U(t, \pi)=0,$$

$$U\mid_{t=0}=\varphi(x),\quad \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)$$

$(0\leqslant x\leqslant\pi,\ 0\leqslant t\leqslant T)$. Решение ищется в виде ряда $U(t, x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k(t)\,V_k(x)$.

В. Э. Аболина

**4030. Колебание мембраны, имеющей форму полуполосы. Шельдяева М. Н.,** Уч. зап. Моск. гос. заочн. пед. ин-та. Сер. физ.-матем., 1959, вып. 3, 144—154

Используя двумерное преобразование Лапласа, автор ищет решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ t>0,\ x>0,\ 0<y<\pi$$

при краевых

$$u|_{x=0}=f_1(t, y),\ u|_{y=0}=f_2(t, x),\ u|_{y=\pi}=f_3(t, x)$$

и начальных

$$u|_{t=0}=f_4(x, y);\ \frac{\partial u}{\partial t}=\varphi_1(x, y)$$

условиях.

Н. И. Мозжерова

**4031. О дифференциальном уравнении**

$$u_{xy}=f(x, y, u, u_x, u_y).$$

**Вальтер** (Über die Differentialgleichung $u_{xy}=f(x, y, u, u_x\, u_y)$. Walter Wolfgang), Math. Z., 1959, **71**, № 3, 308—324 (нем.)

Уравнение, указанное в заголовке, рассматривается в прямоугольнике $R: 0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b$, причем правая часть считается непрерывной при $(x, y)\in R$, $-\infty<u, u_x, u_y<\infty$, а от решения требуется непрерывность $u_x$, $u_y$, $u_{xy}$ в $R$. В известном курсе Камке доказана единственность решения задачи Дарбу-Гурса (в которой $u$ задается при $x=0$ и при $y=0$), если $f$ удовлетворяет по $u$, $u_x$, $u_y$ условию Липшица. Автор доказывает единственность решения в более широких условиях, аналогичных известным условиям Осгуда, Нагумо и некоторым другим для случая обыкновенных дифференциальных уравнений. Например (аналог теоремы Нагумо), для единственности достаточно, чтобы при $x>0$, $y>0$,

$$|f(x, y, u, v, w)-f(x, y, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w})|<\alpha\frac{|u-\bar{u}|}{xy}+$$

$$+\beta\frac{|v-\bar{v}|}{y}+\gamma\frac{|w-\bar{w}|}{x},$$

где $\alpha, \beta, \gamma\geqslant 0$, $\alpha+\beta+\gamma\leqslant 1$ (существенность последнего неравенства показана) и т. п. Аналогичные теоремы справедливы, если в уравнении $u$ понимать как вектор. При доказательстве используются вспомогательные теоремы о достаточных условиях сходимости последовательных приближений для задачи $z'=g(x, z)$, $z(0)=0$ ($g(x, 0)\equiv 0$) в более широких предположениях, чем условия Липшица. Существование решения и нехарактеристическую задачу автор предполагает рассмотреть позже. По поводу аналогичных обобщений для задачи Коши см. работу Фояш, Гусси и Поенару (РЖМат, 1958, 5744).

А. Д. Мышкис

**4032. Бегущие волны в бесконечной нелинейной струне. Флейшман** (Progressing waves in an infinite nonlinear string. Fleishman B. A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 2, 329—334 (англ.)

Изучаются решения нелинейного уравнения

$$u_{tt}-u_{xx}=-\alpha u-\beta u^3,$$

где $\alpha$, $\beta$ — постоянные, вида бегущей волны $u(x, t)=\psi(x-ct)$, $c$ — постоянная.

В. Э. Аболина

**4033. Элементарные решения для определенных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа. Мак-Кин** (Elementary solutions for certain parabolic partial differential equations. McKean Henry P., Jr), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 82, № 2, 519—548 (англ.)

**4034. О некоторых свойствах решений параболических в смысле Г. Е. Шилова систем. Эйдельман С. Д., Порпер Ф. О.,** Докл. АН СССР, 1959, **126**, № 5, 948—950

Рассматриваются системы вида $(x=(x_1, \ldots, x_n))$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}=\sum_{0\leqslant h\leqslant|k|\leqslant p}A_k(t)\,D_x^k\,u(x, t)\qquad(1)$$

с решением задачи Коши $u(x, \tau)=\varphi(x)$ для любой ограниченной непрерывной функции $\varphi(x)$, в форме

$$u(x, t)=\int G(t, \tau, x-\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi,\quad t\geqslant\tau\geqslant 0,$$

где $G$ — классическая матрица-функция, удовлетворяющая условию

$$|D_x^m G(t, \tau, x)|\leqslant C_m a(t, \tau)^{-n-m} f\left(\frac{|x|}{a(t, \tau)}\right),\qquad(2)$$

причем $t-\tau\geqslant 1$, $a(t, \tau)\geqslant 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} a(t, \tau)=\infty$ и

$$\int f(\xi)\,(1+\xi^2)^{k/2}\,d\xi<\infty,\quad k=0, 1, \ldots, n.$$

Для выполнения условия (2) достаточно, чтобы разрешающая матрица-функция $v(t, \tau, \sigma)$ для системы, двойственной к (1) по Фурье, удовлетворяла неравенству

$$| v(t, \tau, \sigma) | \leqslant C_1 e^{-C_2 | \sigma |^h (t-\tau)} (1 + | \sigma |)^r.$$

Авторы формулируют условия для стабилизации решения системы (1), т. е. для существования постоянного предела $l = \lim_{t \to \infty} u(x, t)$, равномерного в каждой ограниченной области изменения переменных $x$. Типичным условием является существование интегрального среднего у начальной функции $\varphi(x)$ в каждой из $2^n$ областей, ограничиваемых координатными плоскостями, и равенство всех этих интегральных средних.

Для системы (1) (также с условием (2)) справедлива следующая лиувиллева теорема: всякое решение, регулярное при $t \leqslant 0$ и удовлетворяющее неравенству

$$| u(x, t) | \leqslant C (1 + | x |)^r,$$

есть вектор-полином от $x$ степени не выше $r$. Аналогичная теорема справедлива для системы, получающейся из (1) заменой $\frac{\partial}{\partial t}$ на 0.

Г. Е. Шилов

**4035. Об асимптотическом поведении решений уравнения параболического типа. Кшижанский М.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, **4.** М., АН СССР, 1959, 154—155

**4036. О применении метода конечных разностей к решению первой краевой задачи для уравнений параболического типа. Вентцель Т. Д.,** Матем. сб., 1956, **40,** № 1, 101—122

**4037. Об одной типичной краевой задаче для уравнения теплопроводности в случае $n+1$ измерений. Паньи** (Su un problema al contorno tipico per l'equazione del calore in $n+1$ dimensioni. Pagni Mauro), Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1957, **11,** № 3-4, 209—216 (итал.)

Автор распространяет основные результаты своей предыдущей работы (РЖМат, 1959, 11074), на которую он неоднократно ссылается, на случай пространства $n+1$ измерений. Пусть $\tau$ — конечная „цилиндроподобная" область в пространстве $(x_1, \ldots, x_n, y)$, ограниченная сверху и снизу кусками плоскостей $y = 0$ и $y = y_0$, а с боков — конечным числом дважды гладких поверхностей, нигде не касательных к плоскостям $y = \text{const}$. В $\tau$ ищется регулярное решение уравнения $\partial u / \partial y = \sum \partial^2 u / \partial x_i^2$, равное нулю на нижнем основании и удовлетворяющее на боковой поверхности $S$ условию $\partial u / \partial l = g$, где $l$ в каждой точке $M \in S$ — направление, перпендикулярное оси $y$, направленное внутрь $\tau$ и гладко зависящее от $M$. При помощи видоизмененного метода Леви решение строится в виде поверхностного потенциала с ядром, приспособленным к виду уравнения и граничного условия, после чего неизвестная плотность находится (в случае непрерывной $g$) из интегрального уравнения типа Вольтерра. Единственность решения вытекает из более общей теоремы Пиконе. Освещен также случай суммируемой $g$.

А. Д. Мышкис

**4038. Первая краевая задача для квазилинейных параболических уравнений и задача Коши для квазилинейных гиперболических уравнений в целом. Ладыженская О. А.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4.** М., АН СССР, 1959, 29—32

**4039. Решение смешанной задачи для бесконечной системы квазилинейных параболических уравнений. Чандиров Г. И.,** Тәләбә-әлми чәмиййәтинин әсәрләри. Азәрб. унив. Тр. Науч.-студ. о-ва. Азерб. ун-т, 1956, № 2, 3—12 (рез. азерб.)

**4040. О численном решении задач типа задачи Дирихле. Гринспан** (On the numerical solutions of Dirichlettype problems. Greenspan Donald), Amer. Math. Monthly, 1959, **66,** № 1, 40—46 (англ.)

Для уравнения

$$u_{zz} + u_{\rho\rho} - (K/\rho) u_\rho = 0; \quad \rho \neq 0, \qquad (1)$$

где $K$ — постоянная, в произвольной ограниченной односвязной области $G$ с границей $S$, лежащей целиком в полуплоскости $\rho > 0$ рассматривается решение задачи Дирихле методом сеток. Область $G$ покрывается прямоугольной сеткой с шагом $h$ по оси $z$ и шагом $d$ по оси $\rho$ и строится пятиточечный конечноразностный аналог уравнения (1). Краевые данные на границе $S$ продолжаются обычным образом на граничное множество узлов сетки. Устанавливается, что решение поставленной таким образом конечноразностной задачи Дирихле существует и единственно при условии:

$$0 < d < 2\overline{\rho} / | K |, \quad \text{где:} \quad \overline{\rho} = \inf | \rho |, \ \rho \in G. \qquad (2)$$

Получена оценка модуля разности непрерывного и конечноразностного решения задачи Дирихле в зависимости от величин: $d$, $h$, $| K |$, $r$, где $r$ — радиус некоторого круга, содержащего область $G$, и максимумов модулей производных гладкого решения в $G$ до четвертого порядка включительно. Из этой оценки следует равномерное в любой замкнутой подобласти $G$ стремление конечноразностного решения к гладкому при $h^2 + d^2 \to 0$.

И. Л. Каполь

**4041. К задаче Гурса для уравнения типа Чаплыгина. Баранцев Р. Г.,** Вестн. Ленингр. ун-та, 1959, № 1, 51—56 (рез. англ.)

Для уравнения Чаплыгина

$$(\alpha - \tau) \psi_{\theta\theta} + 4\alpha\tau^2 (1 - \tau) \psi_{\tau\tau} + 4\alpha\tau [1 + (\beta - 1)\tau] \psi_\tau = 0 \qquad (1)$$

в полосе $S [0 < \alpha < \tau < 1]$ для областей $\Omega_\alpha$ и $\Omega_1$, ограниченных характеристиками $POQ$ и $MON$ разных семейств, проходящими через произвольную точку $O(\tau', \theta')$ полосы $S$ и прямыми $\tau = \alpha$ и $\tau = 1$ соответственно, рассматривается задача Гурса с краевыми условиями:

$$\psi |_{PQ} = \psi_1(\tau); \ \psi |_{MN} = \psi_2(\tau); \ \psi_1(\tau') = \psi_2(\tau'). \qquad (2)$$

После преобразований искомой функции и независимых переменных задача (1) — (2) приводится в обоих областях к задаче Гурса для уравнения $Lv \equiv v_{xx} - v_{tt} + N(x) v = 0$ в треугольнике $AOB$ $(-x < t < x; \ x < \pi)$ с краевыми условиями

$$v |_{OA} = p_1(x); \quad v |_{OB} = p_2(x); \quad p_1(0) = p_2(0). \qquad (3)$$

Задача решается путем применения конечного интегрального преобразования по переменной $t$. Продолжая функцию $v(x, t)$ вне $\triangle AOB$ нулем в прямоугольник $ABCD$ $(| t | < \pi; \ 0 < x < \pi)$, автор разлагает $w(x, t)$ в ряд Фурье по переменной $t$, для коэффициентов $a_n(x)$ и $b_n(x)$ которого, в силу формул:

$$a_n(x) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} w(x, t) \cos nt \, dt = \frac{1}{2} \int_{-x}^{x} v(x, t) \cos nt \, dt$$

и аналогичной для $b_n(x)$, из уравнения $Lv = 0$ и условий (3) получаются уравнения:

$$a_n'' + [n^2 + N(x)] a_n(x) = [p_1'(x) + p_2'(x)] \cos nx,$$

$$b_n'' + [n^2 + N(x)] b_n(x) = [p_1'(x) - p_2'(x)] \sin nx,$$

и „начальные условия": $a_n'(0) = p_1(0)$; $a_n(0) = b_n(0) = b_n'(0) = 0$.

В последней части работы проводится улучшение сходимости ряда Фурье для $w(x, t)$ до порядка $O(n^{-4})$ обычным приемом теории рядов Фурье. Указывается, что описанный прием распространяется на любое уравнение вида $\psi_{\sigma\sigma} - K(\sigma)\psi_{\theta\theta} = 0$. И. Л. Кароль

**4042. К теории линейных дифференциальных уравнений с двумя перпендикулярными линиями параболичности. Капилевич М. Б.**, Докл. АН СССР, 1959, 125, № 2, 251—254

Для решений в области $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} + \frac{m(r)}{x}u_x + \frac{n(r)}{y}u_y + \frac{F(r)}{r}u = 0 \qquad (r = \sqrt{x^2+y^2}) \qquad (1)$$

при условии, что $m(r)$, $n(r)$ и $F(r)$ — целые функции,

$$m(r) > 0,\ n(r) > 0,\ 0 < m(0) < 1,\ 0 < n(0) < 1$$

устанавливаются теоремы о среднем значении, аналогичные таковым для гармонических функций. Приведем одну из них.

Теорема. Если $M(r)$ $(M(0) = 1)$ — интеграл уравнения

$$rM_{rr} + [1 + m(r) + n(r)]M_r + F(r)M = 0, \qquad (2)$$

то для каждого квадратично суммируемого решения уравнения (1), удовлетворяющего краевым условиям

$$u_\xi(0, y) = u_\eta(x, 0) = 0, \quad u(0, 0) \neq 0,$$

с $\xi = \left(\frac{x}{1-m(0)}\right)^{m(0)}$, $\eta = \left(\frac{y}{1-n(0)}\right)^{1-n(0)}$ имеет место равенство

$$M(r)\,u(0, 0) = \delta \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin^{n(r)}\theta\cos^{m(r)}\theta\, d\theta,$$

в котором $\delta = \frac{2\Gamma(1+\nu+\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}$, $\mu = \frac{m(0)}{2}$, $\nu = \frac{n(0)}{2}$. Приводится аналогичная теорема для случая других краевых условий. Приводятся частные случаи и указываются применения для краевых задач для уравнения (1). Л. Н. Слободецкий

**4043. О росте решений дифференциального уравнения Трикоми в окрестности начала координат. Гудерлей** (On the development of solutions of Tricomi's differential equation in the vicinity of the origin. Guderley Gottfried), J. Rational Mech. and Analysis, 1956, 5, № 5, 747—790 (англ.)

В терминах переменных $\rho = -\tau_1^3 + (3\theta/2)^2$, $\xi = \eta(3\theta/2)^{-1/3}$ уравнение Трикоми $\psi_{\eta\eta} - \tau_1\psi_{\theta\theta} = 0$ имеет решение в виде $\psi = \rho^{n/2}G(\xi)$. Рассматривается решение, которое является нечетной функцией от $\theta$ и стремится к нулю при $\xi = \infty$. Первое семейство частных решений получается при условии, что $\psi$ и ее производные конечны на характеристиках $\xi = 1$. Эти условия возникают естественно в проблемах физики. Остальные решения уравнения Трикоми могут быть представлены как суперпозиции частных решений первого семейства. Далее автор определяет второе семейство частных решений с условием $G(c_2) = 0$, где $c_2 \neq 1$ и выполняется предельный переход при $c_2 \to 1$.

Решение второй системы являются полной системой, и посредством этих решений автор строит решения некоторой неоднородной задачи на собственные значения. A. Erdélyi

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, 314.

**4044. Задача Дирихле для одного уравнения смешанного типа. Смирнов М. М.**, Вестн. Ленингр. ун-та, 1959, № 1, 130—133 (рез. англ.)

Для уравнения

$$u_{xxxx} + 2\operatorname{sgn} y\, u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0 \qquad (1)$$

в полуплоскости $y > -h$ $(h > 0)$ рассматривается решение, удовлетворяющее краевым условиям:

$$u|_{y=-h} = \varphi_0(x);\ u_y|_{y=-h} = \varphi_1(x);\ -\infty < x < \infty, \qquad (2)$$

причем предполагается, что $u(x, y)$ с производными до третьего порядка включительно стремится к нулю при $x \to \pm\infty$, $\varphi_0(x)$ четырежды, а $\varphi_1(x)$ трижды дифференцируема, $\varphi_0$, $\varphi_0'$, $\varphi_0''$, $\varphi_0'''$, $\varphi_1$, $\varphi_1'$, $\varphi_1''$ стремятся к нулю при $x \to \pm\infty$ и $\varphi_0'''(x)$, $\varphi_1''(x)$ удовлетворяют условию Гёльдера в окрестности бесконечно удаленной точки. Устанавливается существование и единственность этого решения. В полуплоскости $y < 0$ общее решение уравнения (1) содержит четыре произвольные функции, две из которых определяются из краевых условий (2), а для двух других из условий непрерывности решения и его производных: $u_y$, $u_{yy}$ и $u_{yyy}$ на оси $y = 0$ строится система двух сингулярных интегральных уравнений. Эта система решается применением преобразования Фурье, причем определитель алгебраической системы уравнений для трансформант Фурье оказывается отличным от нуля при всех вещественных значениях $x$ и $h$.

Примечание референта: В работе имеется ряд неясных мест. Недостаточно четко сформулирована задача, не указывается, в каком функциональном классе ищется решение задачи, не оговорены условия, накладываемые на решение и его производные при $y \to +\infty$. Не указаны условия, при которых возможен переход от системы сингулярных уравнений (13) — (14) к системе (16) — (17), не указан функциональный класс, в котором ищется ее решение, нет обоснования применения преобразования Фурье для решения этой системы. И. Л. Кароль

**4045. Задача Коши для некоторых вырождающихся гиперболических уравнений 4-го порядка. У Чжунхай**, Sci. Rec., 1959, № 2, 49—54

Даны условия, при которых задача Коши: найти решение $u(x, y)$ уравнения

$$\left(y^m\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(y^n\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0,\ m \geqslant 0,\ n \geqslant 0$$

для $y > 0$, удовлетворяющее на $y = 0$ начальным условиям

$$u|_{y=0} = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \varphi_1(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0} = \varphi_2(x), \quad \left.\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right|_{y=0} = \varphi_3(x),$$

поставлена корректно. Найдены формулы для решения. В. Э. Аболиня

**4046. О линейных уравнениях в частных производных бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. Протасов В. И.**, Докл. АН СССР, 1958, 121, № 4, 594—597

1. Рассматривается бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $m$ с постоянными коэффициентами

$$y_k^{(m)}(x) = \sum_{\nu=0}^{m-1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\nu)} y_{n+k}^{(\nu)}(x) \qquad (1)$$

при начальных условиях

$$y_n^{(\nu)}(0) = c_n^{(\nu)}, \quad n = 0, 1, \ldots; \quad \nu = 0, \ldots, m-1.$$

Сформулировано 5 теорем об условиях (в терминах роста $a_n^{(\nu)}$ и $c_n^{(\nu)}$), достаточных для существования единственного решения аналитического в круге фиксированного радиуса или во всей плоскости. Например, согласно теореме 4, если функция $\sum_0^\infty a_n z^n$, где $a_n = \max_\nu |a_n^{(\nu)}|$, аналитична в круге $|z| < R$ и если $\overline{\lim} |c_n^{(\nu)}|^{1/n} < R$ при всех $\nu$, то существует и единственно целое аналитическое решение.

2. Указывается, что из этих результатов следует 5 теорем (теоремы 6—10) об аналитических решениях уравнения в частных производных по двум переменным

$$\partial^m u/\partial x^m = \sum_{\nu=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\nu)} \partial^{\nu+n} u/\partial x^\nu \partial z^n \qquad (2)$$

при начальных условиях

$$\partial^\nu u/\partial x^\nu\big|_{x=0} = v_\nu(z), \quad \nu = 0, \ldots, m-1.$$

Теоремы 6 и 7 относятся к случаю конечного уравнения, когда $a_n^{(\nu)} = 0$ для $n > s$, где $s > 1$. Согласно теореме 7, если функции $v_\nu(z)$ целые, порядка роста $s/(s-\theta)$, где $0 < \theta < 1$, и нормального типа, то существует и единственно целое аналитическое решение $u(x, z)$; при фиксированном $x$ оно растет по $z$ не быстрее чем с порядком $s/(s-\theta)$ и нормальным типом. Случай $\theta = 1$ рассматривается в теореме 6. Теоремы 8—10 относятся к общему случаю бесконечного уравнения, когда $v_\nu(z)$ — целые функции экспоненциального типа.

Примечание референта. Для конечных уравнений в частных производных с $n$ переменными предложения, близкие к результатам автора для конечных уравнений (2), другим методом независимо получены референтом (РЖМат, 1959, 11060). М. С. Агранович

**4047. Задача Дирихле для круга. Бугров Я. С.,** Докл. АН СССР, 1957, **115**, № 4, 639—642

Работа посвящена выяснению дифференциальных свойств полигармонических функций в круге в зависимости от дифференциальных свойств граничных функций.

Рассматривается задача Дирихле для уравнения

$$\Delta^l u(\rho, \theta) = 0 \quad (l = 1, 2, \ldots) \quad \{0 \leqslant \rho < 1; \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\},$$

$$\frac{\partial^k u(\rho, \theta)}{\partial \rho^k}\bigg|_{\rho=1} = \varphi_k(\theta) \quad (k = 0, 1, \ldots, l-1).$$

Доказывается следующая теорема: Если периода $2\pi$ функции $\varphi_k(\theta) \in H_p^{r+l-(k+1)}(M)$ $(k = 0, 1, \ldots, l-1)$, то полигармоническая функция

$$U(\rho, \theta) \in H_p^{r+1/p+l-1}(cM),$$

где $r > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (при $l > 1$, $r$ — нецелое) (Определение классов $H_\nu^{(r)}(M)$ см. РЖМат, 1953, 148). Указанная теорема обобщает один из результатов С. М. Никольского (РЖМат, 1959, 239) и Т. И. Аманова (РЖМат, 1953, 262). Н. И. Мозжерова

**4048. К решению бигармонической задачи. Аманов Т. И.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 44—45

**4049. О вычислении индекса задачи Дирихле. Вольперт А. И.** (Про обчислення індексу задачі Діріхле. Вольперт А. І.), Доповіді АН УРСР, 1958, № 10, 1042—1044 (укр.; рез. русск., англ.)

В конечной односвязной области $D$, ограниченной кривой Ляпунова $\Gamma$, рассматривается однородная задача Дирихле для эллиптической в области $\widetilde{D}$ $(\overline{D} \subset \widetilde{D})$ системы уравнений

$$\sum_{0 \leqslant k+l \leqslant 2} A_{kl}(x, y) \frac{\partial^{k+l} u}{\partial x^k \partial y^l} = 0.$$

Предполагается выполненным условие регуляризуемости:

$$\det \int_\gamma \Big( \sum_{k+l=2} A_{kl}(x, y) \alpha^l \Big)^{-1} d\alpha \neq 0 \quad ((x, y) \in \Gamma)$$

($\gamma$ — произвольный контур в полуплоскости $\operatorname{Im} \alpha > 0$, охватывающий все полюсы подынтегрального выражения), гарантирующее конечность чисел $k$ и $k^*$ линейно независимых решений рассматриваемой и сопряженной с ней задачи. Получены формулы для вычисления индекса $\varkappa = k - k^*$ задачи Дирихле через миноры матрицы

$$R(x, y) = \begin{pmatrix} R_1(x, y) & R_0(x, y) \\ R_0(x, y) & R_{-1}(x, y) \end{pmatrix},$$

где

$$R_n(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \Big( \sum_{k+l=2} A_{kl}(x, y) \alpha^l \Big)^{-1} \alpha^n d\alpha$$

$$((x, y) \in \overline{D}, \ n = 0, \pm 1).$$

Приводится пример, в котором $\varkappa$ может быть любым четным числом. Б. Р. Лаврук

**4050. Об одной граничной задаче для системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа. Лаврук Б. Р.** (Про одну граничну задачу для системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку еліптичного типу. Лаврук Б. Р.), Доповіді АН УРСР, 1956, № 3, 214—219 (укр.; рез. русск.)

**4051. Об одном типе граничных задач для эллиптических систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Лаврук Б. Р.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 27—29

**4052. Об одном способе определения асимптотики собственных значений и собственных функций для эллиптических систем. Драпкин А. Б.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 19—20

**4053. О поведении решений линейных эллиптических систем в окрестностях некоторых особых многообразий. Гавеля С. П.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 16—17

**4054. О некоторых обратных краевых задачах для уравнений эллиптического типа высшего порядка. Ганин М. П.,** Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 2, 59—68

Решаемая задача ставится так. В области $D$, ограниченной неизвестным контуром $L$, ищется решение дифференциального уравнения

$$\Delta^n U + \sum_{k=1}^n L_k(\Delta^{n-k} U) = 0 \qquad (1)$$

($\Delta$ — оператор Лапласа, $L_k$ — дифференциальный оператор порядка $\leqslant k$), удовлетворяющее на $L$ одному из следующих краевых условий, достаточных для решения обычной (т. е. при заданном $L$) краевой задачи:

$$\frac{\partial^{n-1} U}{\partial x^{n-k-1} \partial y^k} = g_k(s) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1); \qquad (I)$$

$$\frac{\partial^k U}{\partial n^k} = g_k(s) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1); \qquad (I$$

$$\Delta^k(U) = g_{2k}(s); \quad \frac{\partial \Delta^\nu U}{\partial n} = g_{2\nu+1}(s) \qquad \text{(III)}$$

$$\left(k = 0, 1, \ldots \left[\frac{n-1}{2}\right]; \ \nu = 0, 1, \ldots \left[\frac{n-2}{2}\right]\right.$$

($\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по внешней нормали). Кроме того, на $L$ задается еще одно дополнительное условие

$$F\left(s, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^{n-1} U}{\partial y^n}\right) = 0. \qquad (2)$$

Искомыми являются контур $L$ и функция $U(x, y)$.

Дифференцируя равенства (2) (I) по $s$ и исключая из получаемых уравнений

$$U, \frac{\partial U}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{n-1} U}{\partial y^n}$$

и их производные по $s$ (для исключения последних в общем случае необходимо решать систему обыкновенных дифференциальных уравнений), приходят к уравнениям

$$dx/ds = f_1(s), \quad dy/ds = f_2(s).$$

Отсюда находится уравнение искомого контура $L$ в параметрической форме с параметром $s$.

Случаи краевых условий (II), (III) приводятся к рассмотренному. Рассмотрено четыре примера, иллюстрирующих общую схему решения. Ф. Д. Гахов

**4055. О некоторых свойствах одного класса сильно эллиптических систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Волошина** (Про деякі властивості одного класу сильно еліптичних систем диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами. Волошина М. С.), Доповіді АН УРСР, 1958, № 10, 1033—1037 (укр.; рез. русск., англ.)

Переносится теорема работы автора (РЖМат, 1960, 379) о связи между фундаментальной матрицей и ядром интеграла типа потенциала на случай самосопряженной системы Эйлера с переменными коэффициентами

$$\sum_{k,l=1}^{n} A_{kl}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{n} A_k(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} + A(x)\, u(x) = 0.$$

При дополнительных ограничениях на коэффициенты системы обосновывается метод Неймана — Келлога решения задачи Дирихле. Б. Р. Лаврук

**4056. О порядке нулей однозначных решений эллиптических уравнений. Педерсон** (On the order of zeros of one-signed solutions of elliptic equations. Pederson R. N.), J. Math. and Mech., 1959, 8, № 2, 193—196 (англ.)

Изучается поведение решений уравнения

$$Lu = \sum_{i=0}^{m} \sum_{i_1+\ldots+i_n=i} a_{i_1,\ldots,i_n}(x) \frac{\partial^i u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} = 0 \qquad (1)$$

порядка $m$, эллиптического в некоторой окрестности начала координат $n$-мерного евклидового пространства точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$, равных нулю при $x = 0$. Основной результат следующий:

Теорема. Если уравнение (1) равномерно эллиптично и коэффициенты при производных порядка $j$ ($j = 0, 1, \ldots, m$) принадлежат классу $C^j$, то существует постоянная $k \geqslant m$, зависящая только от постоянной эллиптичности и от модулей старших коэффициентов уравнения (1) и такая, что всякое решение этого уравнения, $j$-е производные которого имеют при $x = 0$ нуль порядка $k - j$ ($j = 0, 1, \ldots, m$), тождественно равно нулю.

Эта теорема дает ответ на вопрос, поставленный Фридманом (РЖМат, 1959, 408), предполагавшим, что $k$ зависит только от $n$ и $m$.

Автор на примере уравнения 4-го порядка

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + A \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \qquad (2)$$

показывает, что если старшие коэффициенты уравнения (1) (для уравнения (2) коэффициент $A$) достаточно велики, то существуют отличные от тождественного нуля решения этого уравнения, имеющие вместе со своими производными точку $x = y = 0$ нулем любого наперед заданного порядка. Л. Н. Слободецкий

**4057. О задаче Коши для гиперболических систем. Гординг Л.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4, М., АН СССР, 1959, 151—154

**4058. Система трех нелинейных уравнений диффузии. Резницкая К. Г.**, Уч. зап. Кишиневск. ун-т, 1959, **39**, 225—232

Доказывается существование и единственность решения системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - kuv + pw,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - kuv + pw,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + kuv - pw$$

в области $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant t < \infty$ с краевыми и начальными условиями:

$$u|_{x=0} = \mu, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=\infty} = 0,$$

$$v|_{t=0} = T, \quad v|_{x=\infty} = T, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,$$

$$w|_{t=0} = 0, \quad w|_{x=\infty} = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,$$

где $\mu$, $T$, $a^2$, $k$, $p$ — положительные постоянные.

Н. И. Мозжерова

**4059. О поведении решений параболической системы в окрестности изолированной особой точки. Эйдельман С. Д.**, Докл. АН СССР, 1959, 125, № 4, 743—745

В работе выделяется главная часть решения параболической системы, имеющего изолированную особую точку. Главная часть представляется с помощью фундаментальной матрицы решений данной системы. В качестве следствия устанавливается, что главная часть фундаментальной матрицы решений определяется однозначно. Аналогичные результаты для уравнения теплопроводности получены автором в его более ранней работе (РЖМат, 1959, 1522). Д. М. Эйдус

**4060. Интегральный принцип максимума для сильно параболических систем и некоторые его приложения. Эйдельман С. Д.**, Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 2, 252—258

Пусть $u(x, t)$ — вещественное решение параболической системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} B_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x, t)\, u$$

регулярное в полосе $0 \leqslant t \leqslant T$, $-\infty < x_s < \infty$. При некоторых условиях доказывается, что функция $F(t) =$

$= \int |u|^2 \exp[-g(x,t)]\,dx$, где интеграл берется по всему пространству, монотонно убывает в промежутке $0 \leqslant t \leqslant T$. При этом $g(x,t)$ — специальным образом подобранная функция. Доказываются некоторые следствия о единственности и устойчивости решения задачи Коши. Д. М. Эйдус

**4061. О разложении по собственным функциям уравнения Шредингера. Левитан Б. М.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 32—33

**4062. Разрывы решений квазилинейных дифференциальных уравнений с двумя переменными. Чжэнь** (Discontinuity of solutions of quasi-linear differential equations in two variables. Chen Y. W.), Communs Pure and Appl. Math., 1956, **9**, № 3, 373—381 (англ.)

**4063. О сведении системы квазилинейных уравнений к одному квазилинейному уравнению. Яненко Н. Н.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 43

**4064. Дифференцирование разложений по собственным функциям двумерного оператора Шредингера. Саргсян И. С.**, Изв. АН СССР. Сер. матем. 1959, **23**, № 3, 455—488

Изучается разложение по собственным функциям и дифференцирование разложений по собственным функциям уравнения

$$\Delta u + \{\lambda - q(x,y)\}\,u = 0, \qquad (1)$$

заданного в конечной или бесконечной области. Приведем один из основных результатов работы для случая конечной области $D$. Пусть $f(x,y) \in L_2(D)$, $\varphi_n(x,y)$ — собственные функции уравнения (1), $\lambda_n = \mu_n^2$ — соответствующие собственные значения. Пусть

$$c_n = \iint\limits_{(D)} f(x,y)\,\varphi_n(x,y)\,dxdy,$$

$$S_p(x,y) = \sum_{\mu_n < \mu} \left(1 - \frac{\mu_n^2}{\mu^2}\right)^p c_n \varphi_n(x,y).$$

Если функция $f(x,y)$ в окрестности точки $(x_0, y_0)$ имеет непрерывные частные производные до порядка $\alpha$ включительно, а функция $q(x,y)$ в окрестности этой точки имеет ограниченные частные производные до порядка $\alpha$ включительно, то

$$\lim_{\mu\to\infty} D_{xy}^{\alpha} S_{\alpha+\frac{1}{2}}(x,y;\mu)\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = D_{xy}^{\alpha} f(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},$$

где

$$D_{xy}^{\alpha} = \frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} \quad (\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha).$$

Такой же результат имеет место и в случае бесконечной области $D$, независимо от природы спектра. В случае трехмерного пространства аналогичные вопросы изучались референтом (РЖМат, 1959, 9106). Б. М. Левитан

**4065. Об одном классе нелинейных дифференциальных уравнений. Бакельман И. Я.**, Докл. АН СССР, 1959, **126**, № 2, 244—247

Пусть в област и $D \subset R_n$ с дважды гладкой границей $\Gamma$ задан дифференциальный оператор 2-го порядка $F(u) = F(u_{ik}, u_j, u; \mathbf{x})$. Считая, при фиксированном $\mathbf{x}$, значения функции $u$ и ее производных составляющими некоторого $(n+1)(n+2)/2$-мерного вектора $\mathbf{q} = (q_{ik}, q_j, q)$ $(1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n;\ 1 \leqslant j \leqslant n)$, сопоставляем оператору $F(u)$ функцию $F(\mathbf{q}, \mathbf{x})$. Исследуется связь между геометрическими свойствами поверхностей $F(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = 0$ в пространстве $Q$ векторов $\mathbf{q}$ и свойствами оператора $F(u)$.

Оператор $F(u)$ и уравнение $F(u) = 0$ называются тотально эллиптическими, если при любых $\mathbf{x} \in D$ и $\mathbf{q} \in Q$ выполняется неравенство

$$\sum_{i<k=1}^{n} F_{uik}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\,\xi_i \xi_k \geqslant \alpha_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad (\alpha_0 > 0).$$

Теорема 2 статьи показывает, что малость сферического изображения поверхности $F(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = 0$ обеспечивает однозначную разрешимость задачи Дирихле для тотально эллиптического уравнения $F(u) = 0$ в классе $\overset{0}{W}{}_2^2(D)$. Аналогичный результат имеет место и для некоторых уравнений более общего вида.

Отмечается, что эти построения допускают обобщение на нелинейные уравнения высших порядков.

М. З. Соломяк

## ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

Редакторы *В. В. Немыцкий, А. Г. Свешников, Н. И. Мозжерова*

**4066. Движение гироскопических систем. Новоселов В. С.**, Прикл. матем. и механ., 1959, **23**, № 1, 176—178

Рассматриваются дифференциальные уравнения малых колебаний с переменными коэффициентами так называемых „гироскопических" механических систем, т. е. систем, в уравнениях движения которых один из коэффициентов при производных первого порядка весьма велик сравнительно со всеми другими коэффициентами (коэффициент, связанный с собственным кинетическим моментом гироскопа).

В данной заметке в весьма сжатой форме даются оценки по данному коэффициенту решений системы уравнений, описывающих некоторые частные движения („условные прецессии и нутации").

Затем с той же точки зрения и тоже весьма кратко рассматривается система дополнительных уравнений, выражающих процесс некоторого автоматического регулирования гироскопической системы. В. В. Добронравов

**4067. Решение задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Горячева — Чаплыгина в гиперэллиптических функциях. Топорова В. А.**, УзССР Фанлар Акад. докладлари, Докл. АН УзССР, 1958, № 12, 9—13 (рез. узб.)

В работе рассматривается частный случай, указанный Д. Н. Горячевым в задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки под действием силы собственного веса, когда существует необходимый для решения задачи четвертый интеграл (алгебраический) системы уравнений движения. Автор предлагает иное доведение задачи до конца сравнительно с тем, как это было сделано С. А. Чаплыгиным. Вводя две системы новых переменных, автор в результате получает выражение переменных Эйлера $p, q, r, \alpha, \beta, \gamma$ в зависимости от времени через функции Розенхайна. Результаты всех сложных выкладок автор приводит в готовом виде.

В. В. Добронравов

**4068. Осцилляционные свойства колебаний продольно сжатого стержня. Кондратьев А. С., Чайкина З. С.**, Прикл. матем. и механ., 1957, **21**, № 4, 560—563

**4069. Применение асимптотического интегрирования волнового уравнения к решению некоторых волноводных и резонаторных задач. Гутман А.**, Докл. АН СССР, 1959, **125**, № 6, 1252—1255

Рассматривается задача о медленном изменении поперечного сечения полого волновода. Пренебрегая связями между отдельными типами волн, автор записывает линейное дифференциальное уравнение второго порядка для одной из волн и использует асимптотическое интегрирование в расширенной области (Петрашень М. И.,

Уч. зап. ЛГУ, 1949, **120**, № 7, 60). Указаны два случая, в которых этот метод удобен: бесконечный волновод с локальным расширением и полубесконечный волновод с расширением к торцу. Найдены интегральные выражения для собственных волновых чисел волн, резонирующих в расширенной части того и другого волновода. Приведены результаты сравнения расчета с экспериментом на примере перехода секториального волновода в круглый. В. В. Никольский

**4070. К исследованию свойств цепей одинаковых общих четырехполюсников. Долежал** (Beitrag zur Ermittlung der Eigenschaften von Ketten gleicher allgemeiner Vierpole. Doležal Václav), Acta techn. (Ceskosl.), 1958, **3**, № 4, 294—321 (нем.; рез. русск.)

Доказывается следующая теорема, несколько обобщающая известные ранее результаты (РЖМат, 1954, 3862). Пусть $A$ — матрица второго порядка со следом $x$ и определителем $y$ и $I$ — единичная матрица; тогда для каждого целого $n \geqslant 1$ имеем $A^n = Q_n(x, y)\,A + yQ_{n-1}(x, y)I$, где полиномы $Q_n$ определяются равенствами $Q_0 = 0$, $Q_1 = 1$, $Q_{n+1} = xQ_n - yQ_{n-1}$; если $y \neq 0$, то $A^{-n} = y^{1-n}[Q_n(x, y)\,A^{-1} - Q_{n-1}(x, y)\,I]$.

Основная часть статьи посвящена изучению полиномов $K_n(x) = Q_n(x, 1)$ (так как $Q_n(x, y) = y^{(n-1)/2}Q_n(xy^{-1/2}, 1)$). Эти полиномы выражаются при помощи тригонометрических функций и полиномов Чебышева $T_n(x)$, находятся их нули, дифференциальное уравнение, которому они удовлетворяют, рекуррентные соотношения, свойство ортогональности, связь с полиномами $B_n(x)$ и $Q_n(x)$ Туэро (РЖМат, 1957, 3270). Результаты применяются к вычислению различных характеристик цепей, составленных из одинаковых четырехполюсников.

Примечание референта. Полиномы $K_n(2x)$ совпадают с так называемыми полиномами Чебышева второго рода $u_n(x)$ (полиномами Якоби с $\alpha = \beta = 1/2$), которые хорошо изучены. Г. К. Энгелис

**4071. Одновременные колебания третьих собственных частот в нелинейном связном электрическом контуре. Мет** (Simultanschwingungen dreier Eigenfrequenzen in nichtlinearen Rückkopplungskreisen. Met Viktor), Arch. elektr. Übertrag., 1959, **13**, № 4, 161—170 (нем.; рез. англ.)

Устойчивые колеблющиеся состояния нелинейного связного электрического витка с тремя степенями свободы исследуются в предположении квазилинейности. Из резюме автора

**4072. Инвариантная вставка и теория переноса нейтронов. III. Процессы с нейтрон-нейтронным столкновением. Белман Калаба, Уинг** (Invariant imbedding and neutron transport theory. III. Neutron-neutron collision processes. Bellman Richard, Kalaba Robert, Wing G. Milton), J. Math. and Mech., 1959, **8**, № 2, 249—262 (англ.)

Метод инвариантной вставки (invariant imbedding), примененный ранее авторами для решения задач о переносе нейтронов в веществе (РЖМат, 1959, 9134; 1960, 471), обобщается для учета эффекта столкновения нейтронов друг с другом. Для иллюстрации метода на отрезке $(0, x)$ длины $x$ рассматривается одномерное блуждание нейтронов, определяемое условиями: на отрезке длины $h$ внутри интервала $(0, x)$ с вероятностью $ah + o(h)$ нейтрон испытывает деление, в результате которого рождается два нейтрона той же природы, причем один из них движется направо, а второй — налево; за счет столкновения нейтронов между собой уничтожается в среднем $buvh + o(h)$, $b > 0$ нейтронов в единицу времени. Здесь $u(z; x, y)$ ($v(z; x, y)$) есть среднее значение числа нейтронов, летящих в точке $z \in (0, x)$ в единицу времени справа налево (слева направо) при условии, что в правый конец $x$ отрезка $(0, x)$ вводится $y$ нейтронов в единицу времени. Используя метод инвариантной вставки, авторы выводят нелинейную систему

$$\frac{\partial u}{\partial z} = av - buv, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -au + buv \tag{1}$$

с граничными условиями:

$$u(0) = 0, \; u(x) = y. \tag{2}$$

Приведены результаты качественного исследования и численного решения полученной краевой задачи (1)—(2). Оказывается, например, что в этом случае не существует критической длины. В связи с этим отмечается аналогия с задачами гидродинамики: между критической длиной и временем появления ударной волны, параметр $b$ в уравнении (1) как бы играет роль вязкости.

Дано применение метода к двухгрупповым задачам. Рассмотрены и другие задачи. Библ. 7 назв. В. С. Владимиров

**4073. Общий синтез для вычислений одноконтактной и многоконтактной линейной системы (оптимальной модельной системы). Калман, Бертрам** (General synthesis procedure for computer control of single-loop and multiloop linear systems (an optimal sampling system). Kalman R. E., Bertram J. E.), Applic. and Ind., 1959, № 40, 602—609 (англ.)

**4074. Семинар Л. С. Понтрягина по математическим проблемам теории колебаний и автоматического регулирования. Гамкрелидзе** (Seminarul lui L. S. Pontreaghin asupra problemelor matematice ale teoriei oscilațiilor şi ale teglării automate. Gamkrelidze R. V.), An. Rom.-Sov. Ser. mat.-fiz., 1959, **13**, № 2, 168—172 (рум.)

Перевод из журнала „Успехи матем. наук" (РЖМат, 1958, 3422).

**4075. Случайный ответ сервомеханизма с зазором. Крир, Фетт** (Transient response of a servomechanism with backlash. Kreer J. B., Fett G. H.), Proc. Nat. Electron. Conf. Vol. 14. (Chicago, Ill., 1958), Chicago, Nat. Electron. Conf., Inc., 1959, 75—85 (англ.)

**4076. Введение в изучение нелинейных систем контроля. Колс** (An introduction to the study of non-linear control systems. Coales J. F.), J. Scient. Instrum., 1957, **34**, № 2, 41—47 (англ.)

**4077. Об одной форме уравнений сверхзвукового течения газа. Чуриков Ф. С.,** Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Механ. и машиностр., 1959, № 3, 204—207

Рассматриваются системы двух квазилинейных уравнений, могущие быть преобразованными к системам линейных уравнений:

$$\begin{aligned} v_x &= a(x, y)\,v + l(x, y, u, u_x, u_y), \\ v_y &= b(x, y)\,v + m(x, y, u, u_x, u_y), \end{aligned} \tag{1}$$

где $l$, $m$ — линейные функции $u$, $u_x$, $u_y$. Если $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$, то системе (1) равносильно уравнение второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = A(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + B(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \eta} + Cu + D. \tag{2}$$

Предполагается, что $\frac{\partial A}{\partial \xi} = \frac{\partial B}{\partial \eta}$; тогда уравнение (2) преобразуется с помощью подстановки к уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = a(\xi, \eta)\,w, \tag{3}$$

которое автор называет компактным, равно как и функцию $w$, удовлетворяющую (3). К уравнению (3) приводятся: а) уравнения одномерного изэнтропического течения идеального газа, б) уравнения плоского безвихревого установившегося изэнтропического течения идеального газа, в) уравнение Эйлера — Трикоми и некоторые дру-

гие уравнения. Сведение различных задач к уравнению (3) позволяет применить к решению этих задач методы теории интегральных уравнений, так как (3) может быть заменено интегральным уравнением.

Б. Л. Рождественский

**4078. Решение уравнений внутренней баллистики в случае степенного закона горения. Капур** (The solution of the equations of internal ballistics for power law of burning. Kapur J. N.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1958, **A24**, № 1, 15—30 (англ.)

Развивая идеи, изложенные в работах (Clemmow C. A., Philos. Trans. Roy. Soc., 1928, **227 A**, 345; Chapter X., Internal Ballistics. H. M. S. O. London, 1951), автор получает решение основной задачи внутренней баллистики в случае, когда В. В. обладает степенным законом горения:

$$B(p) = \beta p^{\alpha}.$$

Решение основных уравнений:

$$z = \zeta\xi + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\frac{\eta^2}{M}, \qquad (1)$$

$$\eta\frac{d\eta}{d\xi} = M\zeta, \qquad (2)$$

$$z = \Phi(f), \qquad (3)$$

$$\eta\frac{df}{d\xi} = -\zeta^{\alpha}, \qquad (4)$$

где $\xi$, $\eta$, $\zeta$ — безразмерные переменные, соответствующие координате, скорости и давлению, $M$ — внутренний баллистический параметр, а $(1-\alpha)$ для большинства метательных В. В. лежит в пределах от $-0{,}1$ до $+0{,}1$, сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка. Для произвольного $\gamma$ решение может быть затабулировано. В изотермическом случае ($\gamma = 1$) решение находится в виде ряда по степеням малого параметра $(1-\alpha)$.

В случае, когда (3) выбирается в виде

$$z = (1-f)(1+\theta f),$$

решение основных уравнений сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения второго порядка.

В. Ф. Куропатенко

**4079. О телах вращения с протоком, обладающих наименьшим внешним волновым сопротивлением в сверхзвуковом потоке. Никольский А. А.**, Сб. теор. работ по аэродинамике. М., Оборонгиз, 1957, 56—63

Задача решается в предположении, что течение в протоке не влияет на внешнее обтекание тела. Выражение сопротивления $X$ тела с образующей $AB$:

$$X = 2\pi\int_{AB} yp'dy$$

с помощью условий: а) на контуре $AB$ тела: $\rho udy - \rho v'dx = 0$, б) на характеристике $AC$:

$$(p + \rho u^2)_*^{\nu} dy - \rho uvdx = (p_{\infty} + \rho_{\infty} u_{\infty}^2)\,dy,$$

в) на характеристике $BC$:

$$dx = -\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}\;dy,$$

а также с помощью соотношения

$$\oint yp'dy + \oint yu'(\rho udy - \rho v'dx) = 0,$$

полученного из уравнений газодинамики для стационарного, осесимметрического, потенциального течения, преобразуется к виду:

$$X = \pi\rho_{\infty}\int_{BC} y\left[\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}\;u' - v'\right]^2 dy. \qquad (1)$$

Здесь $u'$, $v'$ — компоненты дополнительной скорости, $p'$ — дополнительное давление, $M_{\infty}$ — число $M$ невозмущенного потока.

После нахождения минимума функционала (1) и интегрирования $X$ принимает вид:

$$X = \pi\frac{\rho_{\infty} u_{\infty}^2}{2}\frac{(y_A^2 - y_B^2)^2}{y_C^2 - y_B^2}.$$

Для нахождения $u'$ и $v'$ решается краевая задача для потенциальной функции.

Линия контура тела вращения с минимальным сопротивлением $y = y(x)$ находится из уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v'}{u_{\infty} + u},$$

которое решается либо численно, либо методом последовательных приближений.

В. Ф. Куропатенко

**4080. Нелинейные колебания цилиндрической панели в сверхзвуковом потоке. Григолюк Э. И.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, **4**, М., АН СССР, 1959, 104—106

**4081. Сверхзвуковое обтекание крыла Δ с дозвуковым углом атаки. Лежандр** (Écoulement supersonique autour d'une aile Δ à bords d'attaque subsonique. Legendre Robert), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 9, 889—891 (франц.)

**4082. О некоторых асимптотических свойствах обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка. Кузнецов Н. Н.**, Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 2, 203—209

Рассматривается асимптотическое (при $t \to \infty$) поведение обобщенного решения задачи Коши для одного квазилинейного уравнения:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial A(v, t, x)}{\partial x} + B(v, t, x) = 0, \qquad (1)$$

где $A$ и $B$ таковы, что путем подстановок уравнение (1) можно свести к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2/2) = a(t)\,u + b(t)\,x + c(t).$$

По числу разрывов, которые не исчезают в обобщенном решении уравнения (1) при $t \to \infty$, автор разделяет уравнения (1) на три типа. Даны необходимые и достаточные условия принадлежности уравнения (1) к одному из этих трех типов. Пусть $v(t, x)$ и $\bar{v}(t, x)$ суть обобщенные решения уравнения (1), соответствующие начальным функциям $v_0(x)$ и $\bar{v}_0(x)$. Доказаны две теоремы: 1) Если в решении уравнения (1) при $t \to \infty$ все разрывы исчезают (уравнение типа 2), то для $\varepsilon > 0$ найдется $T(\varepsilon)$, что при $t > T(\varepsilon)$ $|v(t, x) - \bar{v}(t, x)| < \varepsilon$. 2) Если в решении уравнения (1) при $t \to \infty$ существует не более одного разрыва (уравнение типа 1) и $v_0(x)$ и $\bar{v}_0(x)$ совпадают вне конечного участка начальной оси, то для $\varepsilon > 0$ найдется $T(\varepsilon)$, что при $t > T(\varepsilon)$ $|v(t, x) - \bar{v}(t, x + \eta(t))| < \varepsilon$, где $\eta(t)$ ограничена и непрерывна. Для уравнения $\partial v/\partial t + \partial A(v)/\partial x = 0$ вычислена величина $\eta(t)$.

Б. Л. Рождественский

**4083. О волнах разрежения в каналах и трубах со слабо меняющимся сечением. Аймерих** (Su le onde di rarefazione nei canali e nei tubi di sezione poco variabile. Aymerich Giuseppe), Boll. Unione mat. ital., 1958, **13**, № 4, 543—550 (итал.; рез. англ.)

Рассматривается движение волны разрежения по каналу переменного сечения. В случае двумерного канала, переходя от декартовых координат $X$ и $Y$ к новым переменным $x$, $y$, $\vartheta$, автор получает для потенциала скорости уравнение

$$\varphi_{xx} - \alpha \frac{\vartheta}{x} \varphi_{x\vartheta} - \varphi_{yy} = 0, \qquad (1)$$

где

$$\alpha = 2\frac{\gamma-1}{3-\gamma}, \qquad \vartheta = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(\frac{X}{a_0 t} + \frac{2}{\gamma-1}\right),$$

$a_0$ — скорость звука в покоящейся жидкости.

С помощью замены переменных уравнение (1) приводится к виду

$$4f_{\xi\tau_1} - f_{yy} = 0. \qquad (2)$$

Пусть $Y = B + F(X)$ — уравнение края канала, причем $F(X)$ — гладкая функция. Ставятся следующие краевые условия: $f_y(\xi, \tau_1, 0) = 0$,

$$f_y(\xi, \tau_1, b) = \frac{2a_0}{\sqrt{(\gamma+1)(3-\gamma)}} \times$$

$$\times \frac{\xi^{\alpha/2} - 1}{\frac{\alpha+1}{\xi^{\frac{\alpha+1}{2}}}} F'(\tau_1^{1/2} z(\xi)), \qquad (3)$$

где

$$b = \frac{\sqrt{(3-\gamma)(\gamma+1)}}{\gamma-1} B, \quad z(\xi) = \xi^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{2}{\gamma+1}\xi^{\alpha/2}\right).$$

$f(\xi, \tau_1, y)$ еще обращается в нуль вместе со своими производными при $\xi = 1$ („голова" волны) и при $\tau_1 = 0$ („хвост" волны).

Затем автор рассматривает преобразование Фурье в интервале $(0, b)$ для функции $f(\xi, \tau_1, y)$. Полагая $p_n(\xi, \tau_1) = \int_0^b f(\xi, \tau_1, b) \cos\frac{n\pi y}{b}\, dy$, уравнение (2) дает:

$$\frac{\partial^2 p_n}{\partial\xi\partial\tau_1} + k_n^2 p_n = \frac{(-1)^n}{4}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y=b}, \qquad (4)$$

где $k_n = \frac{n\pi}{2b}$. Так как функция Римана для уравнения (4) есть $J_0[2k_n\sqrt{(\xi_0 - \xi)(\tau_{10} - \tau_1)}]$, то для $p_n(\xi_0, \tau_{10})$ получается формула

$$p_n(\xi_0, \tau_{10}) = \frac{(-1)^n a_0}{2\sqrt{(3-\gamma)(\gamma+1)}} \times$$

$$\times \int_1^{\xi_0} \frac{\xi^{\alpha/2} - 1}{\frac{\alpha+1}{\xi^{\frac{\alpha+1}{2}}}} d\xi \int_0^{\tau_{10}} J_0\left[2k_n\sqrt{(\xi_0 - \xi)(\tau_{10} - \tau_1)}\right] \times$$

$$\times F'(\tau_1^{1/2} z(\xi))\, d\tau_1.$$

Отсюда для потенциала скорости получается разложение

$$\varphi(X_0, Y_0, t_0) = \frac{\xi_0^{1/2}}{b}\left[p_0(\xi_0, \tau_{10}) + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{n=1}^{\infty} p_n(\xi_0, \tau_{10}) \cos\frac{n\pi y_0}{b}\right]. \qquad (5)$$

Кроме двумерного канала, автор рассматривает еще другие типы каналов и получает для них разложения потенциала скорости, аналогичные (5).

В заключение проводится краткое качественное исследование полученных результатов. Ю. Я. Погодин

**4084. К вопросу о кинематике потока жидкости при истечении с образованием воздушной воронки. Притвиц Н. А.,** Тр. Гидравл. лабор. Моск. инж.-строит. ин-т. М., Госстройиздат, 1958, 139—147

Поток несжимаемой идеальной жидкости имеет постоянную глубину. Течение винтовое. Свободная поверхность предполагается горизонтальной. Отверстие бесконечно мало и заменяется стоком, который помещается на произвольной глубине. Функция тока $\psi$ определена с помощью тригонометрического ряда по вертикальной координате $z$. Коэффициенты ряда выражаются через бесселевы функции, аргументы которых содержат расстояние от оси $r$. Произведены расчеты поверхностей тока и распределения скоростей. М. И. Гуревич

**4085. Примеры, иллюстрирующие процесс расширения для уравнений Навье-Стокса. Лагерстром, Кол** (Examples illustrating expansion procedures for the Navier-Stokes equations. Lagerstrom P. A., Cole J. D.), J. Rational Mech. and Analysis, 1955, **4**, № 6, 817—882 (англ.)

**4086. Асимптотические разложения в теории пограничного слоя. Стюартсон** (On asymptotic expansions in the theory of boundary layers. Stewartson K.), J. Math. and Phys., 1957, **36**, № 3, 173—191 (англ.)
См. РЖМех, 1959, № 7, 7751.

**4087. О преобразовании уравнений Навье-Стокса в уравнения Рейнольдса. Дюбрей-Жакотен** (Sur le passage des équations de Navier-Stokes aux équations de Reynolds. Dubreil-Jacotin Marie-Louise), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 24, 2887—2890 (франц.)
См. РЖМех, 1958, № 8, 8871.

**4088. О динамическом действии жидкости на цистерну при произвольном продольном ускорении. Филатов А. Н.,** Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1957, вып. 21, 107—111
См. РЖМех, 1959, № 2, 1433.

**4089. Обтекание тонких тел в трехмерном потоке. Хаскинд М. Д.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, **4**. М., АН СССР, 1959, 114—115

**4090. О бароклинном эффекте при ветровых течениях в глубоком море. Линейкин П. С.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, **4**. М., АН СССР, 1959, 119

**4091. К вопросу о восстановлении функции давления в пластах переменной проницаемости с учетом различия вязкостей воды и нефти. Молокович Ю. М.,** Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, **117**, № 9, 127—132
См. РЖМех, 1959, № 3, 2804.

**4092. К вопросу определения поля давления в пластах переменной проницаемости. Молокович Ю. М.,** Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, **117**, № 2, 120—124
См. РЖМех, 1958, № 10, 11323.

**4093. По поводу решения одной задачи теории фильтрации. Жаутыков О. А.,** КазССР Ғылым Акад. хабарлары, Изв. АН КазССР. Сер. матем. и механ., 1957, вып. 6 (10), 46—50 (рез. каз.)
См. РЖМех, 1958, № 11, 12901.

**4094. Работы по распространению упругих волн. (Теория и внедрение ее в практику). Петрашень Г. И.,** Вестн. Ленингр. ун-та, 1958, № 22, 119—136 (рез. англ.)

Работа содержит обзор основных математических работ советских ученых по теории упругих волн. Сначала рассматриваются работы, выполненные методом акад. В. И. Смирнова и С. Л. Соболева, затем работы, выполненные методом неполного разделения переменных. Вкратце указываются основные идеи этих методов, связь их между собой.

Использование, наряду с кинематическими характеристиками волн, еще и их динамических характеристик (таких, как их интенсивность, например) позволяет повысить надежность интерпретации сейсмограмм, «извлекать» из них больше, чем было возможно раньше.

Указывается, что в настоящее время созданы простые «инженерные» методы учета этих динамических характеристик, все более и более широко используемые в практических применениях сейсмологии. В. М. Бабич

**4095. Принцип Дюамеля и асимптотические решения динамических уравнений теории упругости. II. Скуридин Г. А.,** Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1959, № 3, 337—343

Работа посвящена новому выводу хорошо известных условий, которым должны удовлетворять разрыв векторной функции и и разрывы ее производных, если эта векторная функция является обобщенным решением однородных уравнений динамики упругого тела.

В. М. Бабич

**4096. Теория упругих волн от сферического источника для обобщенных граничных условий. Ванек** (Theory of elastic waves produced by a spherical source for gare-ralized boundary conditions. Vaněk Jiří), Чехосл. физ. ж., 1956, **6**, № 4, 302—309 (англ.; рез. русск.)

**4097. Количественное изучение нестационарной дифракции волн от сферических и цилиндрических областей. Макаров Г. И., Булдырев В. С., Гюннинен Э. М., Молотков И. А.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, **4**. М., АН СССР, 1959, 120

**4098. Об одном точном решении нестационарной граничной задачи для неоднородной среды. Алексеев А. С.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, **4**. М., АН СССР, 1959, 116

**4099. Некоторые динамические задачи теории упругости для сред, содержащих сферические границы раздела. Гельчинский Б. Я.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, **4**. М., АН СССР, 1959, 118

**4100. Исследования Герца контактной задачи и некоторые этапы их дальнейшего развития. Кильчевский** (Дослідження Г. Герца з контактної задачі і деякі етапи їх дальшого розвитку. Кільчевський М. О.), Прикл. механіка, 1958, **4**, № 2, 121—129 (укр.; рез. русск., англ.)

См. РЖМех, 1959, № 7, 7919.

**4101. Гравитационный потенциал эллиптического параболоида и бесконечного параболического цилиндра. Гаврилов Л. И.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, **4**. М., АН СССР, 1959, 117

**4102. Исследование проблемы Пуанкаре—Стеклова. Тодор** (Cercetări asupra problemei Poincaré—Stekloff. Todor Liviu I.), Studii şi cercetări mat. Acad. RPR, 1958, **9**, № 2, 503—545 (рум.; рез. русск., франц.)

В области $D$, ограниченной поверхностями $S_j$ ($j = 0, 1, \ldots, k$), требуется определить векторное поле $\mathbf{V}$ по условиям:

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\mathbf{V}(M) = \mathbf{R}(M), && M \in D,\\ &\operatorname{div}\mathbf{V}(M) = 0, && M \in D,\\ &\mathbf{n}_p\,\mathbf{V}(P) = 0, && P \in S_j, \end{aligned}$$

где $\mathbf{n}_p$ — единичный вектор нормали. Л. Лихтенштейн (Lichtenstein L., Rend. Circolo. mat. Palermo, 1934, 58, 166) свел решение задачи к решению $k+1$ задачи Неймана. В случае, когда $S_j$ являются поверхностями Ляпунова, автор сводит решение к одной задаче Неймана и конечному числу квадратур. Показано, что когда $\operatorname{div}\mathbf{V}$ и нормальная проекция $\mathbf{V}$ заданы, решение задачи не содержит новых трудностей. Найдены необходимые и достаточные условия разрешимости интегрального уравнения Вилля

$$\frac{1}{2}\mathbf{V}(P') - \frac{1}{4\pi}\iint_S \operatorname{grad}_{P'}\left(\frac{1}{r_{PP'}}\right)\times[\mathbf{n}_P\times\mathbf{V}(P)]\,d\sigma_P = \operatorname{rot}\boldsymbol{\Omega}(P') = \mathbf{F}(P'),$$

где $r_{PP'}$ — расстояние между точками $P$ и $P'$ и

$$\boldsymbol{\Omega}(M) = \frac{1}{4\pi}\iiint_D \frac{\mathbf{R}(Q)}{r_{MQ}}\,d\tau_Q.$$

Если $\mathbf{F}$ определено из задачи Пуанкаре — Стеклова, то интегральное уравнение Вилля разрешимо.

М. И. Гуревич

**4103. Развитие теории плоского напряженного состояния, предложенной Собреро. Энгль** (Weiterführung der Sobreroschen Theorie des ebenen Spanungszustandes. Engl W.), Ingr-Arch., 1959, **27**, № 2, 128—136 (нем.)

В работе Собреро (Sobrero L., Hamburger Math. Einzelschriften, 1934, **17**) дан метод исследования плоской задачи теории упругости при помощи гиперкомплексной функции напряжений, причем приложения ограничивались случаем сил, приложенных внутри материала, тогда как граница тела оставалась свободной от нагрузки. Автор развивает результаты Собреро на случай нагрузки, приложенной к контуру тела, и разбирает ряд частных примеров, известных в литературе. Г. С. Шапиро

**4104. О трех частных решениях уравнений Ламе плоской теории упругости в полярных координатах при отсутствии массовых сил. Щепетев А. Н.,** Тр. Научн. конференции Сталинского пед. ин-та. Вып. 2. Кемерово, 1957 (1958), 330—359

Найдены три частных решения уравнений Ламе в полярных координатах при отсутствии массовых сил и рассмотрены три примера. Эти решения имеют вид

$$U = e^{-q\rho}\,[A_0(\rho) + A_\nu(\rho)\cos\alpha_k\theta + B_\nu(\rho)\sin\alpha_k\theta],$$

$$V = e^{-q\rho}\,[C_0(\rho) + C_\nu(\rho)\cos\alpha_k\theta + D_\nu(\rho)\sin\alpha_k\theta], \tag{1}$$

$$U = e^{-\rho}\,[a_0(\theta) + a_\nu(\theta)\cos p_k\rho + b_\nu(\theta)\sin p_k\rho],$$

$$V = e^{-\rho}\,[C_0(\theta) + C_\nu(\theta)\cos p_k\rho + d_\nu(\theta)\sin p_k\rho], \tag{2}$$

$$U = a_0(\theta) + a_\nu(\theta)\cos p_k\rho + b_\nu(\theta)\sin p_k\rho,$$

$$V = C_0(\theta) + C_\nu(\theta)\cos p_k\rho + d_\nu(\theta)\sin p_k\rho. \tag{3}$$

И. П. Цай

**4105. Упруго-динамическая задача о центре вращения в полубесконечной среде из поперечно-изотропного материала. Чакраборти** (Elasto-dynamic problem concerning a centre of rotation in a semi-infinite medium of transversely isotropic material. Chakraborty Sakti Kanta), Proc. Nat. Inst. Sci., India, 1958, **A24**, № 4, 250—255 (англ.)

Рассматривается задача о „центре вращения" в поперечно-изотропной среде, т. е. в такой среде, где все направления, параллельные некоторой плоскости (принятой в работе за плоскость $z = 0$), равнозначны. Все рассмотрение ведется в цилиндрических координатах $\rho$, $\theta$, $z$. Компоненты $U_r$ и $U_z$ вектора смещения полагаются равными нулю. Единственная отличная от нуля компонента $U_\theta$ легко находится в конечном виде для любой зависимости „интенсивности" центра вращения от времени (ось центра вращения при этом, очевидно, параллельна оси $OZ$).

Рассмотрена также задача об отражении волны, порожденной центром вращения, от плоскости $z = 0$. Задача эта тоже легко решается в конечном виде.

В. М. Бабич

**4106. Распространение формул Альманси на упругие анизотропные системы. Синьорини** (Estensione delle formule di Almansi a sistemi elastici anisotropi. Signorini Antonio), Atti Accad. naz. Lincei.

Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1958, 25, № 5, 246—253 (итал.)

Показано, что в теории конечных деформаций анизотропной среды могут быть получены формулы, которые, связывая напряжения с производными упругого потенциала по главным удлинениям, представляют обобщение соответствующих формул Альманси, выражающих, в изотропной среде, главные напряжения линейно через названные производные. Н. А. Ростовцев

**4107. Колебание неоднородного анизотропного полупространства с осью упругой симметрии вращения при заданных смещениях на границе. Сунчелеев Р. Я.,** Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1957, вып. 21, 83—89

См. РЖМех, 1959, № 8, 9150.

**4108. Упругие колебания полых многосвязных балок. Мигиренко Г. С.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, 4, М., АН СССР, 1959, 110—111

**4109. Изгиб. Милн-Томсон** (Flexure. Milne-Thomson L. M.), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **90**, № 1, 143—160 (англ.)

Решение задачи об упругом изгибе изотропного односвязного стержня сведено к разысканию одной голоморфной функции $\Phi(z)$ из условия на границе стержня

$$\Phi(z)\frac{dz}{ds} - \overline{\Phi}(\bar{z})\frac{d\bar{z}}{ds} = (p + q\bar{z} + rz)\,\bar{z}\frac{dz}{ds} - (\bar{p} + qz + \bar{r}\bar{z})\,z\frac{dz}{ds}.$$

Путем использования функции Коши показано, что это условие определяет функцию $\Phi(z)$ единственным образом, если поперечное сечение стержня можно конформно отобразить на единичный круг. Зная функцию $\overline{\Phi}(z)$, легко определить все интересующие нас величины: напряжения, смещения, угол закручивания и центр изгиба.

Отмечается, что метод допускает распространение на двусвязные поперечные сечения, которые можно отобразить на круговое кольцо. Г. С. Шапиро

**4110. Кручение, растяжение и изгиб цилиндрических стержней, составленных из различных анизотропных материалов. Борш** (Torsiunea, întinderea şi încovoierea barelor cilindrice, alcătuite din mai multe materiale anizotrope. Borş C. I.), Studii şi cercetări ştiinţ. Acad. RPR Fil. Iaşi. Mat., 1957, 8, № 2, 163—190 (рум.; рез. русск., франц.)

Задача кручения призматического стержня, состоящего из нескольких анизотропных материалов, сведена к системе двух интегральных уравнений. К аналогичной системе сводится задача об изгибе поперечной силой, причем коэффициенты Пуассона считаются одинаковыми.

Приведены элементарные решения задачи о растяжении стержня, а также изгиба парой в случае одинаковых коэффициентов Пуассона.

В случае различных коэффициентов Пуассона задачи растяжения и изгиба парой сведены к некоторым задачам о плоской деформации, а задача изгиба поперечной силой — к тем же задачам о плоской деформации и к решению задачи, аналогичной случаю кручения.

Я. С. Уфлянд

**4111. Растяжение и кручение естественно закрученных стержней. Марченко В. М.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, 4. М., АН СССР, 1959, 108—110

**4112. Изгиб круглой пластины с эксцентрическим отверстием. Кудрявцев Н. В.,** Сб. научн. тр. Всес. заочн. ин-т пищ. пром-сти, 1957 (1958), вып. 4, 33—46

С помощью биполярных координат методом разделения переменных решена задача об изгибе эксцентрического кольца, закрепленного по обоим краям и нагруженного сосредоточенной силой. Рассмотрен также предельный случай нулевого внутреннего радиуса, что соответствует изгибу диска, закрепленного во внутренней точке.

В работе отсутствует ссылка на монографию референта „Биполярные координаты в теории упругости" (ГТТИ, 1950), где решены аналогичные задачи. Я. С. Уфлянд

**4113. Решение проблемы изгиба тонкой плиты под поперечной нагрузкой методами комплексной переменной. Ю И-юань** (Flexural problems of thin plates under lateral loading solved by the complex variable method. Yu Yi-yuan), Actes. IX Congr. internat. mécan. appl. T. 6. Bruxelles, Univ. Bruxelles, 1957, 378—389 (англ.)

Известные методы Н. И. Мусхелишвили применены к задаче поперечного изгиба упругой тонкой плиты и, в частности, к случаю круглой плиты с закрепленным, свободно опертым или свободным краем. Я. С. Уфлянд

**4114. Малые прогибы упруго опертых плит. Хаусрат** (Small deflections of elastically supported plates. Hausrath A. H.), Actes. IX Congr. internat. mécan. appl. T. 6. Bruxelles, Univ. Bruxelles, 1957, 367—377 (англ.)

Рассмотрено равновесие тонкой плиты произвольного очертания, лежащей на упругом основании и изгибаемой поперечной нагрузкой. С помощью метода Бергмана (Bergman S., The kernel function and conformal mapping, 1950) устанавливается связь между функцией Грина для случая закрепленного контура и функцией Неймана, соответствующей свободному краю плиты. Я. С. Уфлянд

**4115. О колебаниях круглых пластинок переменной толщины. Казанцева** (Про коливання круглих пластинок змінної товщини. Казанцева Г. Є.), Прикл. механіка, 1958, **4**, № 2, 197—204 (укр.; рез. русск., англ.)

См. РЖМех, 1959, № 5, 483.

**4116. Расчет тонких плит переменной жесткости. Шенгелия Г.,** Сакартвелос политехникури институти. Шромеби, Тр. Груз. политехн. ин-та, 1957, № 9(57), 193—198 (груз.; рез. русск.)

**4117. Нерегулярные волноводы с переменным диэлектрическим заполнением. Каценеленбаум Б. З.,** Радиотехн. и электроника, 1958, 3, № 7, 890—895

Рассматривается распространение электромагнитных волн в волноводе с неоднородным заполнением. Применяемый метод состоит в следующем: поперечные компоненты полей **E** и **H** в сечении $z = \zeta$ представляются в виде рядов типа Фурье

$$E_{x,y} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} P_\nu E^\nu_{x,y}, \quad H_{xy} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} P_\nu H^\nu_{x,y}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{E}^\nu$ и $\mathbf{H}^\nu$ — поля в регулярном волноводе, в котором $\varepsilon(x, y)$ и $\mu(x, y)$ совпадают с $\varepsilon$ и $\mu$ в данном сечении. Для коэффициентов разложения $P_\nu(\zeta)$ получается бесконечная система дифференциальных уравнений

$$P_j' + ih^j P_j = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} S_{j\nu} P_\nu. \qquad (2)$$

Здесь $h^j = h^j(\zeta)$ — волновые числа волн в соответствующем регулярном волноводе, $S_{lj} = S_{lj}(\zeta)$ — величины, названные автором коэффициентами связи. Они определяются формулами

$$S_{lj} = \frac{1}{2N_l}\int (E^i_x H^{j'}_y - E^i_y H^{j'}_x + E^{j'}_x H^i_y - E^{j'}_y H^i_x)\,ds, \qquad (3)$$

$$N_l = \int (E^l_y H^i_x - E^i_x H^l_y)\,ds.$$

В заключение указывается, что расчет нерегулярного волновода переменного сечения также может быть проведен с помощью предложенного метода. Для этого волновод переменного сечения следует считать помещенным в волновод постоянного сечения, но с переменным

заполнением и осуществить в полученных формулах предельный переход при $\varepsilon \to \infty$ в области, заключенной между волноводами. Приводятся расчетные формулы для коэффициентов связи $S_{ij}$, полученные из формул (3) после соответствующего предельного перехода. Автор отмечает, что вопрос о полноте системы решений для регулярного волновода, т. е. вопрос о возможности разложений вида (1) им не рассматривался.

Д. П. Костомаров

**4118. О стыке двух плоских разнородных волноводов. Марьин П. П.**, Радиотехника и электроника, 1959, 4, № 1, 3—11

Два волновода одинаковой высоты, ограниченные двумя параллельными плоскостями и двумя, вообще говоря, криволинейными стенками, сочленены друг с другом; в месте стыка они имеют одинаковые сечения. Со стороны одного волновода падает одна из распространяющихся в нем электромагнитных волн; ищутся амплитуды всех волн, рассеянных стыком. Эти величины удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений. Для вывода этой системы используется лемма Лоренца, примененная к малой области вблизи стыка, которая ограничена координатными поверхностями, ортогональными к стенкам обоих волноводов. Лемма Лоренца последовательно применяется к искомому полю и к вспомогательным полям, которые выбираются в виде волн всех типов, идущих по направлению к стыку. Система решается методом последовательных приближений; первое приближение получается в предположении, что в уравнениях можно пренебречь всеми амплитудами, кроме амплитуды падающей и искомой волны.

Б. З. Каценеленбаум

**4119. О распространении электромагнитного поля вдоль сверхпроводников и теоремы взаимности электромагнитных полей. Лампарьелло** (Intorno alla propagazione di onde elettromagnetiche nei superconduttori e ai teoremi di reciprocità del campo elettromagnetico. Lampariello Giovanni), Atti. Accad. naz. Lincei. Cl. sci., fis., mat. e natur., 1957, **22**, № 3, 302—310 (итал.)

См. РЖФиз, 1958, № 3, 6601.

**4120. О задаче на собственные значения стационарного электромагнитного поля. Ито** (Itoh Makoto), Кюсю дайгаку когаку сюхо, Technol. Repts Kyushu Univ., 1958, **31**, № 3-4, 153—159 (японск.)

**4121. Эквивалентные соотношения в теории дифракции. Карп, Вильямс** (Equivalence relations in diffraction theory. Karp S. N., Williams W. Elwyn), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1957, **53**, № 3, 683—690 (англ.)

См. РЖФиз, 1958, № 8, 18643.

**4122. Обратное преобразование начального электромагнитного потенциала. Итакура** (Itakura Tokuya), Кюсю дайгаку когаку сюхо, Technol. Repts Kyushu Univ., 1958, **31**, № 3-4, 160—162 (японск.)

**4123. Проблема Коши в теории относительности, электромагнетизма и в унитарной теории Жордана—Тири. Фурес-Брюа** (Le problème de Cauchy dans la théorie relativiste de l'électromagnétisme et dans la théorie unitaire de Jordan—Thiry. Fourès-Bruhat Y.), Helv. phys. acta, 1956, Suppl., № 4, 76—78 (франц.)

**4124. Об одном методе решения уравнений магнитной гидродинамики. Бланкфилд, Мак-Витте** (A method of solution of the equations of magnetohydrodynamics. Blankfield Judith, McVittie G. C.), Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1959, **2**, № 5, 411—422 (англ.)

Рассматривается система уравнений магнитной гидродинамики для идеально проводящей невязкой жидкости в специальных безразмерных переменных:

$$\nabla \mathbf{H} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times [\mathbf{H} \times \mathbf{U}] = 0, \tag{2}$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho (\mathbf{U}\nabla)\,\mathbf{U} + \nabla p + \mu \mathbf{H} \times [\nabla \times \mathbf{H}] = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{U}) = 0. \tag{4}$$

Уравнения (3) и (4) преобразуются к виду

$$\mathrm{Div}\, T^{\mu\nu} = 0, \tag{5}$$

здесь $T^{\mu\nu}$ — энергетический тензор с компонентами

$$\begin{aligned} T^{44} &= \rho, \\ T^{4l} &= \rho U_e, \\ T^{lm} &= \rho U_l U_m - H_l H_m, \\ T^{ll} &= \rho U_l^2 + p + \frac{1}{2}\left(-H_l^2 + H_m^2 + H_n^2\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Далее авторы обращаются к уравнениям Эйнштейна общей теории относительности

$$T^{\mu\nu} = \frac{\varepsilon^2}{\eta}\left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - R^{\mu\nu}\right), \tag{7}$$

где

$$\varepsilon = \frac{\nu}{c} \qquad \eta = \frac{8\pi G \nu}{c^2} \qquad \nu = \frac{l}{t},$$

$l$ — единица длины, $t$ — единица времени, $c$ — скорость света, $G$ — гравитационная постоянная. В ньютоновском приближении уравнения (7) для рассматриваемого случая принимают вид

$$\begin{aligned} \rho &= -\nabla^2 \psi \\ \rho U_l &= \frac{\partial^2 \psi_l}{\partial \xi^4 \partial \xi^l} + \frac{1}{2}\left(\nabla^2 \zeta_l - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \zeta_l}{\partial \xi^i \partial \xi^l}\right) \\ \rho U_l U_m - H_l H_m &= \\ \left(= \frac{\partial^2}{\partial \xi^l \partial \xi^m}(\psi_4 - \psi_n) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \zeta_l}{\partial \xi^m \partial \xi^4} + \frac{\partial^2 \zeta_m}{\partial \xi^m \partial \xi^4}\right)\right. & \\ \rho U_l^2 + p + \frac{1}{2}\left(-H_l^2 + H_m^2 + H_n^2\right) &= \\ = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 \zeta_m}{\partial \xi^4 \partial \xi^m} + \frac{\partial^2 \zeta_n}{\partial \xi^4 \partial \xi^n} + & \\ + \frac{\partial^2}{(\partial \xi^m)^2}(\psi_n - \psi_4) + \frac{\partial^2}{(\partial \xi^n)^2}(\psi_m - \psi_4). & \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь слева стоит тензор (6), правая часть уравнений (7) в ньютоновском приближении была вычислена в предыдущей работе авторов с учетом следующего выражения для метрики:

$$d\sigma^2 = [1 - \eta(\psi + 2\varepsilon^2 \psi_4)]\,(d\xi^4)^2 - 2\varepsilon^2 \eta \sum_{i=1}^{3} \zeta_i d\xi^i d\xi^4 -$$

$$- \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{3} [1 + \eta(\psi + 2\varepsilon^2 \psi_i)]\,(d\xi^i)^2,$$

$\sigma$ — безразмерная длина, $\xi^\mu$ — безразмерные координаты, $\psi$, $\psi_\mu$ и $\zeta_l$ — неопределенные функции координат $\xi^\mu$. Эти функции следует выбрать так, чтобы выполнялись уравнения (1) и (2). Уравнения (3) и (4) выполняются

автоматически. Далее авторы решают систему (8) в одномерном случае при условии, что $\zeta_l = 0$.

Д. П. Костомаров

**4125. Аддитивность в магнитной гидродинамике. Капур** (Superposability in magnetohydrodynamics. Kapur J. N.), Appl. Scient. Res., 1959, **A8**, № 2-3, 198—208 (англ.)

Изучается вопрос: при каких условиях сумма двух гидромагнитных состояний также будет гидромагнитным состоянием. Вводя обозначения: $\mathbf{q}$ — скорость потока, $\boldsymbol{\omega}=\mathrm{rot}\mathbf{q}$, $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля, $\mathbf{j}$ — плотность электрического тока, $\mu_l$ — магнитная проницаемость, $\rho$ — плотность жидкости, искомые условия можно записать в такой форме (для случая вязкой несжимаемой жидкости):

$$\mathrm{rot}\left\{[\omega_2 q_1] + [\omega_1 q_2] - \frac{\mu_l}{\rho}[j_2 H_1] - \frac{\mu_l}{\rho}[j_1 H_2]\right\} = 0,$$

$$[q_1 H_2] + [q_2 H_1] = 0.$$

Из этих общих условий автор выводит ряд частных и сравнивает их с результатами других авторов.

О. И. Панич

**4126. Магнитогидродинамическое возмущение, обусловленное внезапным введением магнитного диполя в жидкость конечной проводимости. Эль-Мохандис** (Magnetohydrodynamic disturbances due to the sudden introduction of a magnetic dipole in a fluid of finite conductivity. el Mohandis M. G. S.), Astrophys. J., 1959, 129, № 1, 172—193 (англ.)

Рассматривается возмущение, которое создается в покоящейся жидкости, благодаря внезапному появлению в ней в момент времени $t = 0$ магнитного диполя. Предполагается, что жидкость находится в однородном магнитном поле $\mathbf{H}_0$ и является проводящей невязкой и несжимаемой. Из общей системы уравнений магнитной гидродинамики получены линеаризованные уравнения для скорости и возмущения магнитного поля, которые решаются с помощью преобразования Фурье по пространственным переменным и преобразования Хевисайда по времени.

Д. П. Костомаров

**4127. Замечание о классе диффузионных уравнений. Гислин** (Note on a class of diffusion equations. Geeslin Roger H.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1958, **44**, № 8, 788—791 (англ.)

В статье, примыкающей к известной работе Э. Хилле (РЖМат, 1956, 8840), изучается задача Коши для уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[b(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right] \qquad (1)$$

в пространстве $L(-\infty, \infty)$; $b(x)$ — непрерывная положительная функция в следующих двух случаях: 1) $B(-\infty) < \infty$ и $B(\infty) < \infty$; 2) $B(-\infty) = B(\infty) = \infty$; $B(x) = \int_0^x \frac{sds}{b(s)}$. В обоих рассматриваемых случаях решение дается „интегралом Пуассона"

$$T(t)[f](x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, s, t) f(s)\, ds, \qquad (2)$$

$f \in L(-\infty, \infty)$. В первом случае функция $K(x, s, t)$ представима в виде „Θ-ряда", для случая 2) перечисляются свойства функции Грина $G(x, s, \lambda)$ уравнения $\frac{d}{dx}\left[b(x)\frac{du}{dx}\right] = \lambda u$, $-\infty < x < \infty$. В заключение подсчитывается функция $K(x, s, t)$ для $b(x) = x^2 + 1$. Доказательства отсутствуют.

С. Д. Эйдельман

**4128. Вычисление матрицы плотности однородной системы термического равновесия. Саролеа, Коппе** (Évaluation des matrices de densité dans les systèmes homogènes en équilibre thermique. Saroléa L., Koppe H.), Z. Phys., 1958, **151**, № 4, 385—395 (франц.; рез. нем.)

**4129. Замечания относительно измерений коэффициента теплопроводности. Таверные** (Remarques sur les mesures de conductivité thermique. Tavernier Jean), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 8, 1135—1137 (франц.)

Рассматривается распространение тепла вдоль прямоугольного бруса (в направлении оси $OX$), на боковых поверхностях $y = \pm y_0$ которого имеют место потери тепла. Задача формулируется в виде:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = a\frac{\partial T}{\partial t}, \qquad (1)$$

$-\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right) = hT$ — на боковой поверхности, $a = \frac{c}{k}$, где $k$ — коэффициент теплопроводности, а $c$ — удельная теплоемкость. В стационарном случае $\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0\right)$ существует решение вида

$$T(x, y) = T[x - g(y)] = T(z),$$

для которого эквитемпературные поверхности, определяемые уравнением $x - g(y) = \mathrm{const}$, получаются одна из другой путем перемещения. Отсюда следует, что можно определять температурные разности в брусе, производя измерения на его боковой поверхности. Из уравнения (1) получается уравнение для определения $g$ и $T(z)$:

$$\frac{g''(y)}{1+g'^2(y)} = \frac{T''(z)}{T'(z)} = -\alpha.$$

Уравнение для определения $\alpha$ получается из граничного условия: $\mathrm{tg}\,\alpha y_0 = h\alpha^{-1}$. При условии симметрии и регулярности на бесконечности, решение имеет вид:

$$T(x, y) = A\alpha^{-1}\exp(-\alpha x)\cos\alpha y + B.$$

В нестационарном случае $\left(\frac{\partial T}{\partial t} \neq 0\right)$, при наличии синусоидального режима, решение можно представить в виде: $T(x, y, t) = \exp i\{\gamma[x - g(y)] - \omega t\}$; при этом эквитемпературные поверхности будут перемещаться в рассматриваемом брусе. Коэффициент $\gamma$ будет комплексным: $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, где константа $\gamma_1$ характеризует фазу температурной волны, а $\gamma_2$ — ее ослабление. Показано, что $a = c/k = 2\gamma_1\gamma_2/\omega$. Тем самым при наличии потери тепла через боковые поверхности для определения коэффициента теплопроводности $k$ с помощью температурных волн необходимо найти как $\gamma_1$, так и $\gamma_2$.

В. И Беляев

**4130. Новая форма нелинейного обобщения теории элементарных частиц со спином. Петьо** (Sur une nouvelle forme de généralisation non linéaire de la théorie des corpuscules à spin. Pétiau Gérard), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 18, 2581—2583 (англ.)

См. РЖФиз, 1959, №, 5, 9842.

**4131. О волновых функциях нового типа, решениях нелинейного уравнения, обобщающего уравнения волновой механики. Петьо** (Sur des fonctions d'ondes d'un type nouveau, solutions d'équations non linéaires généralisant l'équation des ondes de la mécanique ondulatoire. Pétiau Gérard), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 14, 1890—1893 (франц.)

См. РЖФиз, 1958, № 3, 5178.

**4132. Волновые функции для атома водорода в сфероидальных координатах. I. Производные и свойства функции. Коулсон, Робинсон** (Wave functions for the hydrogen atom in spheroidal coordinates. I. The derivation and properties of the functions. Coul-

son C. A., Robinson P. D.), Proc. Phys. Soc., 1958, 71, № 5, 815—827 (англ.)
См. РЖФиз, 1958, № 12, 27153.

**4133. Волновые функции для атома водорода в сфероидальных координатах. II. Взаимодействие с точечным зарядом и диполем. Робинсон** (Wave functions for the hydrogen atom in spheroidal coordinates. II. Interaction with a point charge and with a dipole. Robinson P. D.), Proc. Phys. Soc., 1958, 71, № 5, 828—842 (англ.)
См. РЖФиз, 1958, 12, 27154.

**4134. Казуальная теория волн, распространяющихся со сверхсветовой скоростью. Шмидт** (Eine kausale Theorie für Wellen, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten. Schmidt Helmut), Z. Phys., 1958, 151, № 4, 408—420 (нем.)

**4135 Д. Исследование периодических решений задачи динамики регулятора скорости сейсмографов. У Яохуа.** Автореф. дисс. канд. техн. н., Моск. высш. техн. уч-ще им. Н. Э. Баумана, М., 1959

---

**См. также:** 3652, 3925, 3943, 3948, 3987, 4209, 4218, 4219, 4227, 4255, 4256, 4260, 4272, 4411 Д, 4514, 4528, 4570—4593.

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редакторы *В. В. Немыцкий, Н. И. Мозжерова*

**4136. Об устойчивости решения системы интегральных уравнений Вольтерра 2 рода. II. Винокуров В. Р.**, Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 2, 50—58

Тривиальное решение уравнения

$$y(x) = \int_a^x M[x,\ s,\ y_1(s), \ldots, y_n(s)]\, ds,$$

где $y$ и $M$ — $n$-мерные векторные функции [$M(x, s, 0, \ldots, 0) \equiv 0$], автор называет устойчивым, если по любому числу $\varepsilon > 0$ можно указать число $\delta > 0$ такое, что для всех функций $f(x)$, подчиненных условию $\| f(x) \| < \delta$, решения уравнений

$$U(x) = f(x) + \int_a^x M[x, s, U_1(s), \ldots, U_n(s)]\, ds$$

удовлетворяют неравенству $\| U(x) \| < \varepsilon$ для $x \in [a, \infty]$.

Априори задавая свойства $n$-квадратных матричных функций $K(x, s)$, $H(x, s, U_1, \ldots, U_n)$, автор получает достаточные условия устойчивости и неустойчивости тривиального решения системы уравнений

$$U'(x) = \int_a^x \{K(x, s) + H[x, s, U_1(s), \ldots, U_n(s)]\}\, U(s)\, ds.$$

Я. В. Быков

**4137. Новое доказательство формулы Карлемана. Чжан Ши-сюнь** (Chang Shih-hsun), Сычуань дасюэ, сюэбао (цзыжань кэсюэ); Sichuan daxue xuebao (Ziran kexue), Вестн. Сычуаньск. ун-та. (Сер. естеств. н.), Acta scient. natur. Univ. szechuan., 1959, № 1, 59—74 (кит.; рез. англ.)

Карлеман доказал, что если $K(x, y)$ — измеримая функция $(x, y)$ и $K(x, y) \in L_2$, т. е.

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2\, dx dy < \infty,$$

где интервал интегрирования $(a, b)$ может быть конечен или бесконечен, тогда решение интегрального уравнения

$$f(x) = \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy$$

дается формулой

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{\lambda}{d^*(\lambda)} \int_a^b D^*(\lambda;\ x,\ y)\, f(y)\, dy,$$

где $d^*(\lambda) \neq 0$,

$$d^*(\lambda) = 1 + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^h}{h!} \int_a^b \ldots \int_a^b N_h(r_1, \ldots, r_h)\, dr_1, \ldots, dr_h,$$

$$-D^*(\lambda;\ x,\ y) = K(x, y) +$$

$$+ \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^h}{h!} \int_a^b \ldots \int_a^b N_h^*(x, y; r_1, \ldots, r_h)\, dr_1, \ldots, dr_h,$$

$$N_n(r_1, \ldots, r_n) = \begin{vmatrix} 0, & K(r_1, r_2), \ldots, K(r_1, r_n) \\ K(r_2, r_1), & 0, \quad \ldots, K(r_2, r_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K(r_n, r_1), & K(r_n, r_2), \ldots, 0 \end{vmatrix},$$

$$N_n^*(x, y, r_1, \ldots, r_n) = \left| \begin{array}{l|l} K(x, y), & K(x, r_1), \ldots, K(x, r_n) \\ K(r_1, y) & \\ \vdots & \quad N_n(r_1, \ldots, r_n) \\ K(r_n, y) & \end{array} \right|$$

Позже эта формула была доказана рядом авторов, например, Хилле и Тамаркиным (Hille, Tamarkin); С. Г. Михлин, Смитис, (Smithies) недавно эту формулу обобщили на решения функциональных уравнений в гильбертовом пространстве. В представленной статье дано элементарное доказательство этой формулы.

Из резюме автора

**4138. Об интегральном уравнении с симметричным ядром. Америо** (Sulle equazioni integrali con nucleo simmetrizzabile. Amerio Luigi. Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat., 1956, 90, 141—155) (итал.)

Ядро $K(x, y)$ в квадрате $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$, называется симметризуемым слева симметричным ядром $H(x, s)$, если функция

$$g(x, y) = \int_0^1 H(x, z)\, K(z, y)\, dy$$ является симметричной

относительно $x$ и $y$. $K$ предполагается ограниченным и $H$ — суммируемым и может быть действительным и комплексным. Автор рассматривает интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y)\, \varphi(y)\, dy + f(x)$$

в классе суммируемых функций $\varphi$, $f$. Если $\lambda$ не является собственным значением интегрального уравнения, то, как показал Альбертони (РЖМат, 1959, 9107), резольвента ядра $\Gamma(x,y)$ симметризуема слева относительно $H$. В статье доказывается, что если $\lambda$ является собственным значением, то это не так, но вообще имеет место формула

$$\int_0^1 H(x,z)\,\Gamma(z,y)\,dz = \int_0^1 H(y,z)\,\Gamma(z,x)\,dz - \sum\{\psi_t(x)\,w_t(y) - \psi_t(y)\,w_t(x)\},$$

где $\psi_t$ — собственные функции транспонированного ядра $K(y,x)$ и $w_j$ — некоторые функции (в общем не равные тождественно нулю) ортогональные $\psi_t$. J. W. Green

Переход Math. Revs, 1957, 18, № 8, 657.

**4139. Об одном приближенном способе решения интегральных уравнений типа Вольтерра. Ведешкина Л. А.,** УзССР Фанлар Акад. докладлари, Докл. АН УзССР, 1958, № 11, 9—14 (рез. узб.)

Пользуясь методом механических квадратур, изложенным в работе Ш. Е. Микеладзе (Тр. Матем. ин-та им. А. М. Размадзе, 1951, 18), автор строит приближенное решение интегрального уравнения

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,s)\,u(s)\,ds$$

и оценивает погрешность приближений в узлах интерполяции путем модификации способа, рассмотренного в работе И. П. Мысовских (РЖМат, 1957, 4385).

Я. В. Быков

**4140. Исследование нелинейных сингулярных интегральных уравнений в $L_2$. Абдинова А. Б.,** Аспирантларын элми эсярляри. Азярб. унив., Научн. тр. аспирантов. Азерб. ун-т, 1957, вып. 1, 15—21 (рез. азерб.)

**4141. Разложение функций по собственным функциям краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. Ландо Ю. К.,** Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 2, 118—127

Автор вводит понятие регулярности для краевых условий вида

$$R_t(u) = \sum_{k=0}^{n-1}[\alpha_{tk}u^{(k)}(0) + \beta_{tk}u^{(k)}(1)] = 0, \qquad (1)$$
$$t = 1, 2, \ldots, n$$

и устанавливает условия регулярности для частных классов краевых условий. Основным содержанием работы является изучение асимптотического поведения решений интегро-дифференциального уравнения

$$u^{(n)}(x) + \sum_{t=0}^{n-2} a_t(x)\,u^{(t)}(x) + \sum_{t=0}^{n-1}\int_0^x A_t(x,t,\rho)\times \times u^{(t)}(t)\,dt + \rho^{n+1}\int_0^x u(t)\,dt = 0 \qquad (2)$$

при достаточно больших значениях модуля параметра $\rho$ и изучение достаточных условий разложимости функции $f(x)$ по собственным функциям задачи (1) (2) с регулярными краевыми условиями.

Я. В. Быков

**4142. Построение в замкнутой форме решения одного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и антипериодической правой частью. Коничек** (Konstruktion der geschlossenen Form der Lösung einer Integro-Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und antiperiodischer rechter Seite. Koníček Oldřich), Acta techn. (ČSR), 1959, 4, № 1, 22—51 (нем.; рез. русск.)

Методом операционного исчисления автор исследует условие существования периодического с периодом $2T$ решения $y(t)$ уравнения

$$a_0y'(t) + a_1y(t) + a_2\int_0^t y(\tau)\,d\tau + a_3 = f(t), \qquad (2)$$

меняющего знак через полупериод [$y(t+T) = -y(t)$], предполагая, что $a_k$ — постоянные, $f(t+T) = -f(t)$. Затем излагается метод построения такого решения и рассматривается физическая задача.

Примечание референта. Условия существования и метод построения периодических решений, меняющих знак через полупериод, для более общего класса интегро-дифференциальных уравнений изложены в III главе монографии референта (РЖМат, 1959, 482 К).

Я. В. Быков

**4143. Задача Коши для одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений с ядром в виде полинома относительно параметра. Габиб-Задэ** (Нүвәси параметрә көрә полином олан бир синиф интегро — дифференсиал тәнликляр үчүн коши мәсәләси. hәбибзадә Ә. Ш.), АзәрбССР Элмляр Акад. хәбәрляри. Физ.-техн. вә кимя элмляри сер. Изв. АН АзербССР. Сер. физ.-техн. и хим. н., 1958, № 5, 3—6 (азерб., рез. русск.)

Решение задачи Коши $u^{(k)}(0) = 0 \quad (k = 0, \ldots, n-1)$ для уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\,u^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{m}\int_0^1 \lambda^k H_k(x,s)\,u(s)\,ds = f(x) \qquad (1)$$

автор приводит к решению системы интегральных уравнений вида

$$v(x) + \int_0^1 [K_0(x,s) + \lambda K_1(x,s)]\,v(s)\,ds = g(s). \qquad (17)$$

Матричные ядра $K_0(x,s)$, $K_1(x,s)$ определяются через коэффициенты уравнения (1).

Априори задавая свойства матричного ядра

$$F(x,s,\lambda) \equiv K_0(x,s) + \lambda K_1(x,s)$$

автор получает условия разрешимости рассматриваемой задачи Коши для уравнения (1).

Примечание референта. На стр. 5 автор утверждает, что из уравнений (11), (14), (15) получается система интегральных уравнений (17), эквивалентная рассматриваемой задаче. На самом деле для получения (17) к (11), (14), (15) следует присоединить еще уравнение

$$\varphi_{11}(x) = \int_0^1 A'_{1x}(x,s)\,\varphi(s)\,ds.$$

Имеются также опечатки в уравнениях (3), (16) и в равенстве (6).

Я. В. Быков

**4144. Исследование решения одного класса линейных нагруженных интегральных уравнений. Габиб-заде А. Ш.,** Физ. вә рийазијјат инст. әсәрляри. АзәрбССР Елмляр Акад., Тр. Ин-та физ. и матем. АН АзербССР, 1959, 8, 177—182 (рез. азерб.)

Изучение линейного нагруженного интегрального уравнения

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n}\lambda^k[a_k(x)\,u(\alpha_k - 0) + b_k(x)\,u(\alpha_k + 0) + \int_0^1 H_k(x,s)\,u(s)\,ds] + f(x), \qquad (1)$$

полиномиально зависящего от параметра $\lambda$, автор приводит к исследованию одного интегрального уравнения, линейно зависящего от параметра. Сущность метода заключается в следующем. Предполагая, что $H_{kx}^{(i)}(0,s) \equiv 0$ ($i = 0, \ldots, n-2$), и пользуясь приемом, изложенным в ранней его работе (реф. 4143), от уравнения (1) автор переходит к системе линейных интегральных уравнений,

склеивая которую получает одно уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{k=1}^{p} [A_k(x)\,\varphi(\beta_k - 0 + k - 1) + B_k(x) \times$$

$$\times \varphi(\beta_k + 0 + k - 1)] + \lambda \int_0^m Q(x, s)\,\varphi(s)\,ds + F(x). \quad (17)$$

Применяя к обеим частям этого уравнения операторы $L_k(u) \equiv u(\beta_k - 0 + k - 1)$; $M_k(u) \equiv u(\beta_k + 0 + k - 1)$ и вводя вспомогательные функции, автор получает систему линейных интегральных уравнений, склеивание которой приводит к интегральному уравнению

$$v(x) = \lambda \int_0^{3p+1} N(x, s)\,v(s)\,ds + l(x). \quad (22)$$

В случае, когда для некоторых значений $i$ $H_{kx}^{(i)}(0, s) \not\equiv 0$, решение уравнения (1) приводится к решению интегрального уравнения с вырожденным ядром, нелинейно зависящим от параметра.

Примечания референта. 1) В работе имеется большое количество опечаток, например, в соотношениях (1), (6), (11). В (11) индекс $j$ следует заменить на 1. 2) Допущена ошибка при переходе от уравнения (1) к системе интегральных уравнений (16), так как для получения системы интегральных уравнений, эквивалентной уравнению (1), следует добавить к (10), (11), (12), (13), (14) и (15) еще несколько уравнений. Тогда изменится уравнение (17), а уравнение (22) примет вид

$$v(x) = \int_0^{3p+1} [M(x, s) + \lambda N(x, s)]\,v(s)\,ds + l(x).$$

3) В рассмотрении случая $H_{kx}^{(i)}(0, s) \not\equiv 0$ допущена ошибка в построении функции $f_0(x)$. Я. В. Быков

**4145. О функции Грина краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра. Ландо Ю. К.,** Уч. зап. Минск. гос. пед. ин-та, 1958, вып. 9, 65—70

Излагается метод построения функции Грина краевой задачи

$$u^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} [P_k(x)\,u^{(k)}(x) - \int_0^x A_k(x, y, \lambda)\,u^{(k)}(y)\,dy =$$

$$= f(x), \quad (1)$$

$$R_l(u) = \sum_{k=0}^{n-1} [\alpha_{lk} u^{(k)}(0) + \beta_{lk}\,u^{(k)}(1)] = 0, \quad (2)$$

$$(i = 1, \ldots, n)$$

где $A_k(x, y, \lambda)$ являются аналитическими функциями параметра $\lambda$ в некоторой области $(D)$. Коэффициенты уравнения (1) предполагаются непрерывными функциями в квадрате $0 \leqslant x, y \leqslant 1$. Для случая простого полюса $\lambda_0$ автором получено явное выражение главной части функции Грина через собственные функции краевой задачи (1), (2) и ей сопряженной краевой задачи.

Я. В. Быков

**4146. Дифференциальная граничная задача линейного сопряжения и ее применение в теории интегро-дифференциальных уравнений. Исаханов Р. С.,** Сакартвелос ССР Мецниереба та Академиис моамбе, 1958, **20**, № 6, 659—666 (груз.); Сообщ. АН ГрузССР, 1958, **20**, № 6, 659—666 (русск.)

Изучаются условия разрешимости и излагаются методы построения решений следующих задач: 1) Найти кусочно-голоморфные функции $\Phi(z)$, имеющие конечный порядок на бесконечности, по заданному граничному условию

$$\sum_{k=0}^{m} \left\{ A_k(t)\,\overset{(k)}{\Phi^+}(t) + B_k(t)\,\overset{(k)}{\Phi^{-1}}(t) + \right.$$

$$+ \frac{1}{\pi i} \int_L \left[ R_k(t, \xi)\,\overset{(k)}{\Phi^+}(\xi) + \right.$$

$$\left. \left. + S_k(t, \xi)\,\overset{(k)}{\Phi^-}(\xi) \right] \frac{d\xi}{\xi - t} \right\} = g(t), \quad (1)$$

где $t \in L$ — простой замкнутый гладкий контур. 2) Найти решения интегро- дифференциального уравнения

$$\sum_{r=0}^{m} \left\{ a_r(t)\,u^{(r)}(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{K_r(t, \xi)\,u^{(r)}(\xi)\,d\xi}{\xi - t} \right\} =$$

$$= f(t);\ t \in L, \quad (2)$$

$m$-я производная $u^{(m)}(t)$ которых удовлетворяет условию Гёльдера.

Предполагается, что заданные функции, входящие в (1) и (2), удовлетворяют условию Гёльдера.

Я. В. Быков

**4147. Об устойчивости решений системы интегро-дифференциальных уравнений. Барбашин Е. А., Либерман Л. Х.,** Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 3, 18—22

В работе изучаются необходимые и достаточные условия устойчивости, устойчивости по показательному закону, достаточные условия асимптотической устойчивости и равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \varphi(x, u, v)}{\partial u} = \int_a^b K_1[x, s, u, \varphi(s, u, v)]\,ds +$$

$$+ F_1[x, u, \varphi(x, u, v)] \equiv N(x, \varphi), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi(x, u, v)}{\partial v} = \int_a^b K_2[x, s, u, \varphi(s, u, v)]\,ds +$$

$$+ F_2[x, v, \varphi(x, u, v)] \equiv M(x, \varphi),$$

в предположении, что функционалы $N(x, \varphi)$ и $M(x, \varphi)$ удовлетворяют условию

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial K_1}{\partial \varphi} M(s, \varphi) - \frac{\partial K_2}{\partial \varphi} N(s, \varphi) \right] ds \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} N(x, \varphi) - \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} M(x, \varphi). \quad (3)$$

Основным содержанием работы является установление взаимосвязи между характерами поведений решения системы уравнений (1) и решений уравнений

$$\frac{d\psi(x, u)}{du} =$$

$$= \int_a^b K_1[x, s, u, \psi(s, u)]\,ds + F_1[x, u, \psi(x, u)], \quad (5)$$

$$\frac{d\mu(x, v)}{dv} =$$

$$= \int_a^b K_2[x, s, v, \mu(s, u)]\,ds + F_2[x, v, \mu(x, v)]. \quad (6)$$

Я. В. Быков

**4148. Об одной краевой задаче для квазилинейного интегро-дифференциального уравнения. Векилов Ш. И.**, Физ. вә ријазијјат инст. әсәрләри. АзәрбССР Елмләр Акад., Тр. ин-та физ. и матем. АН АзербССР, 1959, 8, 77—85 (рез. азерб.)

Изучаются достаточные условия существования обобщенного решения квазилинейного интегро-дифференциального уравнения

$$\sum_{k,\,i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + C(x)\,u = \lambda \int_{\Omega} K(x,\xi)\,F\left[\xi, u(\xi), \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial \xi_m}\right] d\Omega_\xi, \qquad (1)$$

удовлетворяющего условию $u|_S = 0$ (2), где $S$ — граница области $\Omega$. При некоторых ограничениях, накладываемых на функции $A_{ik}$, $C(x)$, краевую задачу (1) (2) автор приводит к уравнению вида

$$u(x) = \lambda G \int_{\Omega} K(x;s)\,F\left[s, u(s), \frac{\partial u}{\partial s_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial s_m}\right] d\Omega. \qquad (4)$$

Пользуясь теоремами В. В. Немыцкого, Шаудера и принципом сжатых отображений, автор получает достаточные условия существования обобщенного решения уравнения (4). Имеются опечатки и неудачные обозначения, например в формулировке теоремы 3.

Я. В. Быков

**4149. Интегро-дифференциальные уравнения теории пологих тонких оболочек. Березовский А. А.**, Укр. матем. ж., 1959, **11**, № 2, 146—154 (рез. англ.)

Показано, что в области $S$ некоторой поверхности, параметризированной произвольной ортогональной системой гауссовых координат $\alpha_1$ и $\alpha_2$, решение системы дифференциальных уравнений в частных производных $L^i(u_j) = p^i$ при граничных условиях: а) на границе $l$ заданы правые части $p^i$ или некоторые функции, т. е. $K^i(u_j) = p^i$ или $N^k(u_j) = q^k$, которые должны удовлетворять условию равенства размерностей $L[u_j p^i] = L[q^k du_j/d\alpha_k]$; б) на границе $l$ заданы сами функции $u_j$ или их первые производные $du_j/d\alpha_k$; в) на границе $l$ заданы одно из условий а), а второе — из б); г) на части границы $l$ заданы условия а) или в), а на второй — б) или в), — приводится к решению системы интегро-дифференциальных уравнений

$$u_\alpha = \iint_S u^\alpha_{j0}\,p^i ds = \iint_S u_i L^i_*(u^\alpha_{j0})\,ds + \oint_l \left[u^\alpha_{j0} K^i(u_j) - u_i K^i(u^\alpha_{j0}) + \frac{\partial u^\alpha_{k0}}{\partial \alpha_n} N^k_n(u_j) - \frac{\partial u_k}{\partial \alpha_n} N^k_n(u^\alpha_{j0})\right] dl,$$

где $u^\alpha_{j0}$ — решение системы $L^i_0(u^\alpha_{j0}) = \begin{cases} \delta^\alpha, & i = \alpha \\ 0, & i \neq \alpha \end{cases}$ при граничных условиях, не противоречащих условиям, указанным выше; $\delta^\alpha$ — дельта функция; $L^i_* = L^i - L^i_0$. При нулевых граничных условиях система (1) обращается в систему интегральных уравнений.

Решение системы интегро-дифференциальных уравнений (1) найдено для частного случая, отвечающего прямоугольной в плане оболочке, закрепленной по контуру. Рассмотрена также задача о колебании этой оболочки в случае, когда нормальная нагрузка изменяется по гармоническому закону. Последнее осуществляется путем решения соответствующей системы интегро-дифференциальных уравнений, получаемой из системы (1) путем добавления во втором уравнении этой системы инерционного члена. Наконец, рассмотрена задача об устойчивости указанной оболочки, сжатой по кромкам равномерно распределенными усилиями. Эти задачи решены методом Фурье путем применения двойных тригонометрических рядов.

М. И. Розовский

**4150. Об интегро-дифференциальных уравнениях второго порядка, допускающих группу С. Ли. Узаков Ю. К.**, УзССР Фанлар Акад. ахбороти. Физ.-матем. фанлари сер., Изв. АН УзССР Сер. физ.-матем. н., 1958, № 4, 53—63 (рез. узб.)

Задавая группу оператором

$$L \equiv u(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + v(x,y)\frac{\partial}{\partial y},$$

автор строит интегро-дифференциальные уравнения вида

$$H(x,y,y',y'') = \int_a^b K(x,y,y',y'',\xi,\eta,\eta',\eta'')\,d\xi, \qquad (1$$

где

$$\eta = y(\xi);\ \eta' = y'(\xi);\ y'' = y''(\xi),$$

допускающие данную группу; затем излагается метод отыскания подстановок, которые позволяют понизить порядок уравнения (1). Теоретический материал иллюстрируется конкретными примерами.

Я. В. Быков

**4151. К решению интегральных уравнений колебания балок типа баланса методом интераций. Кабулов В. К.**, Изв. АН УзССР, Сер. физ.-матем. н., 1958, № 2, 39—50 (рез. узб.)

Рассматриваются малые колебания балок конечной длины с учетом сдвигов и инерции вращений. Для некоторых частных случаев приводятся приемы вычисления квадратур, встречающихся при решении задачи. Приведены результаты расчета консольной балки конечной длины, заделанный конец которой движется по параболическому закону. Отметим также, что к задачам, рассмотренным в данной работе и в РЖМат, 1960, 3100, применялся операционный метод, однако развитый здесь прием может иметь вычислительные преимущества.

И. И. Ворович

**4152. Метод интегральных уравнений в задачах теории тонкого крыла в сжимаемом потоке. Красильщикова Е. А.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, 4. М., АН СССР, 1959, 106—108

---

**См. также:** 4213, 4218, 4594, 4595, 4621.

# ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Редактор *М. К. Керимов*

**4153. Об одной теореме А. М. Размадзе. Магнарадзе Л. Г.**, Тбилисис университетис шромеби, Тр. Тбилисск. ун-та, 1955, **56**, 1—12 (рез. груз.)

Доказывается ряд теорем, обобщающих известную лемму Размадзе из вариационного исчисления (Razmadze A., Math. Ann., 1921, **84**, 115—116). В частности, доказывается, что если $\omega(x)$ — любая непрерывно дифференцируемая функция, $\omega(a) = \omega(b) = 0$, и если

$$\int_a^b A(x)\,\omega(x)\,d\alpha(x) + B(x)\,\omega'(x)\,d\beta(x) = 0, \qquad (1)$$

где $B(x)$ непрерывна, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ имеют ограниченную вариацию, $\int_a^x |A(t)|\,dV\alpha(t)$ всюду существует и почти всюду непрерывен, то почти всюду

$$[B(x)\beta'(x) = \text{const} + \int_a^x A(t)\,d\alpha(t). \qquad (2)$$

Из (2) будет следовать (1), если $\beta(x)$ абсолютно непрерывна, а $A(x)$ и $B(x)$ непрерывны.

Для

$$\int_a^b [M(x)\,\omega(x) + N(x)\,\omega'(x)]\,dx = 0, \qquad (3)$$

где $M(x)$ — суммируемая, $N(x)$ — непрерывная, необходимо и достаточно, чтобы $dN/dx = M(x)$ почти всюду.

Если $\omega(x)$ — любая $n$ раз непрерывно дифференцируемая функция, $\omega^{(k)}(a) = \omega^{(k)}(b) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, то из

$$\int_a^b A(x)\,\omega(x)\,d\alpha(x) + B(x)\,\omega^{(k)}(x)\,d\beta(x) = 0,$$

где $A(x)$ и $B(x)$ непрерывные, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — функции ограниченной вариации, почти всюду имеем

$$B(x)\beta'(x) = P_{n-1}(x) + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} A(t)\,d\alpha(t),$$

$P_{n-1}(x)$ — произвольный полином не выше $n-1$ степени.

К. К. Малинский

**4154. Спрямляемые кривые и интеграл Вейерштрасса. Чезари** (Rectifiable curves and the Weierstrass integral. Cesari Lamberto), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 7, 485—500 (англ.)

Автор подробно излагает известные результаты теории кривых в параметрической форме. Приводятся определения: кривой в параметрической форме, длины кривой, длины кривой в смысле Жордана, спрямляемой кривой, эквивалентности кривых в смысле Фреше и Лебега, расстояния между кривыми в смысле Фреше, интеграла Лебега—Тонелли (интеграл линии), интеграла Вейерштрасса. Определения поясняются примерами. Изучаются вопросы: о полунепрерывности длины кривой в смысле Жордана, о независимости длины кривой и интеграла Вейерштрасса от параметрического задания кривой, о связи интеграла Вейерштрасса и интеграла Лебега—Тонелли и т. д.

С. Ф. Морозов

**4155. К выводу уравнений Эйлера для полета по брахистохроне в заданный конечный пункт в вертикальной плоскости при различных конечных условиях. Бербом** (Zur Herleitung der Eulergleichungen des brachystochronen endpunktgebundenen Steigfluges in vertikaler Ebene bei verschiedenen Endbedingungen. Behrbohm Hermann), Z. Flugwiss., 1956, **4**, № 12, 373—382 (нем.; рез. англ., франц.)

Выводятся уравнения Эйлера для вариационной задачи об оптимальном по времени полете реактивного самолета в заданный конечный пункт в вертикальной плоскости. Учитывается уменьшение полетного веса с расходом топлива и зависимость силы тяги и силы сопротивления от высоты самолета и числа Маха. Находятся естественные граничные условия.

Е. Д. Гарбер

**4156. О натуральном уравнении для брахистохроны. Янкович** (On the natural equation for brachistochrone. Jankovic Z.), Actes. IX Congr. internat. mécan. appl. T. 5. Bruxelles, Univ. Bruxelles, 1957, 54—62 (англ.)

Уравнение Эйлера для брахистохроны в потенциальном силовом поле $F = F(r)$ записывается в виде $2\mathbf{F} + \operatorname{grad}(\rho F_n) = 0$ ($\rho$ — радиус кривизны, $\mathbf{n}$ — нормаль). Как следствие, доказывается, что заданное семейство брахистохрон определяет соответствующее силовое поле с точностью до произвольного постоянного множителя. В качестве примеров рассматриваются случаи однородного и центрального силовых полей. Работа содержит опечатки.

Е. Д. Гарбер

**4157. Новые способы решения вариационных задач средствами динамического программирования. Беллман** (Some new techniques in the dynamic programming solution of variational problems. Bellman Richard), Quart. Appl. Math., 1958, **16**, № 3, 295—305 (англ.)

Исследуется вариационная задача: найти экстремум функционала $J(y) = \int_0^T F(x_1, x_2, \ldots, x_N; y_1 y_2, \ldots, y_M)\,dt$ или $(y) = H[x_1(T), x_2(T), \ldots, x_k(T)]$ на функциях $y_1, y_2, \ldots, y_M$, связанных с $x_i$ соотношениями $\frac{dx_i}{dt} = G_i(x_1, x_2, \ldots, x_N; y_1, y_2, \ldots, y_M)$, $x_i(0) = c_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$,

$$\left.\begin{aligned} x_i(T) &= b_i \quad i = 1, 2, \ldots, k \\ R_i(x, y) &\leqslant 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

С этой целью образуется функция $N$ переменных

$$f(c_1, c_2, \ldots, c_N; T) = \max_y J(y),$$

где max берется на функциях $y_i(t)$, удовлетворяющих условием (1). При определенных условиях, налагаемых на функцию $f$, она удовлетворяет нелинейному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial T} = \max_{v_i}\left[F(c, v) + \sum_{i=1}^N G_i(c, v)\frac{\partial f}{\partial c_i}\right],$$

$$f(c_1, c_2, \ldots, c_N; 0) \equiv 0,$$

$$m_i \leqslant v_i \leqslant m_i', \quad i = 1, 2, \ldots, N, \quad R_i(c, v) \leqslant 0.$$

Если $F$ и $G$ — достаточное число раз дифференцируемые функции, то полученное уравнение сводится к уравнению Эйлера — Лагранжа.

В краткой форме автор обсуждает вычислительные трудности, связанные с решением указанных задач, рассматривает некоторые частные задачи и методы последовательных приближений.

Л. Я. Цлаф

**4158. К вариационному исчислению. Мартин-Хадраке** (Sobre ei calculo de variaciones. Jadraque Martin V.), Gac. mat., 1958, **10**, № 5-6, 154—160 (исп.)

Заметка носит методический характер и посвящена выводу необходимых условий экстремума функционалов вида $I=\int_a^b f(x, y, y')\,dx$, варьируя их на функциях вида $Y=ye^{\lambda\varphi}$, где $\varphi(x)$ — произвольная функция, $\varphi(a)=\varphi(b)=0$. Аналогично получается уравнение Эйлера для функционала

$$I=\int_a^b f(x, y, y', y'')\,dx$$

и функционала

$$I=\iint_R F(x, y, Z, Z_x, Z_y)\,dxdy,$$

где в последнем случае функция $\varphi(x, y)$ и ее частные производные обращаются в нуль на границе области $R$, а функционал варьируется на функциях вида $Z=ze^{\lambda\varphi}$.

Л. Я. Цлаф

**4159. Некоторые проблемы физики, исследуемые новым вариационным методом. Торио-Баладрон** (Algunos problemas físicos estudiados por un nuevo método variacional. Torio Baladron Francisco), Rev. geofís., 1958, **17**, № 67, 305—323 (исп.)

Рассматриваются приложения принципов Мопертюи, Гамильтона и Ферма к задачам о распространении света, о распространении радиоволн, о распространении материи в галактике. Новизна вариационного метода, указываемая автором, относится к способу получения уравнений экстремалей (РЖМат, 1959, 8120). Л. Я. Цлаф

---

**См. также**: 4410 К, 4448, 4533, 4560 Д.

## АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

Редакторы *В. В. Немыцкий, В. К. Захаров*

**4160. О разных выражениях теоремы о пределах. Натуччи** (Sulle varie dimostrazioni di un teorema sui limiti. Natucci A.), Giorn. mat. Battagliní, 1958, **86**, № 2, 209—214 (итал.)

Предел при $x\to x_0$ $\log_a$ от переменной $x$ равен логарифму предела переменной:

$$\lim_{x\to x_0}\log_a x=\log_a\lim_{x\to x_0}x.$$

**4161. Преобразование трансцендентной кривой в рациональную. Бухнер** (Übergang einer transzendenten in eine rationale Kurve. Buchner P.), Elem. Math., 1959, **14**, № 4, 83—84 (нем.)

**4162. О трех функциях синуса. Татаркевич** (O trzech funkcjach sinus. Tatarkiewicz K.), Roczn. Polsk. towarz. mat. Ser. II—Wiadom. mat., 1959, **2**, № 2, 277—280 (польск.)

**4163. Решение уравнения $ze^z=a$. Райт** (Solution of the equation $ze^z=a$. Wright E. M.), Bull. Amer. Math. Soc., 1959, **65**, № 2, 89—93 (англ.)

**4164. Необходимое и достаточное условие линейности функции. Радецкий** (Warunek konieczny i dostateczny liniowości funkcji. Radecki J.), Roczn. Polsk. towarz. mat. Ser. II—Wiadom. mat., 1959, **2**, № 2, 281—282 (польск.)

**4165. О расположении нулей производной рациональной функции от полиномов расстояния. Шеррер** (On the location of the zeros of the derivative of rational functions of distance polynomials. Schurrer Augusta). Trans. Amer. Math. Soc., 1958, **89**, № 1, 100—112 (англ.)

Пусть $\mathbf{v}(x_1, \ldots, x_m)$ — вектор в действительном $m$-мерном пространстве; функция $F(x_1, \ldots, x_m)=c\Pi_{j=1}^p(\mathbf{v}-\mathbf{v}_j)^{2m_j}$ (где $\mathbf{v}_j$ — фиксированные векторы, $\sum_{j=1}^p m_j=n$) называется полиномом расстояния степени $n$. Пусть $R(x_1, \ldots, x_m)=\Pi_{j=0}^q F_j/\Pi_{j=q+1}^p F_j$, $0\leqslant q\leqslant p$, $F_0=1$ и $F_j$ $(j>0)$ — полином расстояния степени $n_j$ и пусть $R^1=(\operatorname{grad} R)^2/4R$. Основной результат статьи (теорема 1): Если для каждого $j>0$ все нули функции $F_j$ лежат в области $\sigma_j S_j(\mathbf{v})\equiv\sigma_j[(\mathbf{v}-\mathbf{c}_j)^2-r_j^2]\leqslant 0$, где $r_j>0$ и $\sigma_j=1$ или $\sigma_j=-1$, то каждый конечный нуль функции $R'$ удовлетворяет хотя бы одному из $p+1$ неравенств

$$\sigma_j S_j(\mathbf{v})\leqslant 0,\quad j=1, 2, \ldots, p; \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^p\frac{NN_j}{S_j(\mathbf{v})}-\sum_{j=1}^p\sum_{k=j+1}^p\frac{N_jN_k\tau_{jk}}{S_j(\mathbf{v})S_k(\mathbf{v})}\leqslant 0. \qquad (2)$$

Здесь $N_j=\nu_j n_j$, $\nu_j=1$ при $j\leqslant q$ и $\nu_j=-1$ при $j>q$; $N=\sum_{k=1}^p N_j$; $\tau_{jk}=(\mathbf{c}_j-\mathbf{c}_k)^2-(\nu_j\sigma_j r_j-\nu_k\sigma_k r_k)^2$.

Теорема 2 содержит аналогичное утверждение относительно нулей функции $R-\lambda^2R'$; здесь первая сумма в (2) заменяется через $\sum_{j=1}^p\frac{\lambda N_j T_j(\mathbf{v})}{NS_j(\mathbf{v})}$, где

$$T_j(\mathbf{v})=[\mathbf{v}-\mathbf{c}_j-(N\lambda\operatorname{grad}R)/(\operatorname{grad}R^2)]^2-r_j^2.$$

Рассматривается ряд частных случаев теоремы 1, обобщающих результаты Уолша и Бохера: 1) $m=3$, $p=q=2$; 2) $m=3$, $p=q=3$, сферы $S_1=0$, $S_2=0$, $S_3=0$ имеют общий центр подобия; 3) $m=3$, $p=q=3$, $r_1=r_2=r_3$; 4) $m=3$, $p=2$, $q=1$, $\sigma_{1,2}=1$; 5) $m=3$, $p=2$, $q=1$, $n_1=n_2$, области (1) без общих точек; 6) $m$ — произвольное, $p=3$, $q=2$, $n_1+n_2=n_3$, области (1) без общих точек. Во всех этих случаях (2) также определяет сферическую область.

Опечатка в условии леммы 1 должно быть $\mathbf{c}'=(\mathbf{V}-\mathbf{c})/S(\mathbf{V})$. Г. К. Энгелис

**4166. О линейной зависимости между функциями. Монтель** (Sur la dépendance linéaire des fonctions. Montel Paul), Изв. Матем. ин-т. Бълг. АН, 1959, **3**, № 2, 99—104 (франц.; рез. болг., русск.)

Ищутся необходимые и достаточные условия линейной зависимости функций $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$, определенных и непрерывных на некотором интервале. Так как относительно производных не делается никаких предположений, то вместо определителя Вронского вводятся смешанные определители Казорати

$$D_{ph,qk}=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ u_1(x+h) & u_2(x+h) & \ldots & u_n(x+h) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1(x+ph) & u_2(x+ph) & \ldots & u_n(x+ph) \\ u_1(x+k) & u_2(x+k) & \ldots & u_n(x+k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1(x+qk) & u_2(x+qk) & \ldots & u_k(x+qk) \end{vmatrix},$$

где $p+q=n-1$.

Доказывается следующая теорема: Для линейной зависимости непрерывных функций $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$

необходимо и достаточно обращение в нуль определителей

$$D_{(n-1)h},\ D_{(n-2)h,\,k},\ D_{(n-3)h,\,2k},\cdots$$
$$\ldots,\ D_{h,(n-2)k},\ D_{(n-1)k}$$

при иррациональном отношении $h/k$. А. Н. Черкасов

**4167. Результаты исследований по асимптотическим интегралам и интегральным приближениям. Сюй Ли-чжи,** Дунбэй женьминь дасюэ цзыжань-кэсюэ сюэбао, Acta scient. natur., 1957, № 1, 215—233 (кит.)

**4168. К оценке одного интеграла. Тиман М. Ф.,** Укр. матем. ж., 1957, **9**, № 4, 452—454

Пусть вещественные числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ образуют либо выпуклую, либо вогнутую последовательность. Тогда

$$\int_0^x |K_n(t)|\,dt = \frac{2x}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_{n-k+1}}{kx+1} + O(\max|\alpha_k|), \qquad (1)$$

где $K_n(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kt$ и константа в $O(\ )$ не зависит от $n$ и $x$. При $x = \pi$ оценка (1) была ранее получена А. Ф. Тиманом (РЖМат, 1956, 1240).

С. М. Лозинский

**4169. Обобщенное главное значение расходящегося интеграла** (La «omniprecipa» valoro de diverga integralo), Scienca rev., 1959, **11**, № 1, 2—4 (эсперанто.; рез. франц.)

**4170. О формуле Грина и достаточных условиях аналитичности. Бентон** (Sur la formule de Green et les conditions suffisantes d'analyticité. Benneton Gaston), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 18, 2548—2549 (франц.)

Показывается, что можно установить формулу Грина (на плоскости), не делая никаких предположений относительно самих частных производных, а лишь накладывая условия на их разность.

**4171. Разностные уравнения и их приложения. Пайпс** (Difference equations and their applications. Pipes Louis A.), Math. Mag., 1959, **32**, № 5, 231—246 (англ.)

**4172. Решение функционального уравнения $\varphi(u+v)+\varphi(u-v)=R(\varphi(u), \varphi(u))$, где $R$ — рациональная функция. Мюрберг** (Funktiónaaliyhtälön $\varphi(u+v)+\varphi(u-v)=R(\varphi(u),\varphi(v))$ ratkaiseminen tapauksessa, jolloin $R$ on rationaalinen. Myrberg P. J.), Arkhimedes, 1959, № 1, 13—16 (финск.; рез. нем.)

**4173. Об одном неравенстве. Туран** (On an inequality. Turán P.), Ann. Univ. scient. budapest. Sec. math., 1958, **1**, 3—6 (англ.)

В наиболее общем виде Ингам (Ingham A. E., Math. Z., 1936, **41**, 367—380) нашел оценки для коэффициентов полинома $P(x)$ по функциям $e^{i\nu_k x}$ ($\nu_k$ — не обязательно целые) через интеграл от $P(x)$ по некоторой фиксированной дуге.

Автор, рассматривая случай целых степеней $\nu_k$, доказывает, что справедлива

Теорема. Пусть $h(x) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu e^{i\nu x}$ и $\nu_{-1} = 0 = \nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_k = N = \nu_{k+1}$, $\nu_{l+1} - \nu_l > \Delta$ $(l = 0, 1, \ldots, k-1)$, где $\Delta \geqslant 8$. Тогда, если

$$|b_{\nu_j}| \geqslant 2 \sum_{\substack{\nu_{j-1} < \nu < \nu_{j+1} \\ \nu \neq \nu_j}} |b_\nu| \quad (j = 0, 1, \ldots, k-1),$$

то для любых действительных $\alpha$

$$2\pi \sum_{\nu=0}^{N} |b_\nu|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |h(x)|^2 dx \leqslant 16(\Delta+1)\int_{\alpha-\frac{\pi\sqrt{8}}{\sqrt{\Delta+1}}}^{\alpha+\frac{\pi\sqrt{8}}{\sqrt{\Delta+1}}} |h(x)|^2 dx.$$

Автор отмечает, что эту теорему можно применять иногда для нахождения естественной границы аналитической функции, представленной степенным рядом, который удовлетворяет специальным условиям.

П. Л. Ульянов

**4174. Боровский спектр функций. Коссар** (The Bohr spectrum of a function. Cossar J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 2, 294—295 (англ.)

Эгглестон (РЖМат, 1959, 1343) доказал следующее утверждение: Если $f(x)$ ограничена и равномерно непрерывна, то для почти всех действительных $t$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N}\int_{-N}^{N} e^{-itx} f(x)\,dx = 0. \qquad (1)$$

Этот результат является ответом на проблему, поставленную Херцом (Herz C. S., Bull. Amer. math. Soc., 1956, **62**, 76).

Автор, исходя из результата Зигмунда (Zygmund A., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1 36, **32**, 321—327), дает, во-первых, другое доказательство равенства (1) и, во-вторых, ослабляет ограничения на $f(x)$. Точнее справедлива

Теорема 2. Если функции $\frac{f(x)}{x}$ и $\frac{f(-x)}{x}$ принадлежат $L^p(a, \infty)$ для некоторых $a > 0$ и $1 \leqslant p < 2$, то (1) справедливо для почти всех действительных $t$.

Автор отмечает, что, в частности, (1) справедливо для почти всех действительных $t$, если $f(x) = O(|x|^q)$ при $|x| \to \infty$, где $q < \frac{1}{2}$.

Примечание референта. Высказывание Херца находится в упомянутом выше журнале за 1956 г., а не за 19.5 г., как написано у автора. П. Л. Ульянов

**4175 К. От таблицы умножения к интегралу. Математика для всех. Колерус** (Vom Einmaleins zum Integral. Mathematik f. jedermann. Colerus Egmont. Hamburg-Wien, Zsolnay, 1959, 363 S., 62. — Sch.), Oesterr. Bibliogr., 1959, № 10, 14 (нем.)

**4176 К. Введение в анализ бесконечно малых. 40 лекций, снабженных развернутыми примерами и теоремами, для технических институтов. Каттанео** (Introduziene all'analisi infinitesimale. 40 lezioni corredate di esercizi svolti e proposti ad uso degli istituti tecnici. Cattaneo Carlo. Torino, S. E. I., 1958, VII, 195 p., 600 L.), Bibliogr. naz. ital., 1958, **1**, № 2, 59 (итал.)

**4177 К. Анализ. Изд. 2-е дополн. Смит, Салковер, Джастис** (Calculus. 2nd ed. Smith Edward S., Salkover Meyer, Justice Howard K. New York, John Wiley and Sons, Inc.; London, Chapman and Hall, Ltd, 1958, XIV, 520 pp., ill.) (англ.)

Даются краткие пояснения отдельных положений высшей математики, иногда формулируются некоторые теоремы анализа. Доказательства отсутствуют. Сформулированные положения поясняются примерами. Дается очень много задач и примеров (с ответами) из курса высшей математики. Кроме анализа рассматриваются некоторые вопросы аналитической геометрии и дифференциальных уравнений. Книга может служить задачником по курсу высшей математики. Содержание книги видно из оглавления: 1. Переменные, функции и пределы; 2. Дифференцирование и приложения; 3. Интегрирование и приложения; 4. Дифференцирование алгебраи-

ческих функций; 5. Дифференцирование трансцендентных функций; 6. Дальнейшие приложения производных; 7. Плоские кривые, прямоугольные координаты; 8. Интегрирование; 9. Методы интегрирования; 10. Дальнейшие приложения интегрирования; 11. Приближенное интегрирование; 12. Пределы, правило Лопиталя; 13. Бесконечные ряды; 14. Разложение функций; 15. Гиперболические функции; 16. Аналитическая геометрия; 17. Частные производные; 18. Кратные интегралы; 19. Дифференциальные уравнения; 20. Таблица интегралов.

В конце книги дается сводка различных формул, таблицы гиперболических функций и др., ответы на задачи и предметный указатель. В. К. Захаров

**4178 К. Математический анализ. I. Николеску** (Analiză matematică. I. Nicolescu Miron. Bucureşti, Ed. tehn., 1957, 400 p.) (рум.)

**4179 К. Учебник математического анализа. Т. 2. Функции многих независимых переменных. 3-е изд. Люхе** (Laerebok i matematisk analyse. D. 2. Funksjoner av flere fri variable. 3. utg. Lyche Ralph Tambs. S. l., Gyldendal, 1958, 279 s., ill., 40.00 kr.), Norsk bokfortegnelse, 1958, № 3, 19 (норв.)

**4180 К. Математика для физиков и инженеров. Сокольников, Редхеффер** (Mathematics of physics and modern engineering. Sokolnikoff I. S., Redheffer R. M. New York — Toronto — London, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1958, x, 810 pp., ill.) (англ.)

Авторы отмечают, что плодотворная работа физиков и инженеров в современных условиях немыслима без серьезной математической подготовки. Поэтому они старались написать книгу по прикладной математике для указанных специальностей, отобрав наиболее важные с точки зрения приложений разделы математики и изложив их с достаточной серьезной математической строгостью. Изложение всюду сопровождается подробно разобранными примерами, каждая из десяти глав книги представляет собой как бы самостоятельное целое со своим оглавлением и списком рекомендуемых задач. Авторы дают ценные методические указания по использованию книги при чтении различных курсов математики для указанных категорий специальностей. В конце книги приведены ответы к задачам, встречавшимся во всех главах и весьма подробный предметный указатель. Материал по главам распределяется следующим образом. В гл. 1, Обыкновенные дифференциальные уравнения, на 106 стр. излагается почти весь обычный курс обыкновенных дифференциальных уравнений с многими приложениями. Гл. 2, Бесконечные ряды, содержат теорию числовых и функциональных рядов, решение дифференциальных уравнений при помощи специальных рядов, ряды с комплексными членами, ряды Фурье и некоторые более тонкие вопросы по теории рядов Фурье (вопросы сходимости, интегрирования и дифференцирования и т. п.). Гл. 3, Функции нескольких аргументов, содержит всю обычную теорию функций многих переменных, дифференцирование под знаком интеграла, замену переменных под знаком двойного интеграла, поверхностный интеграл и простейшие понятия вариационного исчисления. Гл. 4, Алгебра и геометрия векторов, Матрицы, посвящена векторной алгебре, ее приложениям и матричному исчислению. В гл. 5, Теория поля, излагаются криволинейные координаты, дифференцирование и интегрирование векторных функций. Теоремы Грина — Остроградского и Стокса, криволинейные интегралы и некоторые приложения теории поля. В гл. 6, Дифференциальные уравнения в частных производных, довольно подробно излагается теория уравнений эллиптического, параболического и гиперболического типов с многочисленными приложениями. В гл. 7, Комплексные переменные, излагается теория функций комплексной переменной с приложениями в различных областях математики и техники. В гл. 8, Теория вероятностей, излагаются основы теории вероятностей и математической статистики и некоторые дополнительные вопросы по этой теории. Последняя, гл. 9, Численные методы анализа, посвящена численному решению алгебраических и трансцендентных уравнений, интерполированию, эмпирическим формулам и численному решению дифференциальных уравнений (включая краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными).

В книге имеются четыре добавления. Первое посвящено теории определителей и системам линейных уравнений. Во втором добавлении излагается теория преобразования Лапласа и его применение. Третье содержит теорию интегралов Римана и Легара. В четвертом добавлении приведены таблицы интеграла вероятностей. К. А. Карпов

**4181 К. Прикладная математика для инженеров и физиков. Пайпс** (Applied mathematics for engineers and physicists. 2nd ed. Pipes Louis A. New York — Toronto — London, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1958, xii, 723 pp., ill.) (англ.)

Книга, выходящая вторым изданием, содержит дополнительные главы по некоторым разделам математики. В основном в книгу включены те разделы математики, с которыми чаще всего встречаются инженеры-электрики, машиностроители, теплотехники, самолетостроители и т. д. Некоторые очень важные разделы (например, теория вероятностей и математическая статистика) остались не включенными в книгу, чтобы не увеличить объем и без того обширной книги. Изложение не всегда строгое, сопровождается многочисленными примерами из различных областей техники. В конце каждой главы приводятся весьма ценные библиографические ссылки на основную литературу по данному вопросу (в основном на английском языке). Содержание книги видно из следующего перечисления глав: 1) Бесконечные ряды; 2) Комплексные числа; 3) Математическое представление периодических явлений, ряды Фурье; 4) Линейные алгебраические уравнения, определители и матрицы; 5) Решение алгебраических и трансцендентных уравнений; 6) Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Добавление к главе 6: Преобразование Лапласа и его применение для решения дифференциальных уравнений; 7) Колебания линейных электрических цепей; 8) Колебания упругих систем с конечным числом степеней свободы; 9) Дифференциальные уравнения теории структур; 10) Исчисление конечных разностей и линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами; 11) Частные производные; 12) Функции гамма, бета и интеграл вероятностей (функция ошибок), 13) Функция Бесселя; 14) Дифференциальное уравнение Лежандра и полиномы Лежандра; 15) Векторное исчисление; 16) Волновое уравнение; 17) Дифференциальное уравнение Лапласа; 18) Уравнения теплопроводности или диффузии; 19) Элементы теории функций комплексной переменной; 20) Некоторые применения теории функций комплексной переменной в технике; 21) Операционное исчисление. Добавление к гл. 21: Преобразование Лапласа. 22) Исследование нелинейных колебательных систем.

Следует заметить, что в некоторые главы включены и такие важные для инженеров вопросы, которые названием книги не раскрываются. Например, в гл. II о частных производных излагаются элементарные сведения по вариационному исчислению. Книга хорошо оформлена и снабжена большим числом задач и предметным указателем. К. А. Карпов

**4182 К. Простейшие задачи на максимум и минимум. Натансон** (Einfachste Maxima-und Minima-Aufga-

ben. Natanson I. P. Übers. aus dem Russ. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1955, 2 S, ill.) (нем.)
Перевод с русского (М.-Л., Гостехиздат, 1952).

**4183 К. Упражнения по исчислению бесконечно малых. Для студентов математических, физических и инженерных специальностей. 5-е полностью переработанное изд. Бонончини** (Esercitazioni di calcolo infinitesimale. Ad uso degli studenti di matematica, fisica e ingegneria. 5. ed. interamente rif. Bononcini Vittorio. Padova, Ed. CEDAM, 1954, IX, 513 p., ill., 2600 L. — Litogr.) (итал.)

Переработанное 4-е издание книги, вышедшей в 1950 г. Содержание: ч. I. Дифференциальное исчисление для функций двух и более переменных; ч. II. Интегральное исчисление функций одной и многих переменных; ч. III. Дифференциальные уравнения; ч. IV. Геометрические приложения. W. Maier
Перевод из Zbl. Math., 1955, 55, № 6-10, 278.

**4184 К. Задачи и упражнения по математическому анализу. Для втузов. Бараненков Г. С., Демидович Б. П., Ефименко В. А., Коган С. М., Лунц Г. Л., Поршнева Е. Ф., Сычева Е. П., Фролов С. В., Шостак Р. Я., Янпольский А. Р.** М., Физматгиз, 1959, 472 стр., илл., 10 р. 30 к.

**4185 К. Основы чистой и прикладной математики. Ласс** (Elements of pure and applied mathematics. Lass Harry. New York-Toronto-London, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1957, XII, 491 pp., ill.) (англ.)

Как пишет автор, книга предназначена как для математиков, так и для работников других специальностей, желающих изучить математику на более строгой основе, чем это имеет место в обычных курсах математики для нематематиков.

В небольшой по объему книге автору удалось изложить почти весь курс математики на довольно высоком научном уровне. Во всех главах приведено много примеров и задач, а также библиография. В книге приведено много интересных приложений математики в механике, физике и технике.

Книга разбита на восемь глав. В гл. 1 изложена теория определителей, линейных уравнений и матриц. Гл. 2 посвящена векторному анализу с некоторыми его приложениями. Гл. 3 содержит некоторые дополнительные вопросы векторного анализа и вопросы тензорного исчисления. В частности, здесь имеются введение в риманову геометрию, уравнения движения Лагранжа и Гимильтона, а также уравнение Навье — Стокса. В гл. 4 даны основы теории функций комплексной переменной. В этой главе материал изложен более подробно и с большей строгостью. Гл. 5 содержит некоторые избранные вопросы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, здесь излагаются некоторые вопросы аналитической теории дифференциальных уравнений, даются сведения о специальных функциях (гиперболические функции, полиномы Лагерра, Эрмита и т. п.). Задачи о собственных значениях в книге отсутствуют. Гл. 6 посвящена ортогональным полиномам, рядам и интегралу Фурье, методу Крылова — Боголюбова для решения нелинейных дифференциальных уравнений, в котором используется теория рядов Фурье. Гл. 7 посвящена интегралу Стилтьеса, преобразованию Лапласса и вариационному исчислению. Здесь изложение сравнительно поверхностное. В гл. 8 приводятся некоторые сведения по теории групп и по теории алгебраических уравнений. Гл. 9 содержит элементарные сведения по теории вероятностей, математической статистике и теории игр. Последняя, десятая, глава посвящена некоторым более тонким вопросам математического анализа. В частности, кратко излагаются вопросы теории действительных чисел, теории множеств, теории дифференцирования и интегрирования, теории рядов. В этой же главе содержатся основные численные методы анализа. Эта глава является как бы справочной и во всех других главах на нее имеются многочисленные ссылки. Книга заканчивается подробным предметным указателем. К. А. Карпов

**4186 К. Избранные примеры на дифференцирование и интегрирование. 407 полностью решенных примеров. 4-е изд. Хемнициус** (Differentiation und integration ausgewählter Beispiele. Eine Sammlg v. 407 ausgew. vollst. durchgerechneten Beisp. unter Berücks. d. Zusammenhänge zwischen Differential — und Integralrechng. 4. Aufl. Chemnitius Fritz. Berlin, Verl. Technik, 1959, XII, 215 S., 12.— DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, A, № 11, 884 (нем.)

## ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

**4187. Простое доказательство теоремы Эрдёша и Секереша. Зейденберг** (A simple proof of a theorem of Erdös and Szekeres. Seidenberg A.), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 3, 352 (англ.)

Доказывается теорема. Дана последовательность $s$: $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$, $\nu > mn$, различных действительных чисел такая, что число членов каждой убывающей подпоследовательности не больше, чем $m$; тогда существует возрастающая подпоследовательность, состоящая более чем из $n$ членов.

**4188. Среднее арифметико-геометрическое может быть заменено на практике средним индекса 1/2. Жакоб** (La moyenne arithmético-géometrique peut être remplacée en pratique par la moyenne d'indice 1/2. Jacob M.), Bull. belge métrol., 1957, № 205, 257—263 (франц.)

Средним индекса $m$ двух положительных чисел называется корень $m$-й степени из среднего арифметического $m$-х степеней данных чисел

$$M_m = \left(\frac{a^m + b^m}{2}\right)^{\frac{1}{m}}. \qquad (1)$$

Среднее арифметическое есть среднее индекса 1, среднее гармоническое — индекса —1 и среднее геометрическое (как это доказывается переходом к пределу) — индекса 0. Составленные из чисел $a$ и $b$ две последовательности:

$$\begin{cases} a, & a', & a'', \ldots, \\ b, & b', & b'', \ldots, \end{cases} \qquad (2)$$

где $a'$ и $b'$ — соответственно среднее арифметическое и среднее геометрическое чисел $a$ и $b$, $a''$ и $b''$ — среднее арифметическое и среднее геометрическое чисел $a'$ и $b'$ и т. д., сходятся к общему пределу, названному Гауссом средним арифметико-геометрическим ($M_{AG}$). Составленные из $a$ и $b$ аналогичным образом последовательности из средних арифметических и средних гармонических, как было показано автором (Les études classiques, 1935, **4**, № 2, 273—275), имеют своим пределом среднее геометрическое данных чисел. Таким образом, последовательности, составленные из средних индексов 1 и —1, сходятся к среднему индекса $\frac{1+(-1)}{2} = 0$. Последовательности (2), составленные из средних индексов 1 и 0, хотя и не сходятся к среднему индекса 1/2 $M_{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 = a''$, но если числа $a$ и $b$ мало отличаются друг от друга, то их среднее индекса $^1/_2$ лишь весьма мало превосходит их среднее арифметико-геометрическое. Не давая доказательства этого предложения, автор приводит некоторые примеры (вычисления производились на счетных машинах), пока-

зывающие, что при отклонении чисел $a$ и $b$ на 30%, 10% и 1% относительная погрешность при замене $M_{AG}$ на $M_{1/2}$ не превосходила $1.10^{-5}$, $1.10^{-7}$ и $1.10^{-9}$.

А. Г. Школьник

**4189. Суммируемость и ограниченные последовательности. Питерсен** (Summability and bounded sequences. Petersen G. M.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1959, **55**, № 3, 257—261 (англ.)

Даются простые доказательства теорем из работы Брудно „Суммирование ограниченных последовательностей матрицами" (Матем. сб., 1945, **16**, 191—247).

И. И. Огиевецкий

**4190. К теории суммирования ограниченных последовательностей матрицами Тёплица. Огиевецкий И. И.**, Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 2, 183—188

Изучается множество ограниченных последовательностей, не суммируемых (соответственно суммируемых) данной матрицей Тёплица. Согласно Брудно (Брудно А. Л., Матем. сб., 1945, **16**, 191—247), конечное множество последовательностей $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется линейно независимым относительно матрицы $A$, если последовательности $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ не являются $A$ — суммируемыми ни при каких значениях $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, не равных одновременно нулю. Бесконечное множество последовательностей линейно независимо относительно $A$, если любое конечное подмножество этого множества линейно независимо относительно $A$. Методом субматриц доказываются следующие теоремы: 1) Для любой матрицы Тёплица $A$ существует несчетное множество ограниченных последовательностей, линейно независимое относительно $A$. 2) Если матрица Тёплица $B$ строго сильнее матрицы Тёплица $A$ на множестве ограниченных последовательностей, то существует несчетное множество $B$-суммируемых ограниченных последовательностей линейно независимое относительно $A$.

А. Ф. Кангро

**4191. Об условном включении матричных методов. Майер-Калькшмидт** (On conditional inclusion of matrix methods. Mayer-Kalkschmidt J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 2, 193—198 (англ.)

Пусть $A=(a_{n\nu})$—треугольный матричный метод суммирования и $\Omega(n)$— положительная монотонная функция. Через $[A, O(\Omega)]$ ($[A, o(\Omega)]$) обозначается класс тех последовательностей $\{s_n\}$, для которых $\sigma_n = O(\Omega(n))$ ($\sigma_n = o(\Omega(n))$) при $n \to \infty$, где $\sigma = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} s_\nu$. Главные теоремы статьи следующие:

1. Если метод $A = (a_{n\nu})$ удовлетворяет теореме о среднем значении, а метод $B = (b_{n\nu})$ — условию $\sum_{\nu=0}^{n} \Omega(\nu) |\Delta_\nu (b_{n\nu}/a_{n\nu})| = O(1)$, то при неубывающей $\Omega(n)$ имеем $[B, O(1)] \supset [A, O(\Omega)]$. При $\Omega_n = 1$ отсюда получается одна теорема Юрката и Пейеримхоффа (Jurkat W., Peyerimhoff A., Math. Z., 1952, **56**, 152—178).

2. Пусть $A^{-1} = (a'_{n\nu})$ — обратная к матрице $A$. Если $\lim_{n\to\infty} a'_{n\nu} = 0$, то $[B, o(1)] \supset [A, O(\Omega)]$ тогда и только тогда, когда $\sum_{\nu=0}^{n} \left| \Omega(\nu) \sum_{\mu=\nu}^{n} b_{n\mu} a'_{\mu\nu} \right| = o(1)$. Утверждение теоремы остается справедливым при замене $o(1)$ через $O(1)$. В заключение приводится несколько применений этих теорем и указывается на возможность распространения теоремы 2 на случай абсолютной суммируемости.

Г. Ф. Кангро

**4192 Об одном семействе методов суммирования. I. Херлестам** (On a family of summation methods. I. Herlestam Tore. Lunds univ. årsskr., 1959, Avd. 2, 55, № 11, 23 pp., ill.)

Вводятся треугольные матричные методы суммирования последовательностей $W^{(q)} = (w_{n\nu}^{(q)})$ ($q$—положительное вещественное число) при помощи тождества

$$\binom{qx+n-q}{n} = \sum_{\nu=0}^{n} w_{n\nu}^{(q)} x^\nu \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Метод $W^{(q)}$ связан с методом Карамата $S(k)$ (Karamata J., Math. Cluj., 1935, **9**, 164—178) формулой $S(k) = C^{(k-1)} W^{(k)}$, а с методом Вучковича $\sigma^a$ (реф. 4194) формулой $\sigma^a = C^{(a)} W^{(1)}$, где $C^{(a)}$— метод Чезаро порядка $a$. Устанавливаются следующие главные результаты: 1) метод $W^{(q)}$ регулярен и тем сильнее, чем меньше $q$; 2) если последовательность $\{s_n\}$ суммируема методом $W^{(q)}$, то $s_n = o(n!\,(q \log 2)^{-n})$; 3) если $k$ и $n$ — неотрицательные целые числа, то последовательность $\{s_n\}$ суммируема методом $C^{(k)} W^{(q)}$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{s_{n+r}\}$ суммируема методом $C^{(k+r)} W^{(q)}$; 4) обобщенный экспоненциальный метод Бореля $B^*$ эквивалентен каждому методу $A^* W^{(q)}$, где $A^*$— обобщенный метод суммирования Абеля.

Г. Ф. Кангро

**4193. Риманово суммирование произведений рядов по Коши и рядов с переставленными членами. Агнью** (Riemann summability of Cauchy products and translates of series. Agnew R. P.), J. Indian Math. Soc., 1958, **22**, № 1, 33—44 (англ.)

Без доказательства Виньо (Vignaux J. C., C. r. Acad. sci., 1932, **195**, 750—751) привел утверждение о суммируемости по Риману произведения рядов. Из этого утверждения, в частности, вытекает, что если ряд

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \qquad (1)$$

$R(p)$-суммируем, то также $R(p)$-суммируем ряд

$$0 + u_0 + u_1 + \ldots \qquad (2)$$

С другой стороны, Каттнер (Kuttner B., J. London Math. Soc., 1936, **11**, № 41, 301—302) без подробных доказательств привел пример ряда вида (1), который $R(2)$-суммируем и в то же время ряд (2) не суммируем $R(2)$.

Автор, проводя подробные рассуждения, показывает, что утверждение Виньо ошибочно. Кроме этого, автор усиливает результат Каттнера. Именно, справедлива

Теорема. Для любого целого положительного $p$ существуют ряды вида (1), которые $R(p)$-суммируемы, а ряды (2) не суммируемы $R(p)$.

Примечание референта. В работе много опечаток. Например: в формуле (3.5) написано $y\cos\theta$ вместо $2y\cos\theta$; в формуле (3.51)—$\frac{\sin k\theta}{k\theta}$ вместо $\frac{\sin k\theta}{k}$; в формуле (4. 2) — $b$ вместо $b_j$; в формуле (4.5) — $\sum_{m=0}^{\infty}$ вместо $\sum_{m=0}^{p}$, а в формуле (4.51) — $\sum_{k=1}^{p}$ вместо $\sum_{k=1}^{\infty}$.

П. Л. Ульянов

**4194. Новый класс полиномов и их применение в теории суммирования. Вучкович** (Eine neue Klasse von Polynomen und ihre Anwendung in der Theorie der Limitierungsverfahren Vučković Vladeta), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1958, **12**, 125—136 (нем.)

При помощи соотношения

$$(x+\alpha)_n = \sum_{\nu=0}^{n} \sigma_\nu^n(\alpha)\, x^\nu$$

вводятся полиномы $\sigma_\nu^n(\alpha)$, которые автор называет полино-

мами Стирлинга первого рода. Исследуются некоторые свойства этих полиномов, а также свойства некоторых других, названных полиномами Стирлинга второго рода. Используя множители $p_{n\nu}(\alpha) = \sigma_\nu^n(\alpha)/(\alpha+1)_n$, дается следующий прием суммирования $(\sigma^\alpha)$: Последовательность $\{S_n\}$ называется суммируемой методом $\sigma^\alpha$ $(\alpha > -1)$ к $S$, если $\sum_{\nu=0}^{n} p_{n\nu}(\alpha)\, S_\nu \to S$. Доказывается свойство регулярности и свойство включения $(\sigma^\alpha \subset \sigma^{\alpha+\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0)$. Доказана теорема: Если $\{S_n\}$ суммируема методом $\sigma^\alpha$, то $S_n = O\left\{\frac{n!\, n^\alpha}{(\ln 2)^n}\right\}$. Введенный метод сравнивается с методом Карамата-Стирлинга.

Э. Я. Риекстыньш

**4195. Одна теорема об интегралах Лапласа — Стилтьеса. Майер-Калькшмидт** (A theorem on Laplace—Stieltjes integrals. Mayer-Kalkschmidt J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 2, 286—293 (англ.)

Доказывается теорема, которая является исправлением теоремы автора (РЖМат, 1956, 7273) о наличии особенностей у аналитической функции представимой интегралом Лапласа-Стилтьеса на границе полуплоскости $(C, k)$-суммируемости этого интеграла.

Теорема. Пусть $\beta_k$—абсцисса $(C, k)$-суммируемости интеграла Лапласа-Стилтьеса и пусть $f(s)$ — функция, определенная этим интегралом. Если функция

$$m_k(\beta_k, t) = \frac{1}{t^k}\int_0^t (t-v)^k e^{-\beta_k v}\, d\alpha(v),$$

не убывающая для $t \geqslant T_0 \geqslant 0$ и

$$f^{(r)}(\beta_k +) = 0, \quad \text{для } r = 1, \ldots, k,$$

где

$$f^{(r)}(s_0+) = \lim_{s \to s_0+} (f^{(r-1)}(s) - f^{(r-1)}(s_0+))/(s - s_0),$$

то функция $f(s)$ имеет особенность в точке $s = \beta_k$.

С. А. Акопян

**4196. О существовании нормальной формы для сохраняющего площадь эллиптического преобразования. Рюсман** (Über die Existenz einer Normalform inhaltstreuer elliptischer Transformationen. Rüssmann Helmut), Math. Ann., 1959, **137**, № 1, 64—77 (нем.)

Рассматривается преобразование

$$x_1 = f(x, y), \quad y_1 = g(x, y), \qquad (1)$$

где $f(x, y) = ax + by + \ldots$, $g(x, y) = cx + dy + \ldots$ — действительные степенные ряды, сходящиеся в некоторой окрестности начала, причем $f_x g_y - g_x f_y = 1$. Показывается, что в эллиптическом случае, когда собственные значения матрицы коэффициентов линейных членов комплексно-сопряженные, построенные Биркгофом (Birkhoff G. D., Acta math., 1922, **43**, 1—119) формальные степенные ряды, приводящие (1) к нормальной форме, вообще говоря, расходятся.

М. И. Грабарь

## СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

**4197. О тех амплитудах нормальных эллиптических интегралов третьего рода, для которых эти интегралы можно привести к эллиптическим нормальным интегралам первого и второго рода. Фемпл** (O amplitudama normalnih eliptičkih integrala III vrste z koje se takvi integrali redukuju na normalne eliptičke integrale I i II vrste. Fempl Stanimir. Publ. Elektrotehn. fak. Univ. Beogradu. Mat. i fiz., 1958, № 18,7 s.) (сербо-хорв.; рез. нем.)

**4198. Одно свойство разложений в ряды по вырожденным гипергеометрическим полиномам. Кемпбелл** (Une propiété des développements en séries de polynomes hypergéométriques confluents. Campbell Robert), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 22, 2104—3105 (франц.)

Автор устанавливает, что система ортонормированных полиномов $P_n$, удовлетворяющих соотношению

$$\frac{P_{n+1}}{A_{n+1}}(\lambda x + \nu_{n+1})\, P_n - (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, P_n, \qquad (1)$$

где $A_{n+1}$ — отношение старших коэффициентов в $P_{n+1}$ и $P_n$, а $\lambda$, $\alpha$, $\beta$, и $\gamma$ — постоянные, не зависящие от $n$, является системой вырожденных гипергеометрических полиномов. Соотношение (1) применяется при исследовании суммирования ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ методом $(C, k)$.

Э. Я. Риекстыньш

**4199. Вопрос. Раджагопал** (A query. Rajagopal A. K.), Math. Gaz., 1958, **42**, № 341, 224—225 (англ.)

При $n$ целом неотрицательном функция $e^x D^n(e^{-x}x^n)$ (полином Лагерра) удовлетворяет уравнению $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$. Если определить $D^{-1}f(x)$ как $\int_x^\infty f(t)\, dt$, то это так и для $n = -1$. Аналогичный факт имеет место для обобщенных полиномов Лагерра и для полиномов Эрмита. Ставится вопрос, как обосновать подбор пределов интегрирования при определении $D^{-1}$.

Г. К. Энгелис

**4200. Теория второго решения дифференциального уравнения для классических ортогональных полиномов. Уваров В. Б.**, Докл. АН СССР, 1959, **125**, № 2, 281—284

Пусть $P_n(z)$ — последовательность классических ортогональных полиномов (Якоби, Лагерра или Эрмита), $\rho(z)$ — соответствующий вес, $a$ и $b$ — концы интервала ортогональности, $\beta(z) = (z-a)(z-b)$ (если $a$ или $b = \infty$, то множитель $z-a$ или $z-b$ заменяется на 1). Тогда второе решение дифференциального уравнения полиномов $P_n(z)$ можно написать в виде

$$Q_n(z) = \rho^{-1}(z)\int_a^b P_n(\zeta)\,\rho(\zeta)\,(\zeta - z)^{-1}\, d\zeta.$$

Отсюда получаются другие представления, например:

$$Q_n(z)\,\rho(z) = n!\int_a^b \rho(\zeta)\,\beta^n(\zeta)\,(\zeta - z)^{-n-1}\, d\zeta =$$

$$= \frac{d^n}{dz^n}\int_a^b \rho(\zeta)\,\beta^n(\zeta)\,(\zeta - z)^{-1}\, d\zeta,$$

находятся асимптотическое разложение, производящая функция для $Q_n(z)$ и т. п. Часть этих результатов для частных случаев были известны уже раньше. Доказательства не приводятся, но указывается, что основное интегральное представление в общем случае выводится способом, который для полиномов Якоби применил М. Г. Баранецкий (О гипергеометрических функциях М., 1873 ).

Примечание референта. При соответствующих условиях на путь интегрирования большинство результатов переносятся и на случай $\beta(z) = (z-a)^2$ (полиномы Бесселя).

Г. К. Энгелис

**4201. Некоторые производящие функции для полиномов Лагерра. Аль-Салам** (Some generating functions for the Laguerre polynomials. Al-Salam W. A.), Portug. math., 1958, **17**, № 1-2, 49—52 (англ.)

Даются три новые производящие функции для полиномов Лагерра $L_n^\alpha(x)$, содержащие видоизмененную функцию Бесселя $I_\alpha\ x)$.

Примечание референта. Первый результат статьи — формула (1.1) — содержит ошибку, что легко проверить при частных значениях $\alpha = 0$, $x = 0$. Так как вывод формул (1.2) и (1.3) опирается на (1.1), то их тоже нельзя считать доказанными. Г. К. Энгелис

**4202. Об одном тождестве в теории обобщенных полиномов Якоби. Германский** (An identity in the theory of the generalized polynomials of Jacobi. Germansky B.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 6, 953—956 (англ.)

Рассматриваются обобщенные полиномы Якоби (полиномы Гейне — Стилтьеса) $P_n^{(\alpha_0,\ldots,\alpha_p)}(x)$ степени $n$ и порядка $p$, которые при $p=1$ совпадают с полиномами Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ ($\alpha=\alpha_0$, $\beta=\alpha_1$). Полиномы $y=P_n^{(\alpha_0,\ldots,\alpha_p)}(x)$ являются решениями дифференциального уравнения

$$A(x)\,y'' + 2B(x)\,y' + C(x)\,y = 0, \qquad (1)$$

где

$$A(x) = \prod_{\nu=0}^{p}(x-a_\nu),\quad 2B(x) = A(x)\sum_{\nu=0}^{p}\frac{\alpha_\nu+1}{x-a_\nu}$$

$$(-1 = a_0 < a_1 < \ldots < a_p = 1)$$

и $C(x)$ — надлежаще выбранный полином степени $p-1$. В работе доказывается равенство

$$|A_{kl}| = \begin{vmatrix} A_{00} & A_{01} & \cdots & A_{0,p-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{p-1,0} & \cdots & & A_{p-1,p-1} \end{vmatrix} = 0, \qquad (2)$$

$$A_{kl} = \int_{a_k}^{a_{k+1}} x^l \prod_{\nu=0}^{p} |x-a_\nu|^{\alpha_\nu} P_n^{(\alpha_0,\ldots,\alpha_p)}(x) \times$$

$$\times P_{n'}^{(\alpha_0,\ldots,\alpha_p)}(x)\,dx \quad (n' \neq n),$$

которое при $p=1$ переходит в известное условие ортогональности полиномов Якоби. Н. Н. Лебедев

**4203. Ортогональные полиномы и гипергеометрические ряды. Слёйс** (Orthogonal polynomials and hypergeometric series. Sluis A. van der), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 4, 592—612 (англ.)

В первой главе статьи понятия и теоремы из теории таблиц Паде для степенного ряда переносятся на ряд Лорана $D(x) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} p_\mu x^\mu$. Здесь $p_\mu$ — элементы произвольного поля $R$, но большинство результатов сохраняется, если $p_\mu$ — элементы коммутативного кольца с единицей, например, матрицы. Пусть $V_{m,n}(x)$ — знаменатель приближения Паде ряда $D(x)$ для места $(m, n)$ (это значит, что $V_{m,n}$ — полином над $R$ степени $\leqslant m$ и что в формальном произведении $V_{m,n}(x)\,D(x)$ коэффициенты при $x^{n+1}$, $x^{n+2}$, ..., $x^{n+m}$ равны 0). Если для фиксированного целого $k$ и каждого натурального $m$ полином $V_{m,m+k}(x)$ определен единственным образом (с точностью до постоянного множителя), то полиномы $V_m(x) \equiv x^m V_{m,m+k}(x^{-1})$ ортогональны относительно последовательности $p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}, \ldots$. Если, кроме того, $V_{m,m+k+1}(x)$ также определены единственным образом, то последовательность полиномов $W_n(x)$, где $W_{2m}(x) = x^{2m} V_{m,m+k}(x^{-2})$, $W_{2m+1}(x) = x^{2m+1} W_{m,m+k+1}(x^{-2})$ ортогональна относительно последовательности $p_{k+1}, 0, p_{k+2}, 0, p_{k+3}, 0, \ldots$.

Во второй главе рассматривается "обобщенный гипергеометрический ряд"

$$F([a,k],[b,l];[c,m];x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{[a,k]_\mu [b,l]_\mu}{[c,m]_\mu [\sigma,1]_\mu} x^\mu,$$

где $\sigma$ — фиксированный элемент из $R$, $[a,k]_0 = 1$, $[a,k]_\mu = \prod_{i=0}^{\mu-1}[a,k+i]$, $[a,k]$ — функция от $a \in R$ и целого числа $k$ со значениями из $R$, обладающая свойствами: 1) $[a,k+h] = g_1(h)\,[a,k] + g_2(h)$; 2) $[\sigma,0] = 0$; 3) $[\sigma,k] \neq 0$ при $k \neq 0$. Оказывается, что ряд $F$ удовлетворяет рекуррентным соотношениям, обобщающим формулы, известные для обычной гипергеометрической функции, и что $[a,k]$ выражается через три произвольные постоянные $[a,0]$, $[\sigma,1]$ и $q = -[\sigma,1]/[\sigma,-1]$ следующим образом:

$$[a,k] = q^k[a,0] + [\sigma,1](1-q^k)/(1-q) \quad \text{при } q \neq 1,$$

$$[a,k] = [a,0] + [\sigma,1]\,k \quad \text{при } q = 1.$$

Вводятся также конфлюэнтные ряды нескольких видов.

В третьей части первое требование в определении символа $[a,k]$ заменяется более общим

$$[a,k+\mu][c,m] - [a,k][c,m+\mu] = \chi(a,c,k,m)\,g(\mu),$$

которое тоже является достаточным для существования использованных рекуррентных формул. Оказывается, что это обобщение не существенно, так как соответствующие ряды $F$ линейной заменой аргумента приводятся к рядам, изученным во второй части. Г. К. Энгелис

**4204. Интегралы от произведений $E$-функций. Мак-Роберт** (Integrals of products of $E$-functions. Mac-Robert T. M.), Math. Ann., 1959, **137**, № 5, 412—416 (англ.)

Получены две формулы, дающие представление интегралов, содержащих произведение двух $E$-функций, в замкнутой форме через функции того же самого типа. Частные случаи найденных формул были исследованы ранее другими авторами. Н. Н. Лебедев

**4205. Некоторые замечания о функциях Хиршмана — Уиддера $H_{n\,k}(z)$. Лущки, Микусинский, Урбаник, Влёка, Зелезный** (Einige Bemerkungen über die Hirschman—Widder'schen Funktionen $H_{n,k}(x)$. Łuszczki Z., Mikusiński J., Urbanik K., Wloka J., Zieleźny Z.), Colloq. math., 1956, **4**, № 1, 30—32 (нем.)

Функции $H_{n,k}(-x)$ при $x > 0$ определяются так:

$$H_{n,k}(-x) = a_{k+1}\ldots a_n\, e^{-a_k x} * \ldots * e^{-a_n x}, \qquad (1)$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots;\ k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

причем $0 < a_0 < a_1 < \ldots$ — заданная числовая последовательность, а знак $*$ обозначает свертку

$$g(x) * f(x) = \int_0^x f(t)\,g(x-t)\,dt,$$

$H_{n,n}(-x) = e^{-a_n x}$. Доказывается, что функция $y = H_{n,k}(-x)$ при $k \neq n$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\sum_{i=0}^{n-k} \sigma_{n,k}^i\, y^{(n-k-1)} = \sigma_{n,k}^{n-k}\, e^{-a_n x},$$

где $\sigma_{n,k}^i$ — $i$-я симметрическая функция от $a_{k+1}, \ldots, a_n$, так что $\sigma_{n,k}^0 = 1$, $\sigma_{n,k}^1 = a_{k+1} + \ldots + a_n, \ldots, \sigma_{n,k}^{n-k} = a_{k+1}\ldots a_n$. Кроме того, $y$ удовлетворяет нулевым начальным условиям. Ю. Л. Рабинович

**4206 К. Элементарное введение в теорию функций Ганкеля и Бесселя-Нёймана. Наиболее существенные свойства цилиндрических функций с многими примерами применения из физики и техники.** Ревальд (Elementare Einführung in die Bessel-Neumann und Hankel-Funktionen. Wesentl. Eigenschaften d. Zylinder-Funktionen mit zahlr. Anwendungsbeispielen aus Physik und Technik. Rehwald Walther. Stuttgart, Hirzel, 1959, 44 S., ill., 6.30 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, **A**, № 6, 464 (нем.)

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

**4207. Об одном методе разложения в ряд для нахождения приближенного преобразования Лапласа.** Лак (A series expansion method for finding approximate Laplace transforms. Lucke W. H.), Proc. I.R.E., 1958, **46**, № 11, 1877—1878 (англ.)

Рассматривается приближенное нахождение преобразования Лапласа для функций, которые можно представить (по крайней мере приближенно) разбиением промежутка $0 < t < \infty$ на частичные промежутки посредством точек деления $t_1, t_2, \ldots, t_n$, причем внутри каждого частичного промежутка функция представляется многочленом. После кратного интегрирования по частям преобразование Лапласа выражается в виде двойной суммы по точкам деления и по значениям производных данной функции в точках деления.

Изложенный метод сравнивается с так называемым методом импульсов, который заключается в повторном дифференцировании вышеуказанного представления функции, последующего введения импульсной $\delta$-функции в точках деления промежутка $0 < t < \infty$ и преобразования Лапласа полученного представления функции.

Н. А. Бразма

**4208. О представлении функций посредством преобразований Фурье.** Руни (On the representation of functions as Fourier transforms. Rooney P. G.), Canad. J. Math., 1959, **11**, № 2, 168—174 (англ.)

Доказываются три теоремы о представимости функций посредством преобразований Фурье. В этих теоремах используется оператор

$$\mathfrak{F}_{k,t}[F] = \frac{(-ik/t)^{k+1}}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x - ik/t)^{k+1}} F(x)\, dx, \quad k = 1, 2\ldots$$

В частности, теорема 1 утверждает: Необходимым и достаточным условием того, что функция $F \in L_q(-\infty, \infty)$, $q \geqslant 2$, является преобразованием Фурье некоторой функции в $L_p(-\infty, \infty)$ при $p^{-1} + q^{-1} = 1$, заключается в существовании такой постоянной $M$, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\, \mathfrak{F}_{k,t}[F] \,|^p\, dt \leqslant M, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Н. А. Бразма

**4209. О преобразовании Фурье обобщенных распределений.** Румьё (Sur la transformation de Fourier des distributions généralisées. Roumieu Charles), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 4, 511—513 (франц.)

Продолжение работы автора (РЖМат, 1959, 607). Пусть $\{M_p\}$, $\{N_p\}$ — две логарифмически выпуклые последовательности положительных чисел, для которых

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \frac{M_p}{M_{p-1}} > 0, \quad \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \frac{N_p}{N_{p-1}} > 0.$$

Через $\mathfrak{I}(\{M_p\}, \{N_p\})$ обозначается пространство бесконечно дифференцируемых на всей оси функций $f(x)$, для которых при некоторых $A$, $h$, $k$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\, x^q f^{(p)}(x) \,|^2 dx \leqslant A h^{2p} k^{2q} (M_p)^2 (N_q)^2 \quad (p, q = 0, 1, \ldots).$$

$\mathfrak{I}'(\{M_p\}, \{N_p\})$ — двойственное пространство обобщенных функций. Далее, $\mathfrak{Q}(\{M_p\}, \{N_p\})$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций, для которых при всех $k$ для некоторых $A$, $h$

$$|\, f^{(p)}(x) \,| \leqslant A h^p M_p \exp \sup_{q>0} \left( q \ln \frac{|x|}{k} - \ln \frac{N_q}{N_0} \right) \quad (p = 0, 1, \ldots).$$

Без доказательства формулируется ряд утверждений о связи этих пространств и их преобразований Фурье друг с другом и с ранее введенными пространствами $D'(\{M_p\})$, $E'(\{M_p\})$. В частности, утверждается, что если $M_p/(pM_{p-1})$ не убывает и $\to \infty$, а

$$\sum_{p=1}^{\infty} (M_p)^{-1/p} = \infty,$$

то существуют $\varphi$, $\psi \in \mathfrak{I}'(\{M_p\}, \{N_p\})$ с компактными не точечными носителями, для которых $\varphi * \psi$ имеет точечный носитель.

А. Д. Мышкис

**4210. Конечное преобразование свертки.** Блэкман, Поллард (The finite convolution transform. Blackman Jerome, Pollard Harry), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **91**, № 3, 399—409 (англ.)

Указана процедура (при весьма естественных ограничениях) для разыскания функции $\varphi(x)$ из соотношения

$$f(x) = \int_0^x \varphi(x - t)\, dk(t), \quad 0 \leqslant x < a,$$

где $f(x)$ и $k(x)$ — функции, данные на $[0, a]$.

М. Б. Балк

**4211. Некоторое соотношение для интегрального преобразования.** Бушман (An integral transformation relation. Buschman R. G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 6, 956—958 (англ.)

Рассматривается следующее свойство интегральных преобразований, которое является обобщением предыдущих результатов автора (РЖМат, 1959, 3920).

Пусть для некоторого ядра $K(s, t)$ существует интеграл

$$\int_0^{\infty} K(s, t)\, k(t)\, F[g(t)]\, dt = \Re\{k(t)\, F[g(t)]\}.$$

Делаем подстановку вида $t = h(p)$. Пусть далее $\mathfrak{S}(u, p)$ — симметричное ядро, причем существует функция $\Phi(s, u)$ такая, что

$$K[s, h(p)]\, k[h(p)]\, |\, h'(p)\, | = \int_0^{\infty} S(u, p)\, \Phi(s, u)\, du = \mathfrak{S}\{\Phi(s, u)\}.$$

Тогда при некоторых условиях и обозначении $\mathfrak{S}\{F(p)\} = f(u)$ имеет место равенство

$$\Re\{k(t)\, F[g(t)]\} = \int_0^{\infty} \Phi(s, u)\, f(u)\, du.$$

Частным случаем этого свойства является известное соотношение для преобразования Лапласа

$$\mathfrak{L}\{t^{\nu-1} F(1/t)\} = \int_0^{\infty} (u/s)^{\nu/2} J_{\nu}[2(su)^{1/2}]\, f(u)\, du,$$

где $\mathfrak{L}\{F(t)\} = f(s)$. Приводятся и другие частные случаи рассмотренного свойства.

Н. А. Бразма

**4212. $z$-преобразование.** Хелм (The $z$ transformation. Helm H. A.), Bell System Techn. J., 1959, **38**, № 1, 177—196 (англ.)

$z$-преобразование определяется равенством

$$L_s[f(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, z^{-n} = F(z). \qquad (1)$$

Посредством простых подстановок оно переходит в дискретное преобразование Лапласа

$$L_s[f(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, e^{-nTs} = F\left(e^{sT}\right)$$

(Цыпкин Я. З., Теория импульсных систем, Физматгиз, М., 1958, гл. II) или в преобразование Дирихле (РЖМат, 1958, 5770).

Преобразование (1) рассматривается в реферируемой статье как частный случай преобразования Лапласа-Стилтьеса

$$\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, d\alpha(t) = F(e^{sT}),$$

соответствующий некоторой простой ступенчатой функции $\alpha(t)$. Изучаются следующие вопросы о преобразовании (1): абсолютная сходимость ряда (1); формула обращения в виде комплексного контурного интеграла; соотношение между обычным и дискретным преобразованиями Лапласа, имеющее вид

$$L_s[f(t)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma} \frac{F(p)}{1 - e^{(p-s)T}}\, dp,$$

где $F(p)$ — преобразование Лапласа функции $f(t)$. На примерах поясняется размножение полюсов у изображений в дискретном преобразовании Лапласа по сравнению с соответствующими изображениями обычного преобразования Лапласа.

Далее рассматривается применение $z$-преобразования для нахождения решений разностных уравнений. Для этой цели применяется теорема смещения аргумента оригинала при $z$-преобразовании. Приводится пример.

Дополнение к работе содержит доказательства некоторых свойств $z$-преобразования: теоремы смещения аргумента оригинала, аналоги теорем о дифференцировании и интегрировании оригинала в обычном преобразовании Лапласа, аналог теоремы свертывания оригинала, теоремы об изменении масштаба аргумента изображения.

Н. А. Бразма

**4213. Приложение дробного интегрирования к теории цепочек интегральных преобразований. Фокс** (An application of fractional integration to chain transform theory. Fox Charles), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, 9, № 6, 968—973 (англ.)

Под цепочкой интегральных преобразований подразумевается совокупность равенств вида

$$g_{p+1}(x) = \int_0^{\infty} [r_p(x/u)/u]\, g_p(u)\, du,$$

$$\int_0^{\infty} [l_q(x/u)/u] g_{q+1}(u)\, du = g_q(x), \qquad (1)$$

где $p$ принимает $i$ каких-нибудь значений из ряда $1, 2, \ldots, n$, а $q$ принимает оставшиеся $n-i$ значений, причем $g_{n+1}(x) = g_1(x)$ (РЖМат, 1956, 557). Функции $r_p(x)$ называются правыми ядрами, а $l_q(x)$ — левыми ядрами преобразования (1).

Один из видов интеграла дробного порядка по Коберу (Kober H., Quart. J. Math., Ser. (2), 1940, 11, 193—211) определяется оператором вида

$$I^{+}_{\eta,\,\alpha} f(t) = \frac{x^{-\eta-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\eta} f(t)\, dt.$$

Рассматриваются интегралы дробного порядка от ядер цепочки преобразований (1). Доказывается теорема:

Если 1) действительные части всех чисел $\alpha_p$, $\alpha_q$, $\eta_p$ и $\eta_q$ положительны, 2) функции $r_p(x)$ и $l_q(x) \in L_m(0, \infty)$, $m \geqslant 1$, 3) $r_p(x)$ являются правыми ядрами и $l_q(x)$ — левыми ядрами некоторой цепочки интегральных преобразований, и 4) существует равенство

$$\prod_q \frac{\Gamma(\eta_q + 1 - s)}{\Gamma(\eta_q + \alpha_q + 1 - s)} = \prod_p \frac{\Gamma(\eta_p + 1 - s)}{\Gamma(\eta_p + \alpha_p + 1 - s)},$$

то а) новые функции

$$I^{+}_{\eta_p,\,\alpha_p} r_p(t) \quad \text{и} \quad I^{+}_{\eta_q,\,\alpha_q} l_q(t)$$

тоже $\in L_m(0, \infty)$ и б) они также являются правыми, соответственно левыми, ядрами некоторой цепочки интегральных преобразований. Здесь $p$ и $q$ принимают вышеуказанным образом значения $1, 2, \ldots, n$. Н. А. Бразма

**4214 К. Задачи по операционному исчислению с решениями (Преобразование Карсона—Лапласа). Денис-Папен, Кауфман, Фор** (Exercices de calcul opérationnel avec leurs solutions. (Transformation de Carson—Laplace). Denis-Papin M., Kaufmann A., Faure R. Paris, Eyrolles, 1959, 169 p., ill.) (франц.)

Приводятся подробные решения задач, предложенных в учебном пособии первых двух авторов по операционному исчислению (РЖМат, 1959, 1167К). Книга содержит три главы. В первой главе приводятся задачи по общим вопросам теории преобразования Карсона — Лапласа (общие теоремы, дифференциальные уравнения — обыкновенные и в частных производных, интегральные уравнения, разностные уравнения, системы дифференциальных уравнений).

Вторая глава посвящена обратному преобразованию к интегралу Меллина — Фурье. В третьей главе приводятся задачи из электротехники, решаемые методами операционного исчисления.

В виде дополнения на 22 страницах приводится таблица основных формул операционного исчисления.

К. А. Карпов

## ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

**4215. О вычитательном формализме умножения причинных функций. Боголюбов Н. Н., Парасюк О. С.**, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1956, 20, № 5, 585—610

Работа является математическим эскизом последовательной процедуры ренормировок, используемой в современной теории поля. Построение этой процедуры проводится в рамках теории обобщенных функций.

В основе всякой теории поля лежит так называемая причинная функция (точнее, несколько таких функций) $\Delta(x)$ ($x$ — точка четырехмерного пространства); функция $\Delta(x)$ имеет, как правило, особенности на световом конусе, в связи с чем ее преобразование Фурье $\widetilde{\Delta}(k)$ достаточно медленно убывает на бесконечности (либо вообще не существует). Произведение же таких функций вида

$$\prod \Delta_l(x_l - x_k) \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (1)$$

(произведение берется по некоторым, произвольно выбранным парам $x_l$, $x_k$) также обладает особенностями, ведущими к тому, что у произведения (1) отсутствует преобразование Фурье.

В реферируемой работе авторы вводят некоторую процедуру (вычитательный формализм), позволяющую элиминировать особенности у произведения (1) так, чтобы

существовало преобразование Фурье. Все построение проводится по следующей схеме.

I. Произведение (1) (равно как и саму функцию $\Delta(x)$) можно рассматривать как обобщенную функцию $n$ переменных, т. е. как линейный функционал на пространстве $C$ достаточно гладких функций $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Однако, из-за особенностей этого произведения такой функционал однозначным образом может быть определен лишь на функциях $\varphi$, аннулирующихся вместе со своими производными до некоторого порядка во всех точках особенностей $\prod \Delta_l(x_l - x_k)$, т. е. на некотором подпространстве $D$ пространства $C$.

II. Задача теперь состоит в том, чтобы обобщенную функцию с пространства $D$ продолжить на все пространство $C$ с соблюдением некоторых требований физического характера (лоренц-инвариантность, причинность и т. д.).

Авторы определяют такое продолжение с помощью процедуры, названной ими $R$-операцией. Грубо говоря, смысл этой операции состоит в том, что строится некоторая комбинация из $\delta$-функций и их производных, зависящих от разностей $(x_l - x_k)$, причем такая, что будучи добавлена к произведению (1), она гасит его особенности. К точному описанию этой процедуры мы и переходим.

III. Каждому произведению вида (1) можно поставить в соответствие диаграмму $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, состоящую из узлов, соединенных направленными линиями; узлы помечаются точками $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а линия $x_l x_k$ идет из узла $x_l$ в узел $x_k$ в случае, если в произведении (1) встречается множитель $\Delta(x_l - x_k)$. Всякое разбиение точек на группы порождает разбиение диаграммы $G$ на более мелкие поддиаграммы $G_1, G_2, \ldots, G_k$.

Основным является понятие вклада от диаграммы, который мы обозначим через $\Delta(G)$. Вклад $\Delta(G)$ от диаграммы $G$ определяется индуктивно: он выражается через вклады от всех поддиаграмм. Введем предварительно понятие вклада от разбиения диаграммы $G$ на поддиаграммы $(G_1, \ldots, G_k)$.

Пусть вклады $\Delta(G_l)$ от всех этих поддиаграмм известны и являются обобщенными функциями от переменных $x_1, \ldots, x_k$ (или части их), причем такими, что их преобразования Фурье имеют вид $\delta\left(\sum k_l\right) P(k_1, \ldots, k_n)$, где $P$ — полином. Вкладом от разбиения $G_1, \ldots, G_k$ назовем произведение

$$\Delta(G_1)\,\Delta(G_2) \ldots \Delta(G_k) \prod \Delta_e(x_{l_s} - x_{l_k}),$$

где линии $(x_{l_s}, x_{l_k})$ внешние для диаграмм $G_1, \ldots, G_k$.

Обозначим такое произведение через

$$\Delta G_1\, \Delta G_2\, \Delta G_3 \ldots \Delta G_k.$$

Вклад $\Delta(G)$ диаграммы $G$ определим так:

а) $\Delta(G) = 0$, если диаграмму $G$ можно разбить на две диаграммы, соединенные одной линией;

в) в противном случае

$$\Delta(G) = -T^{\gamma(G)}_{\omega(G)}\left(\sum \Delta G_1\, \Delta G_2 \ldots \Delta G_k\right),$$

где сумма берется по всем разбиениям диаграммы $G$, а символ $T^{\gamma(G)}_{\omega(G)}$ означает, что после того, как вычислено преобразование Фурье от суммы в скобке, следует заменить его конечным отрезком тейлоровского разложения в точке $\omega(G)$ вплоть до $\gamma(G)$-го дифференциала, а затем снова перейти к координатам $x_1, \ldots, x_n$; числа $\gamma(G)$ для каждой диаграммы подбирают произвольно лишь с некоторым ограничением снизу, точка же $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ выбирается так, чтобы все выражение было релятивистски-инвариантно. Заметим, что наше правило позволяет определить вклад для любой диаграммы, коль скоро известен вклад для одной точки, а также выбраны числа $\gamma(G)$ и точки $\omega(G)$. Положим теперь

$$R(G) = \sum_{m > 2} \Delta G_1\, \Delta G_2 \ldots \Delta G_m + \Delta(G),$$

где сумма берется по всем разбиениям $G$, состоящим более чем из двух поддиаграмм. $R(G)$ и является анонсированной выше $R$-операцией.

В работе доказывается (II часть), что $R(G)$ действительно гасит расходимости у произведения (1). Попутно здесь устанавливается способ выбора для $\gamma(G)$ и $\omega(G)$. То обстоятельство, что $R(G)$ аннулируется на функциях из $D$, усматривается почти непосредственно из определения.

Работа оканчивается замечанием, что в случае реальной теории поля к выражению для $\Delta(G)$ должен быть добавлен многочлен той же структуры с произвольными коэффициентами.

Р. А. Минлос

**4216. Графическое построение основных переходных функций. Куле** (Grafické sestrojení základních přechodných funkcí. Kule Lumír), Elektrotechn. obzor, 1959, **48**, № 4, 198—203 (чешск.; рез. русск., франц., нем., англ.)

**4217. Нули и полюсы выходного напряжения трехполюсной цепи типа потенциометров. Абдель-Месси Мохеб Азиз** (Zeros and poles of output voltage of 3-terminal potentiometer networks. Abdel-Messih Moheb Aziz), Z. angew. Math. und Phys., 1959, **10**, № 2, 207—215 (англ.; рез. нем.)

Рассматривается трехполюсная цепь, содержащая конечное число линейных потенциометров на общей оси. Такая цепь состоит из элементов с активными сопротивлениями вида $r_1$, $xr_2$ и $(1-x)r_3$, где $x$ выражает отношение угла поворота оси к углу полного ее поворота $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. Предполагается, что к цепи приключено постоянное входное напряжение $E_1$. Доказывается следующая теорема:

Выходное напряжение цепи $E_2(x)$ является рациональной функцией от $x$, обладающей свойствами:

1. Нули функции $E_2(x)$ расположены на действительной оси вне интервала $0 < x < 1$ или попарно комплексно сопряжены.

2. Полюсы $E_2(x)$ являются простыми, действительными и, притом, отрицательными или $> 1$.

Теорема доказывается приемами линейной алгебры и, частично, посредством энергетических соображений.

Н. А. Бразма

**4218. О некоторых обобщениях интеграла Дюамеля для линейных четырехполюсников. Вунш** (Über einige Verallgemeinerungen des Duhamelschen Integrals für lineare Vierpole. Wunsch Gerhard), Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden, 1957—1958, **7**, № 5, 1019—1022 (нем.)

При выводе известного интеграла Дюамеля для линейной системы (в частности, четырехполюсника)

$$u_2(t) = \int_0^t w(t-\tau)\,\frac{du_1(\tau)}{d\tau}\,d\tau,$$

где $u_1(t)$ — входной сигнал, $u_2(t)$ — выходной сигнал, а $w(t)$ — переходная функция, предположения о линейности системы недостаточно. Необходимо дополнительное условие о переходной функции системы:

Если входному сигналу вида единичного скачка

$$u_1(t) = s(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{при } t \geqslant 0 \end{cases}$$

соответствует переходная функция $w(t)$, то входному сигналу $s(t-t_0)$ $(t_0 > 0)$ соответствует переходная функция $w(t-t_0)$. (Это условие заведомо удовлетворяется в случае линейной системы с постоянными параметрами).

В реферируемой статье выводится обобщенный интеграл Дюамеля при отказе от указанного условия. В предположении, что входной сигнал $u_1(t)$ равен нулю до момента $t = T_1$, обобщение интеграла Дюамеля представляется в виде интеграла Стилтьеса

$$u_2(t) = \int_{T_1}^{t} w(t, t_0)\, du_1(t_0),$$

где $w(t, t_0)$ — обобщенная переходная функция.

Рассматриваются частные случаи периодических и постоянных параметров.

Примечание референта. Дополнительное предположение автора об асимптотическом приближении переходной функции $w(t, t_0)$ к некоторой предельной функции $w_\infty(t)$ (систему, удовлетворяющую этому предположению, автор называет устойчивой системой) не используется при выводе обобщенного интеграла Дюамеля. Н. А. Бразма

**4219. Введение в анализ нелинейных систем автоматического регулирования со случайным входом. Барретт, Колс** (An introduction to the analysis of nonlinear control systems with random inputs. Barrett J. F., Coales J. F.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1956, C103, № 3, 190—199 (англ.)

Элементарное введение в статистическую динамику систем автоматического регулирования. Основные понятия (§ 1) приводятся с махистской позиции „удобной формы регистрации опытных фактов". Например, корреляционная функция определяется через предел (II, стр. 191), имеющий смысл, если переход к нему понимать по вероятностной мере (что там не указывается), подразумевать, что входная случайная функция стационарная (выполняется эргодическая теорема) и a fortiori реализована в пределах изменения времени от $-T$ до $T + \tau$.

В § 1 излагаются общие основы статистической динамики для линейных систем автоматического регулирования. Конец § 1 и весь § 2 содержат простейший случай системы автоматического регулирования с одной нелинейностью. Для этого же случая в § 3 дается приближенный способ (Burt) оценки (при помощи разложения в бесконечный ряд) автокорреляционной функции выхода. Там же в качестве особо простого примера приводится случай устройства „да-нет" с гауссовым шумом при входе.

§ 4 посвящается методу статистической линеаризации Бутона (Booton R. C., Massachusetts Inst. of Technologi, 1952, Report № 61). Ссылка на работу И. Е. Казанова (Тр. ВВИА им. Жуковского, 1954, вып. 394) отсутствует, хотя в этой работе содержатся более точные и сильные результаты (полученные независимо), чем у Бутона. Отсутствует ссылка и на работу А. Н. Колмогорова (Изв. АН СССР, сер. матем., 1941, 5, 3—14), результаты которой гораздо позднее (независимо) повторил Винер (Wiener N., The extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, Wiley, New York, 1949), ссылка на работу которого приводится.

В § 5 приводятся нестрогие рассуждения, касающиеся устойчивости (в смысле А. М. Ляпунова) двумерной системы автоматического регулирования (сервомотор с нагрузкой) при действии случайной помехи.

Б. В. Широкорад

**4220 К. Метод функциональных преобразований в анализе линейных систем. Аселтайн** (Transform method in linear system analysis. Aseltine John A. New York—Toronto—London, MacGraw-Hill Book Co., Inc., 1958, XVI, 300 pp. ill.) (англ.)

Рассматриваются некоторые функциональные преобразования и их приложения к анализу электрических и механических систем, описываемых посредством линейных дифференциальных и разностных уравнений. Книга предназначена для инженеров, в связи с чем много внимания уделяется физическому смыслу рассмотренных явлений, довольствуясь обычной для инженеров степенью строгости изложения вопросов математики.

Более половины книги (гл. 1—11) посвящено преобразованию Лапласа. Здесь рассматриваются: основные свойства преобразования, изображения некоторых элементарных и специальных функций и интегрирование обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами; приложения к исследованию электрических цепей и динамических систем; обратное преобразование Лапласа; метод интегрирования обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и некоторые простейшие задачи на уравнения с частными производными; связь между предельными значениями оригинала и изображения; изображения периодических функций. Далее рассматриваются свойства линейных систем, импульсная и частотная характеристики и передаточная функция, системы с обратной связью и критерий Найквиста для их исследования.

Заслуживает внимания гл. 3 об импульсной функции $\delta(x)$. Ввиду того, что функция $\delta(x)$ является пределом симметричных относительно точки $x = 0$ функций, наряду с этой функцией рассматривается еще функция $\delta_+(x) = \lim_{\eta \to 0} \delta(x - \eta)$ $(\eta > 0)$, причем для преобразований Лапласа этих функций получается, вопреки обычаю, $L[\delta_+(x)] = 1$, но $L[\delta(x)] = 0$ (см., например, Лурье А. И., Операционное исчисление, Гостехиздат, М.—Л., 1950, § 6).

Кроме того, достойно особого упоминания рассмотрение в гл. 6 жиратора как нового элемента электрической цепи, введенного по аналогии с гироскопом в механике.

В остальной части книги (гл. 12—17) рассматриваются другие функциональные преобразования: конечные преобразования Фурье, представляемые рядами Фурье, и интегральное преобразование Фурье; дискретное преобразование Лапласа и его приложение к нахождению решений разностных уравнений; преобразование Меллина и его применение к интегрированию линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами частного вида.

Особое внимание уделяется применению преобразования Фурье к теории случайных процессов (гл. 14 и 15). Рассматриваются некоторые понятия теории вероятностей, в частности, понятия стационарных и эргодических процессов, характеристическая функция, корреляционная функция и ее спектральная плотность, преобразование Фурье случайного процесса, фильтрация шума, вычисление и измерение спектральной плотности, белый шум.

В конце книги приводится сводка как рассмотренных в книге, так и некоторых других функциональных преобразований, причем указываются основные функциональные выражения, наиболее удобно преобразуемые посредством соответствующего преобразования. В приложениях к книге приводятся, во-первых, краткие сведения о теории функций комплекс ного переменного с обоснованием некоторых формул функциональных преобразований и, во-вторых, сводка основных свойств и операционных соотношений преобразования Лапласа. Содержание книги поясняется примерами как в тексте, так и в конце разделов. Н. А. Бразма

**4221 К. Линейный переходный анализ. Т. I. Смешанно параметрические двухконцевые сети. Вебер** (Linear transient analysis. Vol. I. Lumped-parameter two-terminal networks. 2nd print. Weber Ernst. New York, John Wiley and Sons, Inc.; London, Chapman and Hall, Ltd, 1957, xiv, 348 pp., ill.) (англ.)

**4222 К. Линейный переходный анализ. Т. II. Двухконцевые пары сетей трансмиссионных линий. Вебер** (Linear transient analysis. Vol. II. Two-terminal-pair networks transmission lines. Weber Ernst. New York, John Wiley and Sons, Inc.; London, Chapman and Hall, Ltd, 1956, xiv, 452 pp., ill.) (англ.)

См. также: 3900, 3918, 3937, 3947, 3948, 4248, 4249.

## ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Редактор *М. А. Наймарк*

**4223. Продолжение аналитических пространств. Картан** (Prolongement des espaces analytiques. Cartan Henri), Sémin. H. Cartan. École norm. supér. 1957—1958, 2. Paris, 1958, 11-1 — 11-16 (франц.)

В начале статьи дано определение общего аналитического пространства. Аналитические пространства представляют собой обобщение комплексных аналитических многообразий, необходимое для ряда математических теорий, в частности для теории автоморфных функций. Сначала вводится понятие кольцованного пространства. Пусть $X$ — некоторое топологическое пространство. $X$ называется кольцованным, если в каждой точке $x \in X$ задано подкольцо $A_x$ кольца всех ростков непрерывных комплекснозначных функций.

Пусть далее $U$ — область в $C^N$. Аналитическим подмножеством называется замкнутое множество $V \subset U$ в окрестности каждой точки $x \in U$, являющееся множеством общих нулей конечного числа голоморфных в окрестности $x$ функций. В $V$ следующим образом естественно ввести структуру кольцованного пространства. Пусть $x \in V$. $A_x$ — кольцо всех функций, индуцированных ростками аналитических в окрестности $x$ (в смысле $U$) функций.

Аналитическим пространством называется хаусдорфово пространство, в которое введена структура кольцованного пространства, всякая точка которого обладает окрестностью, изоморфной аналитическому подмножеству $C^N$.

Аналитическое пространство называется неприводимым в точках, если кольцо $A_x$ не имеет делителей нуля.

Наиболее важный класс аналитических пространств — это нормальные пространства, т. е. такие, для которых кольцо $A_x$ в каждой точке $x \in X$ целозамкнуто.

Основное содержание статьи — это проблема продолжения, которая состоит в следующем. Пусть $X$ — локально компактное пространство, $V$ — открытое всюду плотное множество в $X$, $W = X \setminus V$. Пусть на $V$ задана структура аналитического нормального пространства размерности $m$. Проблема состоит в том, чтобы выяснить, когда на $X$ существует структура аналитического нормального пространства, индуцирующая на $V$ заданную структуру.

На $X$ существует не более чем одна структура с указанными выше свойствами, поскольку кольцевая структура $A$ определяется однозначно (действительно, пусть $x \in X$, $U$ — некоторая окрестность точки $x$. Непрерывная в $U$ функция принадлежит $A_x$, если она голоморфна в любой точке $y \in U \setminus V$).

Автор показывает, что эта кольцевая структура есть структура аналитического нормального пространства, если выполняются следующие предположения: 1) каждая точка $x_0 \in W$ имеет фундаментальную систему окрестностей $U$ (в пространстве $X$), пересечение которых с $V$ является неприводимым аналитическим пространством. 2) $A$ индуцирует на $W$ структуру аналитического пространства размерности, меньшей чем $m$, ($m$—размерность $V$). 3) каждая точка $x_0 \in W$ имеет окрестность $U$ такую, что все точки $V \cap U$ отделимы друг от друга при помощи функций $f \in A_{x_0}$.

Эта теорема существенно сильнее и гораздо удобней для применений соответствующего результата Бейли.

Доказательство этой теоремы существенным образом использует следующую теорему Реммерта — Штейна.

Пусть $U$ — открытое множество в $C^N$, $W$ — аналитическое подмножество $U$ размерности $\leqslant p$, $M$ — аналитическое подмножество в $U - W$ всюду $m$-мерное, причем $p < m$.

Тогда замыкание $\overline{M}$ множества $M \subset U$ является аналитическим подмножеством в $U$ всюду $m$-мерным. (Другими словами, в $W$ нет точек „существенно особых" для $M$). И. И. Пятецкий-Шапиро

**4224. Замечание к одной аппроксимационной теореме Ямабе. Зингер** (Remarque sur un théorème d'approximation de H. Yamabe. Singer Ivan), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e. natur., 1959, **26**, № 1, 33—34 (франц.)

Приведено простое доказательство следующей теоремы: Пусть $M$ — выпуклое всюду плотное множество топологического векторного действительного пространства $E$ и $f_1, \ldots, f_m$ — линейные непрерывные функционалы на $E$. Тогда для всякого элемента $x \in E$ и произвольной его окрестности $V(x)$ существует элемент $p \in M$ такой, что $f_i(p) = f_i(x)$ и $p \in V(x)$ $(i = 1, \ldots, m)$. Первоначально эта теорема была доказана сложным путем, причем только для случая нормированного пространства $E$. Е. А. Горин

**4225. Равностепенная непрерывность и компактность в локально выпуклых топологических линейных пространствах. Рейми** (Equicontinuity and compactness in locally convex topological linear spaces. Raimi Ralph A.), Michigan Math. J., 1958, **5**, № 2, 203—211 (англ.)

Пусть $E$ и $F$ — локально выпуклые пространства и $L(E, F)$ — пространство линейных непрерывных отображений $E$ в $F$. В работе рассматривается представляющий естественный интерес вопрос о равностепенно непрерывных подмножествах пространства $L(E, F)$. Автор приводит характеристические свойства равностепенно непрерывных подмножеств в $L(E, F)$ для случаев, когда $E$ и $F$ заданы в топологии, отличной от „сильной топологии Макки" $\tau$. В указанных автором случаях такой топологии естественной оказывается связь между равностепенной непрерывностью и компактностью подмножеств подходящим образом топологизированного $L(E, F)$; особенно просто она выглядит, если $E$ и $F$ удовлетворяют некоторым условиям в топологии $\tau$. Полученные результаты применяются для характеристики компактных семейств операторов в гильбертовом пространстве в терминах равностепенной непрерывности. Е. А. Горин

**4226. Замечания о линейных метрических пространствах Монтеля. Ролевич** (Remarks on linear metric Montel spaces. Rolewicz S.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron et phys., 1959, **7**, № 4, 195—197 (англ.; рез. русск.)

Пространство типа Шварца может быть охарактеризовано методом А. Пелчинского (РЖМат, 1958, 7891) или через аппроксимальную размерность А. Н. Колмогорова (РЖМат, 1959, 8178). Рассмотрению последнего способа и посвящена настоящая работа.

Ядерное пространство всегда является пространством типа Шварца, которое в свою очередь есть некоторое совершенное пространство (РЖМат, 1958, 3843). В обратную сторону в общем случае соответствующие заключения не имеют места. Все же можно показать, что каждое бесконечномерное совершенное $B_0$-пространство содержит бесконечномерное ядерное подпространство с безусловным базисом, причем, если в ядерном $B_0$-пространстве с безусловным базисом $\{e_n\}$ топология задается последовательностью псевдонорм $\|x\|_n$ $(m = 1, 2, \ldots)$, то это пространство изоморфно совершенному пространству $M(\|e_n\|_m)$.

Автор предполагает, что среди всех линейных метрических пространств типа Шварца ядерные пространства характеризуются „существенно широким" классом $\Phi(X)$ функций $\varphi(x)$, с помощью которого и дается характеристика заданного пространства $X$ через аппроксимативную размерность А. Н. Колмогорова. Однако обосновать это утверждение до конца пока не удалось. Все теоремы в работе приведены без доказательств.

Л. А. Ходакова

**4227. Об одном классе среднепериодических функций.** Дандею (Sur une classe de fonctions moyenne-périodiques. Dandeü Yves. — Thèse doct. math., Fac. sci. Univ. Nancy, 1957, 19 p.) (франц.)

Пусть $T_1$ и $T_2$ — две обобщенные функции с компактными носителями на комплексной плоскости.

Изучается задача:

$$\frac{d^2f}{dx^2} - \lambda^2 f = 0, \tag{1}$$

$$< T_1,\ f > = 0, \tag{2^I}$$

$$< T_2,\ f > = 0. \tag{2^{II}}$$

Собственные значения $\lambda = \lambda_k$ этой задачи определяются как корни уравнения

$$A(\lambda) = \begin{vmatrix} A_1(\lambda) & A_1(-\lambda) \\ A_2(\lambda) & A_2(-\lambda) \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

где $A_l(\lambda) = < T_l,\ e^{\lambda x} >$ $(i = 1, 2)$.

Обозначим через $\varphi_{\lambda_k}(x) = A_1(-\lambda_k)\, e^{\lambda_k x} - A_1 \lambda_k e^{-\lambda_k x}$ соответствующие собственные функции (предполагается для упрощения задачи, что корни $\lambda_k$ простые). Пусть $g(x)$ — целая аналитическая функция. Исследуется возможность представления функции $g(x)$ в виде $\sum_k a_k \varphi_{\lambda_k}(x)$ (сходимость равномерная на каждом компакте). Совокупность всех таких $g(x)$ обозначается через $P$. Доказывается, что если $g(x) \in P$, то

$$a_k = \frac{-2}{A'(\lambda_k)\, A_1(\lambda_k)} \left\langle A_1(\lambda_k)\, T_2 - A_2(\lambda_k)\, T_1;\ \int_0^x g(\xi)\, sh\lambda_k (x - \xi)\, d\xi \right\rangle .$$

Основной результат: для того чтобы $g \in P$, необходимо и достаточно, чтобы

$$(\check{T}_l * g) + (T_l * \check{g}) = 0 \quad (i = 1, 2). \tag{4}$$

(Если $S$ — обобщенная функция, то через $\check{S}$ обозначается симметричная обобщенная функция, определяемая равенством $\langle \check{S};\ \varphi \rangle = \langle S;\ \check{\varphi} \rangle$; $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$). Условие (4) является обобщением среднепериодичности по Дельсарта — Шварцу, которая связана с уравнением первого порядка

$$\frac{df}{dx} - \lambda f = 0$$

и одной обобщенной функцией $T$. В этом случае функция $g$ называется среднепериодической относительно $T$, если $T * g = 0$.

Б. М. Левитан

**4228. Одна теорема об аналитическом продолжении обобщенных функций. Боголюбов Н. Н., Владимиров В. С.,** Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 3, 26—35

Доказана следующая теорема: Пусть даны две обобщенные функции $F_r(x)$ и $F_a(x)$ $(x = (x^0, \ldots, x^n))$, обращающиеся в нуль соответственно в областях: $x_0 < 0$ или $x^{02} - \sum_{i=1}^n x_i^2 < 0$; $x_0 > 0$ или $x^{02} - \sum_{i=1}^n x_i^2 < 0$. Пусть их преобразования Фурье $\widetilde{F}_j(p)$ (метрика $px = p^0 x^0 - \vec{p}\vec{x}$ либо $px = p^0 x^0 + \vec{p}\vec{x}$) совпадают в области

$$p^{02} - \sum_{i=1}^n p_i^2 < m^2. \tag{1}$$

Тогда найдется целое $N$, что в области (1)

$$\widetilde{F}_r(p) = \widetilde{F}_a(p) = \sum_{k=0}^N P_k(p)\, \Phi_k(p^2),$$

где $P_k(p)$ — полиномы, а функции $\Phi_k(r)$ допускают аналитическое продолжение на всю плоскость комплексного переменного $W$, кроме разреза $\mathrm{Im} W = 0$, $\mathrm{Re} W \geqslant m$.

Для всех $W$, удаленных от линии разреза не меньше чем на $\delta$, функции $\Phi_k(W)$ ограничены полиномом, степень которого не зависит от $\delta$.

О. С. Парасюк

**4229. Функциональный анализ и дифференциальные уравнения в частных производных. Браудер** (Functional analysis and partial differential equations. I Browder Felix E.), Math. Ann., 1959, 138, № 1, 55—79 (англ.)

Первая часть большой работы, посвященная исключительно методам функционального анализа, применяемым в теории уравнений в частных производных. Во введении указывается, что вторая часть содержит подробное применение этих методов к уравнениям.

Работа состоит из введения и трех разделов. В разделе 1 рассматриваются главным образом операторы в пространствах Банаха и Фреше и изучаются их свойства, группирующиеся в основном вокруг свойства нормальной разрешимости, т. е. замкнутости области изменения оператора. При этом доказательства двух основных теорем 1.1 и 1.2 в этом разделе не приводятся, ибо теоремы эти получаются в дальнейшем как следствия более общих теорем раздела 2, где рассматриваются операторы, действующие уже в локально выпуклых линейных топологических пространствах.

Терминология и обозначения разделов 2 и 3 в основном совпадают с принятыми в книге Н. Бурбаки (РЖМат, 1956, 2861К, 3163К), за исключением обозначения $E^*$. Последнее означает пространство, топологически сопряженное к локально выпуклому пространству $E$ (у Бурбаки соответствующее обозначение $E'$).

Основные результаты содержатся в разделе 3, где дается общий подход к абстрактной теории краевых задач, изучавшихся ранее М. И. Вишиком (Тр. Моск. матем. об-ва, 1952, 1, 187—246), Хёрмандером (РЖМат, 1957, 2325) и М. И. Вишиком и О. А. Ладыженской (РЖМат, 1958, 328).

Пусть $E$ и $F$ — два локально выпуклых линейных топологических пространства, $T_0$ — линейное преобразование с плотной в $E$ областью определения $D(T_0)$ и областью изменения $R(T_0)$ в $F$. Линейное преобразование $T_0'$ с областью определения в $F^*$ и областью изменения в $R(T_0')$ в $E^*$ называется формально сопряженным с $T_0$, если для всех $e \in D(T_0)$ и $f^* \in D(T_0')$ имеем

$$<T_0 e, f^*> = <e, T_0' f^*>.$$

Оператор $T_1$ называется суженным сопряженным с $T_0'$, если $D(T_1) = \{e : e \in E$; существует $f \in F$ такой, что $<f, f^*> = <e, T_0 f^*>$ для всех $f^* \in D(T_0')\}$ и $T_1 e = f$ для $e \in D(T_1)$.

Замкнутый оператор $T$ из $E$ в $F$ с плотной областью определения называется оператором реализации для пары $(T_0, T_0')$, если $T_0 \subseteq T \subseteq T_0'$. Оператор реализации $T$ называется разрешимым, если $T$ осуществляет взаимно однозначное отображение $D(T)$ на $F$ и $T^{-1}$ есть непрерывное линейное отображение $F$ в $E$.

Теорема 3.1. Если $E$ и $F$ — два пространства Фреше, то для существования разрешимого оператора реализации пары $(T_0, T_0')$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: 1) отображение $T_0'$ однооднозначно и $(T_0')^{-1}$ есть слабо *-непрерывное отображение $R(T_0')$ в $F^*$; 2) если $N(T_1)$ — пространство нулей $T_1$, а $G(T_1)$ и $G(T_0)$ — графики операторов $T_1$ и $T_0$ соответственно, то $N(T_1) \times \{0\}$ имеет замкнутое дополнение $M$ в $G(T_1)$ такое, что $G(T_0) \subseteq M$.

Теорема 3.1 затем специализируется и модифицируется для случаев, когда $E$ и $F$ — рефлексивные банаховы и, наконец, гильбертовы пространства (теорема 3.2 и следствие 3.3).

В заключительной части последнего раздела изучаются так называемые обобщенные расширения оператора $T_0$ по Фридрихсу, описание которых при некоторых предположениях дается в теореме 3.6. Библ. 32 назв.

И. С. Иохвидов

**4230. О пространствах $L^1$. Дьёдонне** (Sur les espaces $L^1$. Dieudonné Jean), Arch. Math., 1959, **10**, № 2-3, 151—152 (франц.)

Пусть $T$ — локально бикомпактное пространство и $\mu$ — положительная мера на $T$. При определенном выборе $T$ и $\mu$ банахово пространство $L^1(\mu)$ может быть сопряженным к некоторому банахову пространству (например, пространство $l^1$, соответствующее случаю, когда $T$ есть множество целых неотрицательных чисел, а мера каждой точки равна 1). Доказывается, что если $\mu$ — мера Лебега на $T = [0,1]$, то пространство $L^1(\mu)$ не изоморфно никакому сопряженному банахову пространству. Ставится вопрос о нахождении необходимых и достаточных условий того, что $L^1(\mu)$ является сопряженным к некоторому банахову пространству.

А. С. Маркус

**4231. Топологическая эквивалентность некоторых пространств Банаха. Кадец М. И.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 54—55

**4232. О функциях Хара и о базисе Шаудера в пространстве $C$ [0; 1]. Цесельский** (On Haar functions and on the Schauder basis of the space $C\langle 0,1\rangle$. Ciesielski Z.), Bull. Acad. polon. sci. Ser. sci. math., astron. et phys., 1959, **7**, № 4, 227—232 (англ.; рез. русск.)

Пусть $\{\chi_n(t)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, — система Хара, а $\{\varphi_n(t)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, — система, у которой $\varphi_0(t) \equiv 1$, $\varphi_n(t) = \int_0^t \chi_n(\tau)\, d\tau$, $n > 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Для данной функции $x(t) \in C[0; 1]$ вводятся обозначения

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(t), \text{ где } a_k = \int_0^1 x(t)\chi_k(t)\, dt,$$

$$T_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \varphi_k(t), \text{ где } b_0 = x(0),\ b_k = \int_0^1 \chi_k(t)\, dx(t),$$

$\omega_1(\delta)$ — модуль непрерывности $x(t)$, а $\omega_2(\delta)$ — ее модуль гладкости.

Скажем, что $\omega(t)$ удовлетворяет условию (*), если $\int_0^{\delta} \frac{\omega(t)}{t}\, dt \leqslant K\omega(\delta)$, $0 \leqslant \delta \leqslant 1$, и что $\omega(t)$ удовлетворяет условиям (**), если $\omega(t) \geqslant 0$ не убывает с ростом $t$ в $[0, 1]$, а $\omega(2t) \leqslant M\omega(t)$ для $0 \leqslant 2t \leqslant 1$.

Теорема 1. Если $x(t) \in C[0; 1]$ и $\omega_1(\delta)$ удовлетворяет условию (*), то

$$\| x - S_n \|_C \leqslant \frac{2K}{\ln 2}\, \omega_1\left(\frac{1}{n}\right) \text{ для } n \geqslant 2.$$

Затем решается в известном смысле обратная задача. Теорема 2. Если $\omega(t)$ удовлетворяет условиям (**) и $\| x - S_n \|_C \leqslant \omega\left(\frac{1}{n}\right)$, то $\omega_1(\delta) \leqslant 4M\omega(\delta)$ для $0 \leqslant \delta \leqslant 1$.

Замечено, что последовательность $\{\varphi_n\}$ образует базис Шаудера в $C[0, 1]$, причем для $x(t) \in C[0; 1]$ справедливо равенство $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varphi_n(t)$. Для системы $\{\varphi_n\}$ доказывается аналог теоремы 1.

Теорема 4. Если $x(t) \in C[0; 1]$ и $\omega_2(\delta)$ удовлетворяет условию (*), то

$$\| x - T_n \|_C \leqslant \frac{8K}{\ln 2}\, \omega_2\left(\frac{1}{n}\right).$$

Неизвестно, справедлив ли аналог теоремы 2 для системы $\{\varphi_n\}$.

В конце работы показано, что из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)$ следует равномерная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |\, b_n \varphi_n(t)\,|$, а из $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\, \omega_2\left(\frac{1}{n}\right) < \infty$ следует $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\, b_n\,|}{n} < \infty$.

Ю. А. Казьмин

**4233. Антиизоморфизмы кольца и структуры линейного нормированного пространства. Вульфсон** (Antiisomorphisms of the ring and lattice of a normed linear space. Wolfson Kenneth G.), Portugaliae math., 1955, **14**, № 1, 1—7 (англ.)

Пусть $A$ — линейное нормированное пространство, $E(A)$ — кольцо всех его линейных непрерывных отображений в себя и $L(A)$ — структура его замкнутых подпространств. Пространство $A$ называется псевдорефлексивным (по Макки), если возможно так ввести новую норму в $A^*$, что линейный функционал на $A^*$ непрерывен в том и только в том случае, когда он индуцируется элементом из $A$. Такая новая топология для $A^*$ в известном смысле единственна и $A^*$ с этой топологией называется псевдосопряженным для $A$. В работе доказано несколько теорем; основным результатом является установление того факта, что если $E(A)$ (соответственно $L(A)$) антиизоморфно $E(B)$ (соответственно $L(B)$), то $A$ и $B$ псевдорефлексивны и взаимно псевдосопряжены в смысле Макки. Для банаховых пространств $A$ и $B$ это дает их рефлексивность и взаимную сопряженность.

Е. А. Горин

**4234. Одно свойство мультилинейных операторов. Пелчинский** (A property of multilinear operations. Pełczyński A.), Studia math., 1957, **16**, № 2, 173—182 (англ.)

Пусть $E$ — $B^*$-пространство (так автор называет линейное, не обязательно полное подмножество банахова пространства), $\{\varepsilon_t\}$ — последовательность, состоящая из чисел 1 и $-1$, $s$ — число из $[0, 1)$. Последовательность $\{x_n\} \in E$ называется $\tau_s$- ходящейся к нулю, если существует константа $C$ такая, что при $k = 1, 2, \ldots$, для произвольных различных индексов $n_1, \ldots, n_k$ и каждой последовательности $\{\varepsilon_t\}$ удовлетворяется неравенство $\| \varepsilon_1 x_{n_1} + \ldots + \varepsilon_k x_{n_k} \| \leqslant Ck^s$. Очевидно, если $x_n \to x_0\ (\tau_s)$, то $x_n \to x_0$ (слабо), откуда следует един-

ственность $\tau_s$-предела. Если $x_n \to x_0$ $(\tau_s)$, но не сходится по норме, то последовательность $\{x_n\}$ называется существенно $\tau_s$-сходящейся. Если $B^*$-пространство обладает некоторыми специальными свойствами, то мультилинейные операторы, определенные над ним, непрерывны в $\tau_s$-топологиях.

Доказываются несколько простых утверждений относительно этой сходимости и близких понятий; в частности, показано, что в пространстве $c_0$ каждая слабо сходящаяся последовательность содержит $\tau_0$-сходящуюся подпоследовательность, а в пространстве $l^p$ $(p \geqslant 1)$ всякая слабо сходящаяся последовательность содержит $\tau_{l^p}$-сходящуюся подпоследовательность.

Устанавливается также, что для некоторого класса пространств, именно для тех, в которых имеются существенно $\tau_0$-сходящиеся последовательности, функционал $\| x \|$ не является непрерывным в соответствующей топологии и потому для него нет равномерной аппроксимации полиномами ни на каком шаре. В пространстве $c[0, 1]$ этот функционал ни на каком шаре не представим как предел последовательности функционалов. Л. А. Ходакова

**4235. Некоторые субрефлексивные банаховы пространства. Фелпс** (Some subreflexive Banach spaces. Phelps R. R.), Arch. Math., 1959, **10**, № 2-3, 162—169 (англ.)

Понятие субрефлексивного пространства введено автором ранее (РЖМат, 1959, 1681). Там же автор высказал гипотезу, что всякое пространство Банаха субрефлексивно. В реферируемой статье автор делает дальнейшие шаги по пути решения этой проблемы. Им построены широкие классы не рефлексивных, но субрефлексивных пространств. Пусть, например, $S$ — компактное хаусдорфово пространство, $C(S)$ — банахова алгебра всех непрерывных, ограниченных действительных функций на $S$ с обычной sup-нормой; обозначим через $I$ некоторый идеал в $C(S)$. Автор показывает, что если $I$ замкнут, то $I$ субрефлексивное пространство (теорема 2.1). Установлен также характеристический признак для элементов множества $P(I)$ функционалов, достигающих своей верхней грани на единичной сфере пространства $I$ (в случае $I = C(S)$ такой признак был дан ранее С. И. Зуховицким, РЖМат, 1958, 1324). Пусть далее $(S, F, m)$ — пространство с мерой, $L(S, F, m)$ — пространство всех измеримых, абсолютно интегрируемых на $S$ действительных функций с нормой $\|x\| = \int_S |x| \, dm$. В работе доказано, что это пространство также субрефлексивно (теорема 2.2). Имеются и другие теоремы такого же рода. Автор высказывает предположение, что банахово пространство, являющееся непрерывным линейным образом субрефлексивного пространства, само субрефлексивно. Если бы это было верно, то отсюда легко следовала бы субрефлексивность любого банахова пространства. В. Н. Никольский

**4236. Опорные свойства множеств в банаховых пространствах и чебышевские множества. Ефимов Н. В., Стечкин С. Б.**, Докл. АН СССР, 1959, **127**, № 2, 254—257

Авторы вводят понятие $a$-выпуклого тела в пространстве Банаха и для таких тел доказывают аналог теоремы Мазура (о существовании и единственности опорного шара). Эта теорема позволяет дать характеристику чебышевских множеств в равномерно выпуклых (не гладких) пространствах. Для случая равномерно выпуклых и гладких пространств устанавливается, что всякое ограниченно компактное подмножество такого пространства является чебышевским тогда и только тогда, когда оно выпукло. Отмечается, что теорема 2 заметки авторов (РЖМат, 1958, 10017) неверна, и дается ее исправленная формулировка. В. Н. Никольский

**4237. Характеристические функционалы. Силвер-ман, Янь-Ди** (Characteristic functionals. Silverman R. J., Yen Ti), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 3, 471—477 (англ.)

Статья примыкает к работе М. Г. Крейна и М. А. Рутмана (Успехи матем. наук, 1948, **3**, № 1 (23), 3—95). Рассматриваются условия, при которых полугруппа $\Gamma$ линейных операторов, оставляющих инвариантным положительный телесный конус $K$ в частично упорядоченном линейном нормированном пространстве $E$ над полем вещественных чисел, имеет характеристические (инвариантные) положительные функционалы, т. е. $A^*f = \lambda_A f$ $(A^*f = f)$, $\lambda_A > 0$, $A \in \Gamma$. Полугруппу $\Gamma$ линейных операторов на $E$ называют положительной, если $\Gamma(K) \subseteq K$. Все время предполагается, что $\Gamma(K^0) \subseteq K^0$, где $K^0$ — внутренность $K$. Приводится несколько исправленное доказательство теоремы М. Г. Крейна и М. А. Рутмана. Если $\Gamma$ коммутативна, то она имеет характеристический положительный функционал. Авторы отмечают, что мн жество $H_A$ $(A \in \Gamma)$ характеристических положительных функционалов оператора $A$ не является выпуклым, ибо в противном случае упомянутая выше теорема была бы справедлива для леворазрешимой полугруппы линейных операторов, что неверно. Подполугруппа $\Gamma^{(1)}$ полугруппы $\Gamma$ называется подполугруппой левых коммутаторов, если для любых $A, A' \in \Gamma$ существует $A'' \in \Gamma^{(1)}$ такой, что $AA' = A''A'A$. Полугруппа $\Gamma$ называется леворазрешимой, если существует последовательность подполугрупп $\Gamma = \Gamma^{(0)} \supseteq \Gamma^{(1)} \supset \ldots \supseteq \Gamma^{(n)}$ такая, что 1) $\Gamma^{(n)}$ коммутативна и 2) каждая $\Gamma^{(i)}$ есть подполугруппа лезых коммутаторов полугруппы $\Gamma^{(i-1)}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Далее показывается, что если $\Gamma^{(1)}$ есть подполугруппа левых коммутаторов полугруппы $\Gamma$ и $\Gamma^{(1)}$ имеет инвариантный положительный функционал, то $\Gamma$ имеет характеристический положительный функционал.

В заключение доказывается следующая теорема: Если $\Gamma$, рассматриваемая как абстрактная полугруппа, имеет разоинвариантное среднее, то следующие предложения эквивалентны: а) $\Gamma$ имеет характеристический положительный функционал; б) существует замкнутая гиперплоскость $X \subseteq E$ такая, что $X \cap K^0 = \varnothing$ и $\Gamma(X) \subseteq X$; в) существует положительный функционал $f$ такой, что $f(AA'u) = f(Au) f(A'u)$ $(A, A' \in \Gamma)$; г) существует положительный функционал $f$ такой, что $f(AA'A''u) = f(A'AA''u)$ $(A, A', A'' \in \Gamma)$; д) существуют гомоморфизм $\lambda : A \to \lambda_A$ $\Gamma$ на мультипликативную группу положительных вещественных чисел, два положительных вещественных числа $m$ и $M$ и положительный функционал $f$, такие, что $m\lambda_A \leqslant f(A_u) \leqslant M\lambda_A$, $A \in \Gamma$; (если $m(\Gamma)$ есть банахово пространство ограниченных вещественных функций на $\Gamma$, то положительный функционал $\mu \in m(\Gamma)^*$ называется правоинвариантным средним, если $\mu(x) = \mu(R_A x)$ $(x \in m(\Gamma), A \in \Gamma)$ и $\mu(I) = 1$, где $R_A x(A') = x(A'A)$ и $I$ — функция, равная 1). Из доказанной теоремы следуют следствия, относящиеся к существованию инвариантных положительных функционалов относительно полугруппы $\Gamma$, например, если $\Gamma$ есть локально конечная группа, то $\Gamma$ имеет инвариантный положительный функционал. Г. И. Домрачёва

**4238. О теореме, двойственной теореме Хана—Банаха, и о теореме Банаха. Зингер** (Sur un dual du théorème de Hahn—Banach et sur un théorème de Banach. Singer Ivan), Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1958(1959), **25**, № 6, 443—446 (франц.)

Пусть $E$ — пространство Банаха, $\mathfrak{M}$ — регулярно замкнутое подмножество сопряженного пространства $E^*$. Полагая $G = \{x \in E;\ f(x) = f(x_0)$ для всех $f \in \mathfrak{M}\}$, автор

формулирует утверждение основной теоремы своей прежней работы (РЖМат, 1959, 7107) в виде $\inf_{x\in G}\|x\| \leqslant \|x_0\|_{\mathfrak{M}}$, где $\|x_0\|_{\mathfrak{M}} = \sup(|f(x_0)|/\|f\|)$, $f\in\mathfrak{M}$. В статье доказывается, что на самом деле здесь имеет место знак равенства (теорема 1). В качестве приложения этой теоремы автор доказывает некоторое уточнение одной теоремы Банаха (см. также РЖМат, 1959, 7108), которое, впрочем, легко получается и без теоремы 1 (что отмечает и сам автор). В. Н. Никольский

**4239. Обобщение теоремы Марцинкевича и некоторые ее приложения. Стейн, Уэйсс** (An extension of a theorem of Marcinkiewicz and some of its applications. Stein E. M., Weiss Guido), J. Math. and Mech., 1959, 8, № 2, 263—284 (англ.)

Пусть $(M, \mu)$ и $(N, \nu)$ — пространства с $\sigma$-конечными мерами $\mu$ и $\nu$, $S(M)$ — множество всех действительных простых (Хилл Э., Функциональный анализ и полугруппы, 1951, стр. 54) функций на $M$ и $\mathfrak{M}(N)$ — множество всех действительных измеримых функций на $N$. Пусть $p, q \geqslant 1$. Линейный оператор $T$ из $S(M)$ в $\mathfrak{M}(N)$ называется оператором типа $(p, q)$, если $\|Tf\|_q < A\|f\|_p$, $A>0$; здесь $\|Tf\|_q = \left(\int_N |Tf|^q d\nu\right)^{1/q}$, аналогично определяется $\|f\|_p$. $T$ называется оператором слабого типа $(p, q)$, если

$$\lambda_{Tf}(y) < \left[\frac{A}{y}\|f\|_p\right]^q, \quad A>0,\ y>0,$$

$$\lambda_h(y) = \nu\{x\in N;\ |h(x)|>y\},\ h\in\mathfrak{M}(N).$$

$T$ называется оператором ограниченно слабого типа $(p, q)$, если для каждого измеримого множества $E\subset M$ конечной меры и для $y>0$

$$\lambda_{T\cdot\chi_E} < \left[\frac{A}{y}\|\chi_E\|_p\right]^q,$$

где $\chi_E$ — характеристическая функция множества $E$. Пусть $1 \leqslant p_k < q_k < \infty$, $k=0, 1$, $q_0 \neq q_1, 0<t<1$. Положим $\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}$, аналогично определяется $q_t$. Марцинкевич (Marcinkiewicz J., C. r. Acad. Sci. Paris, 1939, 208, 1272—1273) установил, что если $T$ есть оператор слабых типов $(p_0, q_0)$ и $(p_1, q_1)$, то он есть типа $(p_t, q_t)$ (см. также РЖМат, 1957, 2980). В статье показано, что теорема Марцинкевича остается справедливой, если $T$ есть оператор ограниченно слабых типов $(p_0, q_0)$ и $(p_1, q_1)$ (теорема 2). Эта теорема применяется далее к конкретным операциям (трансформация Гильберта и др.). Авторы получают новые доказательства теорем Палея, М. Рисса, Харди и Литлвуда. В приложении к статье показано, что оператор типа $(p, q)$ есть в то же время слабого типа $(p, q)$; оператор слабого типа есть оператор ограниченно слабого типа. Обратное неверно, если $p \neq 1$. В. Н. Никольский

**4240. Разложение на множители в групповых алгебрах. Коэн** (Factorization in group algebras. Cohen Paul J.), Duke Math. J., 1959, **26**, № 2, 199—205 (англ.)

Пусть $G$ — произвольная локально компактная группа. Через $L^1(G)$ обозначается банахова алгебра всех суммируемых на $G$ функций, в которой умножением является операция свертывания $(f*g) = \int_G f(t)g(t^{-1}x)\,dt$, а нормой $\|f\| = \int_G |f(t)|\,dt$. Банахова алгебра называется содержащей приближенную левую единицу, если существует константа $C$ такая, что при любом $\varepsilon>0$ и при любых $n$ заданных элементах $x_i$ пространства $L^1(G)$ существует такой элемент $e$, что $\|e\| < C$ и $\|ex_i - x_i\| < \varepsilon$ при $i = 1, 2, \ldots, n$. Как известно, $L^1(G)$ содержит приближенную левую единицу. Доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. Если $B$ — банахова алгебра, содержащая приближенную левую единицу, то для любого $z\in B$ и любого $\delta>0$ существуют $x, y\in B$ такие, что (а) $z=xy$, (б) $y$ принадлежит замкнутому левому идеалу, порожденному элементом $z$; (в) $\|z-y\|<\delta$.

Теорема 2. Пусть $z$ — непрерывная функция на компактной группе, а $\delta$ — положительное число. Тогда существуют функции $x, y\in L^1(G)$, удовлетворяющие условиям (а), (б), (в) теоремы 1, причем ($a_1$) $x$ — положительна; ($б_1$) $y$ — непрерывна и $\|z-y\|_\infty < \delta$; ($в_1$) если $z$ — вещественная функция, то $y$ — также вещественная функция.

Следствие. Всякая положительная непрерывная функция на компактной группе может быть представлена в виде свертки двух положительных функций.

Приводится пример, показывающий, что для неотрицательных функций аналогичное утверждение неверно. Ю. Л. Рабинович

**4241. $B^\#$-алгебры с некоторым множеством вполне непрерывных элементов. Олубуммо** ($B^\#$-algebras with a certain set of left completely continuous elements. Olubummo A.), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 3, 367—369 (англ.)

Элемент $a$ банаховой алгебры $A$ называется вполне непрерывным, если вполне непрерывны операторы умножения на $a$ слева и справа. Вполне непрерывной называется алгебра, все элементы которой вполне непрерывны. Алгебра $A$ называется $B^\#$-алгеброй, если для всякого $a\in A$ существует такое $a^\#\in A$, что $\|a^\#\|\,\|a\| = \|(a^\# a)^n\|^{\frac{1}{n}}$ для всех натуральных $n$.

Раньше автор доказал, что всякая левая вполне непрерывная $B^\#$-алгебра является $B(\infty)$-суммой конечномерных $B^\#$-алгебр и наоборот. В реферируемой работе левая полная непрерывность предполагается всего лишь для элементов, не имеющих правого обратного, и для этого случая получена структурная теория. Доказано, что $B^\#$-алгебра, в которой каждый элемент без правого обратного вполне непрерывен слева, является вполне непрерывной алгеброй. В. Э. Лянце

**4242. О спектре растущих функций. Гурарий В. П.**, Докл. АН СССР, 1958, **121**, № 5, 782—785

Пусть $L_\varphi$ — нормированное кольцо функций $f(x)$ с нормой $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\varphi(x)\,dx$, где $\varphi(x)>1$, $\varphi(x+y) \leqslant \varphi(x)\varphi(y)$, $\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x} < \infty$ $(\psi(x) = \sup_{|t|>x>1}(t^{-1}\ln\varphi(t)))$. Пусть далее функция $g(x)$ такова, что $\operatorname{vrai\,max}\frac{|g(x)|}{\varphi(x)} < \infty$. Доказано, что для того чтобы при некотором вещественном $\lambda$ обращались в нуль преобразования Фурье всех функций $f(x)\in L_\varphi$, для которых $\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(x)\,dx = 0$ $(-\infty < t < \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{\lim_{y\to+0}}\int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon} |g(t)e^{-y|t|}e^{itx}\,dt|\,dx > 0$ для всех $\varepsilon>0$. Отсюда выводится теорема, естественно обобщающая теорему Мандельбройта (РЖМат, 1956, 2322) на функции $f$ и $g$ описанного вида (в указанном реферате эти функции обозначались буквами $K$ и $F$), которая получается, если положить $\varphi(x)\equiv 1$. А. Д. Мышкис

**4243. Максимальные идеалы в некоторых кольцах функций. Аренс** (The maximal ideals of certain

function algebras. Arens Richard), Pacif. J. Math., 1958, 8, № 4, 641—648 (англ.)

Пусть $K$ — замкнутое множество на (расширенной) комплексной плоскости и $U \subset K$ — открытое множество. Доказана теорема: Пространство максимальных идеалов нормированного кольца всех функций, непрерывных на $K$ и аналитических в $U$, совпадает с множеством $K$, если только это кольцо не состоит из одних постоянных.

Г. Е. Шилов

**4244. Алгебры комплексных функций. Бир** (Complex function algebras. Bear H. S.), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **90** № 3, 383—393 (англ.)

Пусть $X$ — компактное хаусдорфово пространство и $A$ — собственная замкнутая подалгебра алгебры $C(X)$ всех непрерывных комплекснозначных функций на $X$ с равномерной топологией. Предполагается, что $A$ содержит все константы и для любых двух точек пространства $X$ содержит функцию, разделяющую их. Пространство $X$ рассматривается как подмножество пространства $\Sigma(A)$ максимальных идеалов кольца $A$. Показывается, что в $X$ существует единственное минимальное замкнутое подмножество $E$: существенное множество алгебры $A$ в $X$,— такое, что любая непрерывная функция, равная нулю в $E$, принадлежит $A$. Если $E = X$, то $A$ называется существенной алгеброй пространства $X$. Алгебра $A$ называется максимальной в $X$, если она не содержится ни в какой замкнутой собственной подалгебре алгебры $C(X)$. Алгебра $A$ называется экстремальной, если она не содержится ни в какой замкнутой собственной подалгебре алгебры $C(\Sigma(A))$, имеющей то же множество максимальных идеалов. Пусть $A \mid E$ — алгебра, образованная функциями из $A$, рассматриваемыми на множестве $E$. Если $E$ — существенное множество алгебры $A$, то $A \mid E$ является замкнутой собственной подалгеброй алгебры $C(E)$. При этом многие свойства алгебры $A$ сохраняются при переходе к алгебре $A \mid E$, в связи с чем естественно изучить эти свойства для существенных алгебр. К числу таких свойств относятся свойства максимальности и экстремальности. Далее, необходимым и достаточным условием для равенства $\Sigma(A) = X$ является соответствующее свойство $\Sigma(A \mid E) = E$ алгебры $A \mid E$. В остальной части работы рассматриваются в основном существенные алгебры пространства $X$, обладающие перечисленными свойствами. Пространство $X$, на котором существует существенная алгебра $A$ со свойством $\Sigma(A) = X$, обязательно совершенно и не может содержать вполне несвязного открыто-замкнутого подмножества. Для существенных максимальных алгебр получаются другим методом некоторые результаты Хелсона и Куигли, связанные с их аналитичностью (РЖМат, 1958, 3899). Другим свойством таких алгебр является совпадение введенной Г. Е. Шиловым границы алгебры $A$ с пространством $X$. Существенные экстремальные алгебры не содержат делителей нуля. В связи с этим они обладают свойством, подобным аналитичности: существует хотя бы одна точка $x_0 \in X$ такая, что функция, равная нулю в окрестности $x_0$ и принадлежащая $A$, тождественно равна нулю. Работа содержит и другие результаты.

Ю. Л. Далецкий

**4245. Преобразования Фурье классов $L_p$ на локально компактных унимодулярных группах. Кунц** ($L_p$ Fourier transforms on locally compact unimodular groups. Kunze R. A.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 89, № 2, 519—540 (англ.)

Обобщение теоремы Хаусдорфа — Юнга (Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М., ГОНТИ, 1939, гл. 9, п. 9,4) на произвольные локально компактные унимодулярные группы. Существенно используется введенный Сигалом (РЖМат, 1954, 1713) аппарат интегрирования операторов. $L$ — кольцо операторов, $m$ — мера, определенная на проекторах кольца. Через $m(A)$ обозначим интеграл измеримого (относительно кольца $L$) оператора $A$. Измеримые операторы $A$, удовлетворяющие неравенству $\| A \|_p = [m(A^*A)^{\frac{p}{2}}]^{\frac{1}{p}} < \infty$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, образуют полное нормированное пространство $L_p$ операторов. Пусть $G$ — локально компактная унимодулярная группа. Положим $\| f \|_p = [\int | f(x) |^p \, dx]^{1/p}$. $L_p(G)$ — пространство $L_p$ функций на группе. Функция $f(x)$ определяет в $L_2(G)$ оператор свертки (возможно, неограниченный) $L_{fg} = \int f(y)\, g(y^{-1}x)\, dy$. Оператор $L_f$ можно рассматривать как преобразование Фурье функции $f(x)$. Положим $V(L_f) = f$. Операторы сдвига $x \to s^{-1}x$ порождают в $L_2(G)$ $W^*$-кольцо операторов $L$. Определим на проекторах кольца $L$ дуальную меру $m(p)$, полагая $m(p) = \| f \|_2^2$, если $p = L_f$, $f \in L_2(G)$ и $m(p) = \infty$ в противном случае. Через $L_p(G')$ обозначим соответствующее пространство $L_p$ операторов. Основной результат. Пусть $1 \leqslant p \leqslant 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. а) Для каждой функции $f(x) \in L_p(G)$ имеет место неравенство $\| L_f \|_{p'} \leqslant \| f \|_p$. б) Линейное соответствие $V$, отображающее операторы пространства $L_2(G)$ в функции на группе, однозначно продолжается на $L_p(G')$, причем $\| V(A) \|_{p'} \leqslant \| A \|_p$ для всех $A \in L_p(G')$. В случае, когда $G$ — компактная группа, этот результат может быть уточнен и перефомулирован следующим образом. Пусть $\Phi_\lambda(x)$ с изменением $\lambda$ пробегает полный набор неприводимых унитарных представлений компактной группы $G$, $d_\lambda$ — размерность $\Phi_\lambda(x)$. Набор матриц $C_\lambda = \int f(x)\, \Phi_\lambda(x)\, dx$ $(\int dx = 1)$, соответствующих данной функции $f(x)$, назовем ее преобразованием Фурье. Положим $\| \{C_\lambda\} \|_p = [\Sigma_\lambda S_p (C_\lambda^* C_\lambda)^{\frac{p}{2}}]^{\frac{1}{p}}$. а) Для каждой функции $f(x) \in L_p(G)$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ имеет место неравенство $\| \{C_\lambda\} \|_{p'} \leqslant \| f \|_p$. б) Каждый набор матриц $\{C_\lambda\}$ размерности $d_\lambda$, удовлетворяющий условию $\| \{C_\lambda\} \|_p < \infty$, является преобразованием Фурье некоторой функции $f(x) \in L_{p'}(G)$ и $\| f \|_{p'} \leqslant \| \{C_\lambda\} \|_p$. В доказательстве используется вариант известной теоремы выпуклости Рисса, перенесенный на случай интегрирования операторов.

Г. И. Кац

**4226. Спектральный синтез для окружности. Херц** (Spectral synthesis for the circle. Herz C. S.), Ann. Math., 1958, 68, № 3, 709—712 (англ.)

В силу известного результата Л. Шварца (Schwartz L., C. r. Acad. sci., 1948, 227, 424—426) спектральный синтез не имеет места для единичной сферы $S^{n-1}$ в евклидовом пространстве $R^n$ при $n \geqslant 3$. В работе доказано, что для $n = 2$ спектральный синтез имеет место. Это вытекает из следующего результата. Пусть $C$ — пространство Банаха ограниченных, непрерывных функций $f(x)$ в $R^2$ с нормой $\sup | f(x) |$; пусть $E$ — подпространство в $C$, состоящее из функций, спектр которых содержится в единичной окружности.

Теорема. Для $\varphi \in E$ существует последовательность $\{\sigma_k(\varphi)\}$ преобразований Фурье — Стилтьеса мер, сосредоточенных на единичной окружности и таких, что $\| \sigma_k(\varphi) \| \leqslant \| \varphi \|$ и $\sigma_k(\varphi) \to \varphi$ равномерно на каждом компактном множестве пространства $R^2$. Доказательство этой теоремы основано на следующей лемме: Каждая $\varphi \in E$ удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi + \varphi = 0$, где $\Delta$ — оператор Лапласа.

Б. М. Левитан

**4247. О невозможности спектрального синтеза в алгебре почти периодических функций. Малявин** (Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale dans une algèbre de fonctions presque périodiques. Malliavin

Paul), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 12, 1756—1759 (франц.)

Дается отрицательное решение проблемы спектрального синтеза в случае алгебры почти периодических функций на локально компактной абелевой группе $G$ с абсолютно сходящимся рядом Фурье. Б. М. Левитан

**4248. О невозможности спектрального синтеза на прямой. Малявин** (Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale sur la droite. Malliavin Paul), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 15, 2155—2157 (франц.)

В заметке, которая является продолжением предыдущей (реф. 4247), строится пример, показывающий невозможность спектрального синтеза на группе целых чисел $Z$. Отсюда следует невозможность спектрального синтеза на $R_1$ и, следовательно, на $R_n$, $n \geqslant 1$ (для $n \geqslant 3$ это было доказано в 1947 г. Л. Шварцем). Указанный выше результат получается из следующей теоремы: существует функция $a(t) = \sum_1^\infty \beta_n \sin \lambda_n t$, $\sum_n |\beta_n| < \infty$, и последовательность $\delta_n$, $\delta_n = 0$ (1) со спектром, содержащимся в $a^{-1}(0)$, такие, что $\sum \beta_n^* \delta_n \neq 0$ $\left(\beta_n^* = \beta_n,\ n>0,\ \beta_n^* = -\beta_n,\ n<0\right)$.

Доказательство этой теоремы основано на следующей лемме:

Пусть $b(t) = \sum_1^\infty \alpha_k \sin \lambda_k t$, $\sum |\alpha_k| < \infty$, $\alpha_k$ веществ. $|\alpha_k| < 1$. Пусть $\varphi(\xi)$ — непрерывная функция. Определим меру $d\mu_n(\xi)$ с помощью равенства

$$\int_0^{2\pi} \varphi(b(t))\, e^{-int}\, dt = \int \varphi(\xi)\, d\mu_n(\xi)$$

и обозначим через $p_n(u)$ преобразование Фурье меры $d\mu_n$:

$$p_n(u) = \int_0^{2\pi} \exp(iub(t) - int)\, dt.$$

Для любого $\omega$, $0 < \omega < 1$, можно подобрать $\alpha_k$ и $\lambda_k$ так, что $\ln |p_n(u)| < -|u|^\omega + 0(1)$ равномерно по $n$.

Б. М. Левитан

**4249. О теореме Малявина. Кахан** (Sur un théorème de Paul Malliavin. Kahane Jean—Pierre), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 21, 2943—2944 (франц.)

Дается другое доказательство невозможности спектрального синтеза на прямой (реф. 4248), основанное на следующей лемме: Пусть $f(t)$ — периодическая функция с абсолютно сходящимся рядом Фурье и пусть $\exp(iuf(t)) = \sum_{-\infty}^{\infty} p_n(u)\, e^{int}$. Предположим, что

$$\sup_n \int_{-\infty}^{\infty} |up_n(u)|\, du < \infty.$$

Пусть

$$h_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} e^{-\varepsilon u^2}\, du = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\, e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}.$$

Тогда $h_\varepsilon'(f(t))$ имеет равномерно ограниченные коэффициенты Фурье, которые стремятся при $\varepsilon \to 0$ к псевдомере $T$ (обобщенной функции с ограниченными коэффициентами Фурье), сосредоточенной в $f^{-1}(0)$ и такой, что

$$\langle T, f \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\pi}^{\pi} h_\varepsilon'(f(t))\, f(t)\, dt = -2\pi \int_{-\infty}^{\infty} p_0(u)\, du.$$

Б. М. Левитан

**4250. Отображения близости для выпуклых множеств. Чини, Голдстейн** (Proximity maps for convex sets. Cheney Ward, Goldstein Allen A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 3, 448—450 (англ.)

Для замкнутого выпуклого множества $K$ в гильбертовом пространстве определяется „отображение близости" $P$, которое сопоставляет каждой точке $x$ точку $Px$ из $K$, ближайшую к $x$. Это понятие дает возможность использовать для решения вопроса о получении точек, на которых достигается минимальное расстояние между двумя выпуклыми множествами, метод последовательных приближений.

Отображение близости $P$ удовлетворяет условию Липшица $\|Px - Py\| \leqslant \|x - y\|$, причем равенство имеет место только, если $\|x - Px\| = \|y - Py\|$. Если $K_1$ и $K_2$ — замкнутые выпуклые множества, $P_i$ $(i = 1, 2)$ — соответственно их отображения близости, $Q$ — произведение $P_1P_2$, то каждая фиксированная точка $P_1P_2x$ является точкой из $K_1$, ближайшей к $K_2$, и обратно. Если одно из множеств конечномерно, а расстояние между ними достигается или одно из множеств компактно, то каждая последовательность $\{Qx^n\}$ сходится к некоторой фиксированной точке из вида $Qx$, что, в частности, верно в конечномерном евклидовом пространстве, если $K_1$ и $K_2$ — многогранники, являющиеся пересечениями конечных семейств полупространств.

Полученные результаты прилагаются к решению систем линейных неравенств. Л. А. Ходакова

**4251. О теореме С.-Надя. Филлипс** (On a theorem due to Sz.-Nagy. Phillips R. S.), Pacif. J. Math., 1959, **9**, № 1, 169—173 (англ.)

Пусть $J$ — сжимающий оператор в гильбертовом пространстве $H$, т. е. $\|J\| \leqslant 1$. По теореме С.-Надя (РЖМат, 1955, 3298) существует унитарный оператор $\widetilde{J}$ в более широком пространстве $\widetilde{H}$ такой, что $J_y^n = \widetilde{P}\widetilde{J}^n y$, $y \in H$, $n \geqslant 0$, где $\widetilde{P}$ — проектор из $\widetilde{H}$ в $H$. Пространство $\widetilde{H}$ можно выбрать так, чтобы замкнутая линейная оболочка системы $[\widetilde{J}^n H;\ -\infty < n < \infty]$ совпадала с $\widetilde{H}$. В этом случае структура $\{\widetilde{H}, \widetilde{J}, H\}$ определена с точностью до изоморфизма. Сформулированная теорема является дискретным аналогом другой теоремы, установленной С.-Надем в той же работе:

Пусть $[T_t;\ t \geqslant 0]$ — сильно непрерывная полугруппа сжимающих операторов в гильбертовом пространстве $H$. Тогда в более широком пространстве $\widetilde{H}$ существует группа унитарных операторов $[\widetilde{U}_t;\ -\infty < t < \infty]$ такая, что $T_t y = \widetilde{P}\widetilde{U}_t y$, $y \in H$, $t \geqslant 0$. Пространство $\widetilde{H}$ можно опять-таки выбрать „минимальным", причем единственным образом (в указанном выше смысле). Через $L$ обозначим инфинитезимальный порождающий оператор полугруппы $[T_t]$, определенный равенством:

$$\lim_{\delta \to +0} \delta^{-1} [T_\delta\, y - y] = L_y$$

для всех $y \in H$, для которых этот предел существует. Оператор $L$ замкнут и область его определения $D(L)$ плотна в $H$. Он является максимальным диссипативным оператором в том смысле, что $(y, Ly) + (Ly, y) \leqslant 0$ для $y \in D(L)$, и по отношению к этому свойству $L$ максимален.

Основной результат. По оператору $L$ строится сжимающий оператор $J = (I + L)(I - L)^{-1}$, который в силу первой из упомянутых теорем определяет пространство $\widetilde{H}$ и оператор $\widetilde{J}$. Оказывается, что оператор $\widetilde{L} = (\widetilde{J} - \widetilde{I})(\widetilde{J} + \widetilde{I})^{-1}$ ($\sim$ означает всюду, что соответствующие операторы действуют в $\widetilde{H}$) является порождающим для сильно непрерывной группы унитарных операторов $[U_t;\ -\infty < t < \infty]$ такой, что $T_t y = \widetilde{P}\widetilde{U}_t y$ $(y \in H,\ t \geqslant 0)$ и замкнутая ли-

нейная оболочка системы $[\widetilde{U}_t H;\ -\infty < t < \infty]$ совпадает с $\widetilde{H}$. И. С. Иохвидов

**4252. Локальная эквивалентность обыкновенных линейных дифференциальных операторов равного порядка. Фаге М. К.** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 60

**4253. Об обобщении одного неравенства Л. В. Канторовича. Грёйб, Рейнбольдт** (On a generalization of an inequality of L. V. Kantorovich. Greub Werner, Rheinboldt Werner), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 3, 407—415 (англ.)

Пусть $A$ и $B$ — два линейных самосопряженных перестановочных оператора в гильбертовом пространстве $H$ и пусть выполняются неравенства: $0 < m_1 E \leqslant A \leqslant M_1 E$; $0 < m_2 E \leqslant B \leqslant M_2 E$.

Тогда:

$$(x, x)^2 \leqslant (Ax, x)(A^{-1}x, x) \leqslant \frac{(M_1 + m_1)^2}{4M_1 m_1}(x, x)^2, \quad (1)$$

$$(Ax, Ax)(Bx, Bx) \leqslant \frac{(M_1 M_2 + m_1 m_2)^2}{4m_1 m_2 M_1 M_2}(Ax, Bx)^2. \quad (2)$$

Каждое из неравенств (1) и (2) может быть получено как следствие другого. Доказательства не используют спектрального разложения операторов $A$ и $B$.

И. К. Даугавет

**4254. О характеристических функциях линейных операторов. Штраус А. В.**, Докл. АН СССР, 1959, **126**, № 3, 514—516

Пусть $A$ — линейный оператор в гильбертовом пространстве $H$, имеющий плотную в $H$ область определения $D_A$ и непустое множество регулярных точек $\Lambda_A$. Рассмотрим некоторые линейные пространства $L$ и $L'$, в которых заданы невырожденные билинейные эрмитовы метрики $[\varphi, \psi]$ и $[\varphi', \psi']$, и некоторые линейные отображения $\Gamma$ и $\Gamma'$ множеств $D_A$ и $D_{A^*}$ соответственно на $L$ и $L'$. Будем считать, что $L$, $L'$, $\Gamma$ и $\Gamma'$ выбраны так, что $[\Gamma f, \Gamma g] = \frac{1}{i}[(Af, g) - (f, Ag)]$ $(f, g \in D_A)$ и

$$[\Gamma' f', \Gamma' g'] = \frac{1}{i}[(f', A^* g') - (A^* f', g')] \quad (f', g' \in D_{A^*}).$$

Тогда отображение $X(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda_{A^*})$, относящее каждому вектору $\varphi = \Gamma f \in L$ вектор $\varphi' = \Gamma'(A^* - \lambda E)^{-1}(A - \lambda E) f \in L'$, оказывается однозначно определенным и линейным. Оператор-функция $X(\lambda)$ называется характеристической для оператора $A$. Без доказательств приводятся следующие свойства функции $X(\lambda)$.

1)

$$[\varphi, \psi] - [X(\lambda)\varphi, X(\mu)\psi]' = \frac{\lambda - \bar{\mu}}{i}(\Omega_\lambda \varphi, \Omega_\mu \psi) \quad (\varphi, \psi \in L),$$

где $\Omega_\lambda$ — линейный оператор, относящий вектору $\varphi = \Gamma f \in L$ вектор $f - (A^* - \lambda E)^{-1}(A - \lambda E) f \in H$.

2) Для того чтобы простые операторы $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ были унитарно эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы некоторая характеристическая функция оператора $A^{(1)}$ была характеристической и для оператора $A^{(2)}$.

М. С. Бродский

**4255. О разрешимых расширениях линейных дифференциальных операторов первого порядка. Дезин А. А.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 18—19

**4256. Об обратной задаче спектрального анализа для уравнения Шредингера. Березанский Ю. М.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 53

**4257. Об инвариантности существенного спектра при изменении граничного условия дифференциального оператора в частных производных. Вулф** (On the invariance of the essential spectrum under a change of boundary conditions of partial differential boundary operators. Wolf František), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1959, A62, № 2, 142—147; Indagationes math., 1959, **21**, № 2, 142—147 (англ.).

Известно, что спектр $\sigma(A)$ оператора $A$ можно разбить на две части: существенный спектр $\sigma_e(A)$, состоящий из тех $\lambda$, для которых область значений $(\lambda I - A)$ не замкнута, и собственных значений бесконечной кратности. Вторая часть спектра, которую называют фредгольмовой частью $\sigma(A)$, состоит из остальных $\lambda \in \sigma(A)$. Пусть

$$A = -\Delta + \sum_{i=1}^{3} a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + b(x),$$

$a, b \in L^2(E^3)$, ограничен и действует в $L^2(E^3)$, и пусть $B$ формально тот же оператор, однако определенный на функциях, удовлетворяющих условиям Дирихле на некоторой ограниченной регулярной поверхности $S$. Если $S$ делит $E^3$ на две части, то условия Дирихле должны выполняться на обеих сторонах $S$. Пусть $D_1$ — внешняя часть и $D_2$ — внутренняя часть $S$. Тогда $L^2(E^3) = L^2(D_1) \oplus L^2(D_2)$ и $B = B_1 \oplus B_2$. Оператор $B_2$ имеет дискретный спектр и $\sigma_e(B_2)$ пусто. В работе доказывается, что существует такое $\lambda_1$, что для $\operatorname{Re}\lambda < \lambda_1$ оба оператора $(\lambda I - A)^{-1}$ и $(\lambda I - B)^{-1}$ существуют и ограничены. Основной результат работы состоит в следующем: для таких $\lambda$ $(\lambda I - A)^{-1} - (\lambda I - B)^{-1}$ — вполне непрерывный оператор. Отсюда и из известной теоремы Г. Вейля следует, что $\sigma_e(A) = \sigma_e(B)$. Результаты работы и методы могут быть перенесены на $E^n$ с произвольным $n$. Б. М. Левитан

**4258. Об одном обыкновенном дифференциальном операторе, зависящем от параметра. Стефанова Л. Б.**, Успехи мат. наук, 1959, **14**, № 1, 231—235

Исследуется спектр оператора

$$A_n^{(\alpha)} u = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\left[t^\alpha \frac{d^n u}{dt^n}\right], \quad 0 < t < 1, \quad (1)$$

при краевых условиях

$$u(1) = u'(1) = \ldots = u^{(n-1)}(1) = 0. \quad (2)$$

Доказывается: 1) при $\alpha = 2n$ спектр чисто непрерывный и совпадает с лучом $\lambda \geqslant 4^{-n}\prod_{k=1}^{n}(2k-1)^2$; 2) при $\alpha > 2n$ спектр также чисто непрерывный, но заполняет луч $\lambda \geqslant 0$. При $\alpha < 2n$ оператор $A_n^{(\alpha)}$ определяется тем же дифференциальным выражением (1) и краевыми условиями (2), а также краевыми условиями

$$u(0) = u'(0) = \ldots = u^{(n-[\alpha]-1)}(0) = 0, \quad [\alpha] < n; \quad (3)$$

если $[\alpha] \geqslant n$, то краевые условия на конце $t = 0$ не ставятся. Доказывается, что при $\alpha < 2n$ спектр оператора $A_n^{(\alpha)}$ дискретен. С. Г. Михлин

**4259. О характере спектра некоторых классов матриц в аналитическом пространстве. Казьмин Ю. А.** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 55—56

**4260. Потенциалы с нулевой предельной фазой рассеяния. Мозес, Дуань Сань-фу** (Potentials with zero scattering phase. Moses H. E., Tuan San Fu), Nuovo cimento, 1959, **13**, № 1, 197—206 (англ.; рез. итал.)

Рассматривается обратная задача для уравнения

$$y'' + \{\mu^2 - V(r)\}y = 0 \quad (0 < r < \infty), \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y'(0) &= \mu \end{aligned}\right\}, \qquad (2)$$

где $V(r)$ — непрерывная функция. Авторы доказывают, что если спектральная функция $\rho(\mu)$ задачи (1)—(2) имеет вид

$$\rho(\mu) = \frac{2}{\pi}\mu + \sigma(\mu), \qquad (3)$$

где $\sigma(\mu)$ — функция скачков с конечным числом скачков в положительных точках $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, то предельная фаза рассеяния равна нулю для всех $\mu \geqslant 0$. Если среди чисел $\mu_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ имеется хотя бы одно отрицательное, то предельная фаза отлична от нуля. Аналогичные результаты имеют место для уравнения

$$y'' + \left\{\mu^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - V(r)\right\} y = 0.$$

Примечание референта. Для случая $n = 1$ потенциал $V(r)$ и собственные функции $\psi(r, \mu)$ задачи (1) — (2) вычислены в работе И. М. Гельфанда и референта (Изв. АН СССР. Сер. матем. 1951, 15, 309—360).

Б. М. Левитан

**4261. О резольвенте и дополнительной компоненте треугольной модели квазиунитарного оператора. Поляцкий В. Т.**, Научн. зап. кафедр матем., физ. и естествозн. Одесск. гос. пед. ин-т, 1958, 22 № 2, 3—9

Находится резольвента треугольной модели квазиунитарного оператора. Исследуется также дополнительная компонента модели. Имеются опечатки. Л. А. Сахнович

**4262. О сопряженном пространстве кольца операторов. Такэсаки** (On the conjugate space of operator algebra. Takesaki Masamichi), Tohoku Math. J., 1958, 10, № 2, 194—203 (англ.)

Каждое $W^*$-кольцо операторов $M$ является банаховым пространством (с нормой, равной норме оператора). Пусть $M^*$ — сопряженное пространство. $M_*$ — часть $M^*$, состоящая из всех функционалов непрерывных относительно $\sigma$-слабой топологии $M$ (топологии, определяемой полунормами $\left|\sum (Tx_i, x_i)\right|$ $\left(x_i \in M, \sum \|x_i\|^2 < \infty\right)$. $M_*^+$ — множество всех сингулярных функционалов. По определению, это линейная оболочка положительных функционалов, для каждого из которых не существует меньшего, чем он, положительного функционала из $M_*$. В простейшем случае, когда $M$ — коммутативное кольцо, реализованное в виде кольца непрерывных функций на множестве $\Omega$ максимальных идеалов, для сингулярности функционала, определяемого мерой $\mu$ пространства $\Omega$, необходимо и достаточно, чтобы носитель меры $\mu$ был нигде не плотен. Показано, что инвариантное подпространство пространства $M^*$ распадается в прямую сумму своей $\sigma$-слабо непрерывной и сингулярной части. Линейное ограниченное отображение $W^*$-кольца $M$ в $W^*$-кольцо $N$ называется сингулярным, если сопряженное отображение переводит $N_*$ в $M_*^+$. Каждый $*$-гомоморфизм $M$ в $N$ является суммой $\sigma$-слабо непрерывного и сингулярного $*$-гомоморфизма. Из этого утверждения получены некоторые признаки $\sigma$-слабой непрерывности $*$-гомоморфизмов колец.

Г. И. Кац

**4263. Разложение Клебша — Жордана для бесконечномерных представлений группы Лоренца. Долгинов А. З., Топтыгин И. Н.**, Ж. эксперим. и теор. физ., 1958, 35, № 3, 794—796

Пусть $T_g^p$ — неприводимое унитарное представление собственной группы Лоренца, которое можно реализовать в пространстве $H_p$ функций на какой-нибудь одной полости времени подобного гиперболоида $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$. Обозначим через $\psi_{plm}(\alpha, \theta, \varphi)$ функцию, являющуюся базисным элементом пространства $H_p$. Базис $\psi_{plm}$ приурочен к разложению представления $T_g^p$ по неприводимым представлениям группы вращений ($\alpha, \theta, \varphi$ обозначают естественные координаты на гиперболоиде).

Приводится формула, выражающая произведение функций $\psi_{plm}$ через функции аналогичного вида:

$$\psi_{p_1 l_1 m_1}(\alpha, \theta, \varphi)\, \psi_{p_2 l_2 m_2}(\alpha, \theta, \varphi) =$$

$$= \sum_{l, m} \int_0^\infty k(p_1, p_2, l_1, l_2, m_1, m_2 | plm)\, \psi_{plm}(\alpha, \theta, \varphi)\, dp.$$

Вычислено ядро $k$, имеющее весьма сложный вид.

Ф. А. Березин

**4264. Оператор Ф. Сатакэ** (L'opérateur Φ. Satake Ichiro), Sémin H. Cartan. Ecole norm. supér. 1957—1958, 2. Paris, 1958, 14-1—14-18 (франц.)

Обозначим через $\Delta_{h,r}$ подгруппу $\Gamma_{h,r}$, состоящую из матриц следующего вида:

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & B_{12} \\ A_{21} & A_2 & B_{21} & B_2 \\ 0 & 0 & E & D_{12} \\ 0 & 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ h-r \\ r \\ h-r \end{matrix}$$

$$r \quad h-r \quad r \quad h-r$$

Соответственно, положим

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_{12} \\ Z_{12}' & Z_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ h-r \end{matrix}$$

$$r \quad h-r$$

В статье изучаются функции $f(Z)$, инвариантные относительно преобразований группы $\Delta_{h,r}$. Показывается, что такие функции можно разложить в ряды Фурье, коэффициенты которых удовлетворяют некоторым соотношениям. Основным в статье является изучение оператора $\Phi_r^n$, проектирующего функции от $Z$ в функции от $Z_1$.

Показывается, что этот оператор переводит функции $f(Z)$ в ее нулевой коэффициент Фурье, который зависит только от $Z_1$.

И. И. Пятецкий-Шапиро

**4265. Доказательство основной теоремы. Сатакэ, Картан** (Démonstration du théorème fondamental. Satake I., Cartan H.), Sémin. H. Cartan. Ecole norm. supér. 1957—1958, 2. Paris, 1958, 15-1—15-12 (франц.)

Доказана следующая теорема: Пространство $H_n/\Gamma_n$ с естественно возникающей на нем кольцевой структурой является аналитическим нормальным пространством ($\Gamma_n$ — означает здесь любую дискретную группу, соизмеримую с модулярной группой).

И. И. Пятецкий-Шапиро

**4266. Расширения линейных представлений групп Ли. Дьедонне** (Extensions de représentations linéaires de groupes de Lie. Dieudonné Jean), Sémin. Bourbaki. Secrét. math., 1957—1958, 10. Paris, 1958, 159-1—159-10 (франц.)

Изложение работы Хокшилда и Мостова (РЖМат, 1960, 1398).

А. Л. Онищик

**4267. Унитарные представления расширений групп. I. Макки** (Unitary representations of group extensions. I. Mackey George W.), Acta math., 1958, 99, № 3-4, 265—311 (англ.)

Пусть $G$ — локально компактная сепарабельная группа, $K$ — ее нормальная замкнутая подгруппа. Обобщая свои предыдущие результаты (Mackey G. W., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1949, 35, 537—545), автор исследует расширение на $G$ представлений группы $K$, что приводит его к подробному изучению проективных представлений (т. е. таких отображений $x \to T_x$, где $T_x$ —

унитарный оператор, что $T_{xy}=\sigma(x;\ y)T_x\cdot T_y$, $T_e=1$) и связанных с ними систем импримитивности.

Проективные представления называются еще $\sigma$-представлениями, если $\sigma(x, y)$ — соответствующий множитель.

Основной результат: Пусть $G$ и $K$ определены как выше, $\sigma$-множитель на $G$, $\hat{K}^\sigma$ — совокупность классов эквивалентности неприводимых $\sigma$-представлений группы $K$ с некоторой естественной борелевой структурой; предположим, что $\hat{K}^\sigma$ метрически гладко (по поводу определения борелевой структуры $e$, совокупности представлений и других используемых здесь понятий см. РЖМат, 1959, 4903) и что все $\sigma$-представления $K$ принадлежат классу I. Для $L\in\hat{K}^\sigma$ и $s\in G$ определим другой элемент $L^s\in\hat{K}^\sigma$ следующим образом:

$$L^s_x=\frac{\sigma(s^{-1},\ s)}{\sigma(sx,\ s^{-1})\,\sigma(s,\ k)}\,L_{sxs^{-1}},$$

совокупность представлений $L^s$ ($s\in G$) называется орбитой представления $L$.

Пусть $L_0\in\hat{K}^\sigma$, $G$ — подгруппа таких элементов $s\in G$, что $L^s_0=L_0$. Тогда $K\subset G$. Если $N$ — представление группы $G/K$, обозначим через $N'$ представление группы $G$, естественным образом полученное из $N$. Наконец, если $T$ — представление группы $G$, обозначим через $U^T$ представление группы $G$, индуцированное $T$ (определение такого представления аналогично определению, данному в статье: Mackey G. W., Ann. Math., 1952, 55, 101—139).

Теорема. Пусть $G$, $K$, $\sigma$, $L_0$, $G$ определены как выше. Существуют множитель $\omega$ на $G/K$, множитель $\tau$ на $G$ и такое $\tau$-представление $M$ группы $G$, что сужение $M$ на $K$ совпадает с $L_0$ и что $N\to U^{M\otimes N'}$ дает взаимнооднозначное соответствие между классами эквивалентности фактор-$\omega$-представлений группы $G/K$ и классами эквивалентности фактор-$\sigma$-представлений группы $G$, орбиты которых совпадают с орбитами $L_0$. $N$ и $U^{M\otimes N'}$ определяют факторы одного и того же класса и одновременно приводимы или неприводимы. A. Guichardet

**4268. Некоторые теоремы нелинейного функционального анализа и их применение в теории локальных групп. Мильман Д. П.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 58—59

**4269. Теорема о неподвижной точке и ее применение в теории дифференциальных уравнений. Мрувка** (Twierdzenie o punkcie stałym i jego zastosowania w teorii równań różniczkowych. Mrówka S.), Roczn. Polsk. towarz. mat. Ser. II—Wiadom. mat., 1959, 2, № 2, 291—297 (польск.)

Излагается доказательство теоремы о неподвижной точке для выпуклых замкнутых подмножеств гильбертова кирпича, а также применение указанной теоремы к доказательству существования задачи Коши для уравнения $y'=f(x, y)$. В. Э. Лянце

**4270. Об обращении нелинейных отображений. Ролевич** (On inversion of non-linear transformations. Rolewicz S.), Studia math., 1958, 17, № 1, 79—83 (англ.)

Рассматриваются достаточные условия того, чтобы отображение $U^{-1}$, обратное к непрерывному взаимнооднозначному отображению $U$ пространства $X$ на всё $Y$ ($X$ и $Y$ — пространства типа $(F)$, т. е. полные линейные метрические пространства) принадлежало первому классу Бэра. Предварительно доказываются леммы об эквивалентности первого класса Бэра и первого класса Бореля. Затем доказывается теорема: Если $U$ — взаимнооднозначное $\tau$-$\sigma$-непрерывное (т. е. переводящее всякую $\tau$-сходящуюся последовательность в $\sigma$-сходящуюся последовательность) отображение сепарабельного локально $\tau$-компактного пространства $X$ типа $(F)$ в пространство $Y$ типа $(F)$, в котором всякая последовательность, сходящаяся по норме, сходится в топологии $\tau$, то обратное отображение $U^{-1}$ принадлежит первому классу Бэра (в смысле сходимости по норме). Я. Л. Энгельсон

**4271. К определению аналитических функционалов. Тильман** (Zur Definition der analytischen Funktionale. Tillmann Heinz Günther), Arch. Math., 1959, 10, № 1, 8—11 (нем.)

Аналитическим функционалом называется отображение $F$ открытого множества $\mathfrak{G}\supset\mathfrak{S}$ (термины и обозначения см. РЖМат, 1959, 2895) в множество всех комплексных чисел, удовлетворяющее условиям: а) если $f_\lambda$ — аналитическая линия в $\mathfrak{G}$, то $F[f_\lambda]$ — голоморфная функция $\lambda$; б) если $f$ есть сужение $\tilde{f}$, ($f$, $\tilde{f}\in\mathfrak{S}$), то $F[f]=F[\tilde{f}]$.

В реферируемой работе показано, что условие б) при некоторых дополнительных предположениях, относящихся к $\mathfrak{S}$, есть следствие условия а). В. П. Хавин

**4272. К теории обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Красносельский М. А., Крейн С. Г.,** Тр. семинара по функц. анализу. Воронежский ун-т, 1956, вып. 2, 3—23

Изучается дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt}=f(x,\ t) \qquad (1)$$

в банаховом пространстве $E$. В $E$ рассматриваются нелинейные функционалы $\Phi(x)$ типа функций Ляпунова. Авторы указывают односторонние ограничения для $f(x, t)$, которые позволяют дать оценку снизу для времени, необходимого для того, чтобы движущаяся по закону (1) точка перешла с одной поверхности уровня функционала $\Phi(x)$ на другую. Отсюда вытекают теоремы о нелокальной продолжимости всех решений уравнения (1) — для этого достаточно гарантировать, чтобы точка за конечное время не могла попасть на поверхность уровня $\Phi(x)=\infty$. Аналогично получаются теоремы единственности: если одно из решений нулевое, то достаточно гарантировать, чтобы, двигаясь в сторону убывания $t$, каждая ненулевая точка $x_0$ за конечное время не могла попасть на поверхность уровня $\Phi(x)=\Phi(x_0)=0$.

В случае конечномерного пространства $E$ при различных функционалах $\Phi(x)$ авторы получают как известные, так и новые нелокальные теоремы существования и единственности (РЖМат, 1956, 3815) для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассматривая в качестве $E$ пространства функций, авторы получают нелокальные теоремы существования и теоремы единственности для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Я. Б. Рутицкий

**4273. Об аппроксимации в действительных банаховых пространствах посредством аналитических операций. Курцвейль** (On approximation in real Banach spaces by analytic operations. Kurzweil J.), Studia math., 1957, 16, № 2, 124—129 (англ.)

В своей более ранней статье (РЖМат, 1955, 3833) автор установил достаточное условие для того, чтобы всякую непрерывную операцию $F(x)$, отображающую открытое множество $G$ сепарабельного банахова пространства $X$ в некоторое банахово пространство $Y$, можно было аппроксимировать аналитическими операциями. В настоящей работе показано, что если $X$ равномерно выпукло, то это условие может быть сформулировано как необходимое и достаточное в следующем виде: существует действительный многочлен $q^*(x)$ такой, что $\inf|q^*(x)-q^*(\Theta)|>0$, $x\in X$, $\|x\|=1$.

В. Н. Никольский

**4274. О приближении абстрактных функций операторфункциями в гильбертовом пространстве. Зуховиц-**

кий С. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 53—54

**4275. Интерполятивная наилучшая аппроксимация в пространствах Банаха. Зингер** (La meilleure approximation interpolative dans les espaces de Banach. Singer Ivan), Rev. math. pures et appl. (RPR), 1959, 4, № 1, 95—113 (франц.)

Через $E$ обозначается действительное пространство Банаха, $V \supset E$ — некоторое подпространство, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — линейные функционалы на $V$; $c_1, \ldots, c_m$ — действительные числа. Элемент $v_0 \in V$ называется интерполятивным элементом наилучшего приближения для $x \in E$, если $\| x - v_0 \| = \inf \| x - v \|$, $v \in M$, $M = \{v \in V;\ \varphi_i(v) = c_i;\ i = 1, \ldots, m\}$. Функционалы $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ предполагаются линейно независимыми. Рассматриваются проблемы существования, характеризации и единственности интерполятивного элемента наилучшего приближения. В качестве примера приведем теорему 3. 1: Чтобы $v_0 \in M$ был интерполятивным элементом наилучшего приближения для $x \in E \setminus M$, необходимо и достаточно, чтобы существовал линейный функционал $f \in E^*$ такой, что $\| f \| = 1$, $f(v - v_0) = 0$ для любого $v \in M$ и $f(v_0 - x) = \| v_0 - x \|$. Приведём также теорему 4. 1: Чтобы для любого $x \in E$ существовало не более одного интерполятивного элемента наилучшего приближения, необходимо и достаточно, чтобы нельзя было найти линейного функционала $f \in E^*$ и элементов $v_0 \neq v_1$, $v_0, v_1 \in M$ таких, что $\| f \| = 1$, $f(v - v_0) = 0$ для любого $v \in M$, и чтобы $\{x;\ f(v_0 - x) = \| v_0 - x \| = \| v_1 - x \|\} \neq \emptyset$. Подобным же образом переносятся на рассматриваемый случай и другие результаты работ автора (РЖМат, 1957, 4173; 1958, 3081, 7925).

В. Н. Никольский

**4276. Двусторонняя оценка решения линейного функционального уравнения. Слугин С. Н.,** Докл. АН СССР, 1959, **127**, № 1, 34—36

Строятся приближенные решения с избытком и с недостатком линейного уравнения в линейном полуупорядоченном пространстве $X$ (терминологию см. Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.—Л., 1950). Пусть $X'$ — линейное полуупорядоченное подпространство пространства $X$ такое, что для любого $x \in X$ найдутся $a, b \in X'$, удовлетворяющие условию $a \leqslant x \leqslant b$ в $X$; $\overline{X}$ — линейное полуупорядоченное пространство, изоморфное пространству $X'$, $\varphi$ — операция, осуществляющая этот изоморфизм $\varphi^{\overline{X}} = X'$, $\varphi^{-1}$ — обратная к $\varphi$ операция; $H, H', H''$ — регулярные операторы класса $H_0^0$, $H$ действует в $X$, $H'$, $H''$ отображают $X$ в $X'$ и $0 \leqslant H'x \leqslant H^+x$, $0 \leqslant H''x \leqslant H^{-1}x$ $(x > 0, x \in Y$, где $Y = X$, либо $Y = X')$; $\Gamma', \Gamma''$ — операторы, порождаемые на $X'$ операторами $H', H''$; $A = \Gamma' + \Gamma''$, $B = \Gamma' - \Gamma''$. Пусть $\Gamma$ — оператор, действующий в $X'$. Оператор $\overline{\Gamma}$, действующий в $\overline{X}$, задается равенством $\overline{\Gamma}\overline{x} = \varphi^{-1}\Gamma x'$, $x' = \varphi x$. Утверждается, что $\overline{A}$, $\overline{B}$ — регулярные операторы класса $H_0^0$ на $\overline{X}$, $\overline{A}$ положителен. Рассматривается уравнение

$$x - Hx = y \qquad (1)$$

Пусть $\overline{y}, \underline{y}, z$ — элементы из $\overline{X}$, удовлетворяющие условиям $\varphi\underline{y} \leqslant y \leqslant \varphi\overline{y}$, $\varphi z \geqslant 2(|H| + \alpha A)x_1$, где $x_1 \in X'$ — оценка по модулю решения $x^*$ уравнения (1): $x_1 \geqslant |x^*|$, $\alpha = 1$, если $Y = X'$, $\alpha = -1$, если $Y = X$. Основное утверждение: всегда возможно выбрать $A$ так, чтобы $(J - \overline{A})^{-1} > 0$ $(J\overline{x} = \overline{x},\ \overline{x} \in \overline{X})$ и определить элементы $\underline{x}, \overline{x}$ системой уравнений $(J - \overline{A})(\overline{x} - \underline{x}) = \overline{y} - \underline{y} + z$, $(J - \overline{B})(\overline{x} + \underline{x}) = \overline{y} + \underline{y}$. Тогда $\varphi\underline{x} \leqslant x^* \leqslant \varphi\overline{x}$ в $X$. Указываются примеры приложения этого утверждения к некоторым алгебраическим системам и интегральным уравнениям. Доказательства не приводятся. Д. Ф. Харазов

**4277. Теоремы Хана-Банаха и полные векторные структуры. Силверман, Янь Ди** (The Hahn-Banach theorem and the least upper bound property. Silverman R. J., Yen Ti), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **90**, № 3, 523—526 (англ.)

Как известно, полная векторная структура $V$ обладает свойством НВЕР (Hahn — Banach extension property; см. РЖМат, 1957, 4978), которое состоит в том, что каковы бы ни были нормированное пространство $Y$, его линейное подмножество $X$, линейный оператор $f$, отображающий $X$ в $V$ и положительный полуаддитивный оператор $p$, отображающий $Y$ в $V$, связанный с $f$ соотношением: $f(x) \leqslant p(x)$ $(x \in X)$, существует линейный оператор $F$ из $Y$ в $V$, совпадающий с $f$ на $X$ и удовлетворяющий условию: $F(x) \leqslant p(x)$ $(x \in Y)$. Если конус $C$ положительных элементов частично упорядоченного векторного пространства $V$ линейно замкнут, т. е. если пересечение $C$ с любой прямой есть замкнутый отрезок (возможно, пустой), то справедливо и обратное: при наличии свойства НВЕР $V$ оказывается полной структурой. На простом примере показывается, что требование линейной замкнутости конуса $C$ опустить нельзя. Г. П. Акилов

**4278. Геометрическое построение $L$-пространств. Брауншвейгер** (A geometric construction of $L$-spaces. Braunschweiger Chris C.), Duke Math. J., 1956, **23**, № 2, 271—280 (англ.)

Дополняются результаты, полученные Фуллертоном (Fullerton R. E., Fundam.-Math., 1951, **38**, 127—136) и Какутани (Kakutani S., Ann. Math., 1941, **42**, 523 — 537). Рассматриваются пространства, одновременно нормированные и частично упорядоченные, приводится определение абстрактного $L$-пространства, данное в упомянутой выше работе С. Какутани (РЖМат, 1955, 5161). Основным результатом статьи является теорема:

Для того чтобы пространство Банаха $X$ введением новой нормы могло быть тождественно преобразовано в гомеоморфное ему $L$-пространство, необходимо и достаточно, чтобы: 1) в $X$ существовали $C$-конус $C$ и замкнутая гиперплоскость $H$ такая, что $H \cap C$ есть непустое ограниченное множество, не содержащее $\theta$; 2) существовала такая постоянная $k > 0$, что для любого $x \in X$, $\| |x| \| \leqslant k \| x \|$ ($C$-конус — это миниэдральный воспроизводящий конус, определение см. в работе М. Г. Крейна и М. А. Рутмана, Успехи матем. наук, 1948, **3**, № 1 (23), стр. 19; $\theta$ — нулевой элемент пространства $X$). При доказательстве этой теоремы используется упомянутое в заглавии геометрическое построение, называемое в работе $L$-построением. Пусть $X$ — вещественное линейное пространство и $F$ — выпуклое подмножество $X$, содержащее более чем одну точку. $Y(F)$ — подмножество $X$, определяемое следующим образом: $Y(F) = \{aS : a \geqslant 0,\ S = <F \cup (-F)>\}$ ($<F \cup (-F)>$ — выпуклая оболочка $F \cup (-F)$). Множество $F$ называют базовым множеством $Y(F)$. Пусть $K = \{aF : a \geqslant 0\}$ и для $x, y \in Y(F)$ определено $x \geqslant y$ тогда и только тогда, если $x - y \in K$. Пусть $p(x) = \inf\{a : (1/a)\, x \in S, a > 0\}$ — псевдонорма в $Y(F)$, в этом случае пишут $Y(F, p)$. Эта общая геометрическая схема построения $Y(F, p)$ через базовое множество $F$ и с отношением $x \geqslant y$, определенным в $Y(F, p)$ посредством $K$, называется $L$-построением. Очевидно, что $Y(F, p)$ есть псевдонормированное линейное пространство. $L$-построение используется не только для доказательства упомянутой выше теоремы, но и для доказательства некоторых других важных результатов. Автор показал, что если $X$ — линейное нормированное пространство, содержащее $C$-конус $C$ и замкнутую гиперплоскость $H$ такую, что $C = \{ay : a \geqslant 0,\ y \in H \setminus C\}$, а $p'(x) = p(x_+) + p(x_-)$, то $L$-построение, использующее $F = H_1 \cap C$ как базовое множество, преобразует $X$ в линейное нормированное пространство типа $L$ (*NLSTL*)

$Y(F, p')$ с единичной сферой $S$. (*NLSTL* — это линейная нормированная структура, в которой норма аддитивна для положительных слагаемых и из $x \wedge y = 0$ следует $\|x+y\| = \|x-y\|$). Построенные пространства $Y(F, p)$ и $Y(F, p')$ не обязательно $L$-пространства; канторово пополнение этих пространств дает уже $L$-пространства. Далее $L$-построение используется в конкретных пространствах $L^p$ и $c_0$. В заключение доказывается, что положительный конус в любом бесконечномерном $L$-пространстве имеет пустую внутренность.

Г. И. Домрачёва

**4279. Геометрическое построение $M$-пространства, сопряжённого к $L$-пространству.** **Брауншвейгер** (A geometric construction of the $M$-space conjugate to an $L$-space. Braunschweiger Chris C.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, 10, № 1, 77—82 (англ.)

Статья примыкает к предыдущей работе автора (реф. 4278). Приводится определение $M$-пространства, введенное С. Какутани (Kakutani S., Ann. Math., 1941, 42, 994 — 1024), $M$-пространством называется $KB$-пространство (Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.— Л., Гостехиздат, 1950) с нормой, удовлетворяющей условию $\|x \vee y\| = \max(\|x\|, \|y\|)$ для положительных элементов. Элемент $e$ линейной структуры $X$ называется $F$-единицей, если $e > 0$ и $e \wedge x > 0$ для любого $x > 0$ ($0$ — нулевой элемент пространства $X$). Единичным элементом банаховой структуры называется элемент $e \geqslant 0$ такой, что $\|e\| = 1$ и $x \leqslant e$ для любого $x \in X$ с $\|x\| \leqslant 1$. Доказывается следующая теорема:

Пусть $X$ — $L$-пространство с $F$-единицей $e$, частичным упорядочением $x \geqslant y$, положительным конусом $C$, нормой $\|x\|$ и единичной сферой $U = \{x : \|x\| \leqslant 1, x \in X\}$. Положим $S = (C - e) \cap (e - C)$, $p(x) = \inf\{a : x/a \subset Sa, > 0\}$ и $Y = \{aS : a \geqslant 0\}$. Тогда $Y$ есть $M$-пространство с единичным элементом $e$, частичным упорядочением $x \geqslant y$, положительным конусом $C$, $Y$, нормой $p(x)$ и единичной сферой $S = \{x : p(x) \leqslant 1, x \in Y\} \subset U$. Кроме того, $Y$ структурно изоморфно и изометрично пространству $L^\infty(\Omega, m)$, сопряженному к конкретному представлению $L(\Omega, m)$ пространства $X$. При доказательстве теоремы используется конкретное представление $L$-пространств, при этом автор ссылается на результаты Какутани (Kakutani S., Ann. Math., 1941, 42, 523 — 537).

Г. И. Домрачёва

**4280. О полуупорядоченных кольцах.** **Соболев В. И.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 59—60

**4281. Задачи и проблемы.** **Маржик** (Úlohy a problémy. (Úloha № 1). Mařík Jan), Časop. pěstov. mat., 1959, 84, № 1, 105 (чешск.)

**4282. О композиции параметров группы вращения.** **Федоров Ф. И.**, Докл. АН БССР, 1958, 2, № 10, 408—412

Каждому повороту трехмерного пространства на угол $\varphi$ автор ставит в соответствие вектор $\mathbf{n}$ длиной $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, направленный вдоль оси вращения. Вектор $(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$, отвечающий произведению вращений $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$, выражается простой формулой

$$(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \frac{\mathbf{n} + \mathbf{n}' + [\mathbf{n}, \mathbf{n}']}{1 - [\mathbf{n}, \mathbf{n}']}.$$

Инвариантный интеграл при такой параметризации имеет следующий вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{n}) \frac{d\mathbf{n}}{(1+\mathbf{n}^2)^2}$$

Г. Я. Любарский

**4283. Теорема Челлена—Лемана в пространстве с индефинитной метрикой.** **Парасюк О. С., Петрина Д. Я., Тацуняк П. И.**, Укр. матем. ж., 1958, 10, № 3, 344—346

В пространстве Понтрягина $H_k$ с индефинитной метрикой, в котором скалярное произведение двух векторов $x = \{x_j\}$, $y = \{y_j\}$ $\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty, \sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^2 < \infty\right)$ задается в виде $(x, y) = -x_1\bar{y}_1 - x_2\bar{y}_2 - \ldots - x_k\bar{y}_k + x_{k+1}\bar{y}_{k+1} + \ldots$, рассматривается квантовомеханическое уравнение движения в представлении Гейзенберга $id\xi/dt = [\xi(t), A]$, где $[\xi(t), A]$ — коммутатор операторов $\xi(t)$ и $A$, причем оператор $A$ самосопряженный (определение и свойства таких операторов см. РЖМат, 1958, 2185). Через $x_0$ обозначен собственный вектор оператора $A$ с положительной нормой и наименьшим действительным собственным числом, нормированным на нуль. Вводятся функции $\Delta^{(+)}(t)$ и $\Delta^{(-)}(t)$ равенствами $i\Delta^{(+)}(t_1 - t_2) = (x_0, \xi(t_1)\xi(t_2)x_0)$; $-i\Delta^{(-)}(t_1 - t_2) = (x_0, \xi(t_2)\xi(t_1)x_0)$. Функции эти являются эрмитово — индефинитными (РЖМат, 1959, 11220) с $k$ отрицательными квадратами.

Ограничиваясь случаем $k = 1$, авторы, ссылаясь на теоремы М. Г. Крейна и референта (РЖМат, 1956, 3923) записывают для $\Delta^{(+)}$ интегральные представления двух видов:

1) $i\Delta^{(+)}(t) = e^{i\varphi t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\lambda} - 1 - it\lambda}{\lambda^2} d\sigma(\lambda) - a - ibt - ct^2\right]$, где $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $\operatorname{Im} a = \operatorname{Im} b = 0$, $c \geqslant 0$, а $\sigma(\lambda)$ — неубывающая функция, непрерывная при $\lambda = 0$;

2) $i\Delta^{(+)}(t) = e^{i\varphi t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} d\tau(\lambda) - \rho \operatorname{ch}(t\eta + i\alpha)\right]$, где $-\pi \leqslant \alpha$, $\varphi \leqslant \pi$, $\rho > 0$, $\eta > 0$, а $\tau(\lambda)$ — неубывающая функция. Утверждается, что аналогичные представления имеют место для функций $-\Delta^{(-)}(t)$ и $\Delta_F(t)$, определенной соотношением $(x_0, T\xi(t_1)\xi(t_2)x_0) = \frac{1}{2}\Delta_F(t_1 - t_2)$, где $T$ — символ хронологического произведения. Затем с помощью формул вида 1) и 2) для $\Delta_F(t)$ строится преобразование Фурье $\tilde{\Delta}_F(\omega)$, причем в случае 2) — с применением аппарата обобщенных функций (РЖМат, 1955, 3291). Без вычислений приводятся соответствующие формулы ($\varepsilon > 0$):

1) $$\tilde{\Delta}_F(\omega) = 2i\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\varphi - \omega + \lambda + i\varepsilon} + \frac{1}{\varphi + \omega + \lambda + i\varepsilon} - \left(1 - \lambda\frac{d}{d\omega}\right)\left(\frac{1}{\varphi - \omega + i\varepsilon} + \frac{1}{\varphi + \omega + i\varepsilon}\right)\right]\frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^2} - \left(a - b\frac{d}{d\omega} - c\frac{d^2}{d\omega^2}\right) \times \left(\frac{1}{\varphi - \omega + i\varepsilon} + \frac{1}{\varphi + \omega + i\varepsilon}\right)\right\};$$

2) $$\tilde{\Delta}_F(\omega) = 2i\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\varphi - \omega + \lambda + i\varepsilon} + \frac{1}{\varphi + \omega + \lambda + i\varepsilon}\right)d\tau(\lambda) - i\rho e^{-i\alpha}\left(\frac{1}{\varphi - \omega + i\eta} + \frac{1}{\varphi + \omega + i\eta}\right) - 2\pi\rho e^{-i\alpha}[\delta_+(\varphi - \omega - i\eta) + \delta_+(\varphi + \omega - i\eta)],$$

из которых делается вывод, что точки дискретного спектра оператора $A$ соответствуют полюсам функции $\tilde{\Delta}_F(\omega)$.

В заключение делается несколько замечаний о физическом смысле полученных формул и утверждается, что последние легко обобщить на случай $k > 1$.

Примечания референта. 1) Произвольный самосопряженный оператор $A$ в пространстве $H_k$ может вообще не иметь собственных векторов с положительной нормой, а в случае их существования может не существовать наименьшее действительное собственное число, которому отвечал бы такой вектор $x_0$. Пользуясь такими понятиями, авторы, по-видимому, опираются на физические соображения, гарантирующие существование упомянутых объектов, не оговаривая, однако, нигде этого обстоятельства. 2) Без всякого обоснования авторы перенесли формулы М. Г. Крейна и референта, полученные для дискретного случая эрмитово-индефинитных последовательностей (РЖМат, 1956, 3923) на случай эрмитово-индефинитных непрерывных функций. Это привело, в частности, к тому, что формула 1) в том виде, в каком она приведена авторами, вообще говоря, не верна из-за расходимости содержащегося в ней интеграла, а это, в свою очередь, ставит под сомнение фор улу 1′). И. С. Иохвидов

**4284. О вторичном квантовании для случая симметричной статистики. Ульман** (Zur zweiten Quantelung bei symmetrischer Statistik. Uhlmann Armin), Wiss. Z. Karl — Marx — Univ. Leipzig. Math.-naturwiss. Reihe, 1957—1958, 7, № 2-3, 115—122 (нем.)

Излагается метод вторичного квантования для случая статистики Бозе—Эйнштейна, эквивалентный методу функционалов Фока (Phys. Z. Sowjetunion, 1934, 6, 425). Волновая функция определяется как аналитический функционал $\Psi[u]$, заданный на гильбертовом пространстве одночастичных волновых функций, оператор же числа частиц — как инфинитезимальный оператор группы преобразований $\sigma(s)\,\Psi[u] = \Psi[e^s u]$ ($s$ — вещественный параметр). Ю. А. Яппа

**4285. О теореме Блоха. Энгельман** (Über ein Theorem von Bloch. Engelmann Folker), Z. Phys., 1959, 155, № 3, 275—280 (нем., рез. англ.)

Показано, что необходимым и достаточным условием для выполнения теоремы Блоха об отсутствии тока в состоянии квантово-механической системы, обладающим наименьшей свободной энергией, является инвариантность (нерелятивистского) гамильтониана системы относительно отражения во времени. Следствием является возможность возникновения токов для систем, взаимодействующих с внешними магнитными полями. В применении к теории сверхпроводимости автор приходит к выводу о том, что теорема Блоха не противоречит гипотезе о спонтанных токах. Ю. А. Яппа

**4286. О спинорном преобразовании. Авано, Асано** (On the spinor transformation. Awano Tamotsu, Asano Akira), Ибараки дайгаку бунри гакубу киё (сидзэн кагаку), Bull. Fac. Liberal Arts Ibaraki Univ. (Natur. Sci.), 1958, № 8, 25—34 (англ.)

Краткий обзор известных свойств спиноров в псевдоевклидовом пространстве Минковского применительно к уравнению Дирака. Ю. А. Яппа

**4287. О спинорном волновом уравнении, содержащем оператор отражения. Эрикссон** (On spinor wave equations containing reflection operators. Eriksson H. A. S.), Arkiv fys., 1959, 15, № 1, 31—32 (англ.)

Приведен пример системы двух уравнений первого порядка, которые отличаются от уравнения Дирака формально введенным оператором инверсии при члене, содержащем массу электрона. Показано, что спектр энергии в случае кулоновского потенциала имеет тот же вид, что и в обычной релятивистской теории атома водорода. А. В. Тулуб

**4288. Об эргодических теоремах. Рыль-Нардзевский (в подл. Рыль-Нарджевский),** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, 4. М., АН СССР, 1959, 166

**4289 К. Введение в функциональный анализ. Тейлор** (Introduction to functional analysis. Taylor Angus E. New York, John Wiley and Sons, Inc.; London, Chapman and Hall, Ltd, 1958, xvi, 423 pp.) (англ.)

Книга состоит из введения и семи глав, из которых первые три посвящены в основном аксиоматике и свойствам различных абстрактных пространств, гл. IV — общим теоремам о линейных операторах, гл. V и VI — спектральному анализу операторов в линейном нормированном и гильбертовом пространствах и, наконец, гл. VII — общей теории меры и интегрирования в абстрактных пространствах.

Содержание книги и стиль изложения полностью соответствуют ее названию. Не перегружая материал освещением специальных вопросов и не развивая приложений, автор дает ясное и точное изложение важнейших понятий и теорем современного функционального анализа. Помимо значительного количества иллюстративных примеров в основном тексте, петитом дано более 270 задач, имеющих преимущественно характер элементарных, но полезных упражнений. И. М. Глазман

**4290 К. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я.,** М., Физматгиз, 1958, 368 стр., илл., 13 р. 70 к.

Книга состоит из двух частей. Первая часть относится к группе вращений, в ее основу положена статья И. М. Гельфанда и З. Я. Шапиро (Успехи матем. наук, 1952, 7, № 1, 3—117). Вторая часть посвящена собственной, полной и общей группам Лоренца. В первых семи параграфах, помимо параметризации группы вращений, введения инвариантного интегрирования и нескольких основных понятий теории представлений содержится определение всех неприводимых представлений группы вращений. Определение производится двумя различными способами: 1) на основе инфинитезимального метода путем разложения пространства квадратично-интегрируемых на сфере функций и 2) путем построения спинорного представления веса $1/2$ и изучения с его помощью спиноров высших рангов. На первом пути естественно возникают сферические и обобщенные сферические функции и легко получаются их свойства (рекуррентные соотношения, формула сложения, дифференциальное уравнение, полнота, явные выражения для этих функций). Второй путь знакомит читателя со спинорной и тензорной алгебрами и с выделением неприводимых подпространств из пространств спиноров и тензоров. Здесь, как и во всей книге, подробно разбирается много конкретных задач, например, задача о разложении пространства тензоров третьего ранга. § 8 посвящен важному для приложений вопросу о разложении на неприводимые подпространства векторных полей и полей величин, преобразующихся при вращениях по произвольному представлению. Разложение удается получить в явном виде благодаря использованию обобщенных сферических функций. В качестве интересного приложения находится общее стационарное решение уравнений Максвелла. В § 9 находится общий вид инвариантных относительно вращений линейных уравнений. Впервые достаточно полно рассмотрен случай, когда коэффициент при волновой функции равен нулю. С помощью обобщенных сферических функций находится явный вид общего решения инвариантной системы уравнений. В частности, подробно решается уравнение Дирака без времени. В § 10 производится фактическое разложение на неприводимые представления произведения двух неприводимых представлений. Изучаются свойства возникающих при этом коэффициентов Клебша — Гордона, в частности, вычисляются их явные выражения, когда одно из представлений имеет вес 1 или $1/2$. Вводятся коэффициенты Рака. В первой главе второй части (§ 1—6) дается описание собственной, полной и общей

групп Лоренца, обобщаются введенные ранее понятия на случай бесконечномерных представлений, и с помощью инфинитезимального метода производится классификация всех представлений группы Лоренца. Здесь же строятся спинорные представления. Симметрическое спинорное представление реализуется на некотором пространстве однородных полиномов, а затем это построение обобщается естественным образом на бесконечномерные представления. С помощью полученных представлений находятся представления общей и полной групп Лоренца. Вторая глава начинается с задачи о перечислении всех релятивистски инвариантных линейных уравнений, которым можно сопоставить функцию Лагранжа. Выясняется, как преобразуются величины, квадратичные относительно волновой функции и ее производных. В качестве примеров рассматриваются уравнение Дирака, скалярное и векторное уравнения Даффина, уравнения Максвелла, Паули — Фирца и др. В § 10 с помощью плоских волн вводится понятие вектора энергии-импульса и получается дисперсионное соотношение. Дается алгебраическое определение массы покоя, спина и его проекции, поляризации. Вычисляется спин и масса покоя в случае рассмотренных ранее инвариантных уравнений. В последнем параграфе решается вопрос о виде уравнений, отвечающих частицам с определенным знаком заряда и частицам с определенным знаком энергии, и доказывается таким образом известная теорема Паули. Выясняется, в какой мере ее можно распространить на бесконечномерные уравнения. В дополнении рассматриваются представления группы ортогональных матриц и невырожденных матриц и связь коэффициентов Клебша — Гордона с полиномами Якоби. Книга предназначена для физиков и математиков. Она предполагает у читателя знание основ линейной алгебры и написана доступным языком. Г. Я. Любарский

**4291 К. Элементарная теория обобщенных функций. I. Микусинский Я., Сикорский Р.** Перев. с англ. М., Изд-во ин. лит., 1959, 78 стр., 2 р. 45 к.

Цель реферируемой брошюры — изложить теорию обобщенных функций в весьма доступной форме без привлечения методов функционального анализа. Речь идет об обобщенных функциях одного переменного и всюду, кроме последнего параграфа, об обобщенных функциях конечного порядка. Авторы придерживаются следующего определения обобщенной функции. Рассмотрим последовательность $f_n(x)$ непрерывных функций, определенных в интервале $a<x<b$. Такая последовательность называется фундаментальной, если существует такое натуральное число $k$ и такая последовательность $F_n(x)$ непрерывных функций, сходящаяся почти равномерно на $a<x<b$ (т. е. равномерно на каждом замкнутом внутреннем к $a<x<b$ отрезке), что $F_n^{(k)}(x)=f_n(x)$. Естественным образом между фундаментальными в указанном смысле последовательностями вводится понятие эквивалентности, и класс эквивалентных фундаментальных последовательностей считается определяющим обобщенную функцию, за которой сохраняется обозначение $f(x)$. Так, например, $\delta$-функцию Дирака на всей прямой представляет, скажем, последовательность

$$f_n(x)=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\,e^{-\frac{nx^2}{2}}.$$

В классе введенных так обобщенных функций оказывается возможным рассмотрение обычных операций алгебры и анализа: сложение, умножение на число и на бесконечно дифференцируемую функцию, дифференцирование и интегрирование в обобщенном смысле, замена переменных и т. д.

Кроме того, оказывается возможным и выполнение операций, вообще говоря, не выполнимых в рамках обычного анализа, например, почленное дифференцирование любого сходящегося ряда. Авторы показывают также, что каждая обобщенная функция есть предел последовательности обычных функций (например, многочленов) и, с другой стороны, производная достаточно высокого порядка от непрерывной функции в обобщенном смысле. Для периодических обобщенных функций рассматривается разложение в ряд Фурье.

Особенный интерес представляют §§ 16—19.

Здесь рассматривается вопрос о значениях обобщенной функции в точке. Основной при этом является следующая теорема:

Если существует предел $\lim_{\alpha\to 0} f(\alpha x+\beta)$, то этот предел постоянная функция. Значение этой функции, по определению, и есть значение функции $f(x)$ в точке $\beta$ и обозначается $f(\beta)$. Так, функция Дирака имеет значение 0 во всех точках $x\neq 0$, а в точке $x=0$ не имеет никакого числового значения. Доказано несколько теорем о значениях обобщенных функций в точке, например, такая: Если $f(x)$ имеет в точке $x_0$ обычную производную, то она равна значению обобщенной производной в этой точке (обратная теорема не верна).

Е. А. Горин

**4292 Д. Аналитические функции многих комплексных переменных и представления вещественных простых групп Ли. Граев М. И.** Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1959

**4293 Д. Производящие операторы аналитических полугрупп и связанные с ними дифференциальные уравнения в пространствах Банаха. Соломяк М. З.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1959

**4294 Д. Некоторые вопросы теории полуупорядоченных пространств. Векслер А. И.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ленингр. гос. пед. ин-т им. А. И. Герцена, Л., 1959

---

См. также: 3649, 3908, 3912, 3971, 3972, 4002, 4008, 4209

## ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редакторы *Н. В. Смирнов, Н. Н. Воробьев*

**4295. Замечания к основам теории вероятностей. Яношши** (Megjegyzések a valószínűségszámítás alapjairól. Jánossy Lajos), Magyar fiz. folyóirat., 1957, 5, № 6, 495—509 (венг.)

Цель автора — построить теорию вероятностей, используя только количественное понятие вероятности. По мнению автора, его условия с точки зрения физики более правдоподобны, чем условия Колмогорова. Система автора напоминает систему Бернштейна, построенную в 1917 г.

Пусть $A$ и $B$ — независимые события. Автор предполагает, что существуют функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ такие, что $P(A+B)=f(P(A), P(B))$, $P(AB)=g(P(A), P(B))$. Налагая некоторые правдоподобные условия на $f$, $g$ и их связь, автор показывает, что $f(x, y)=x+y$, $g(x, y)=xy$. В статье есть неточности, например при перечислении

аксиом Колмогорова неправильно утверждается, что вероятность определяется для всех подмножеств вероятностного пространства; σ-аддитивность не упоминается. Далее, рассматривая функциональные уравнения, автор только проверяет некоторые решения, не заботясь о том, существуют ли другие. P. Révérs

**4296. Вероятность, что корни действительного квадратного уравнения лежат внутри или на окружности единичного круга в комплексной плоскости. Андрушков** (The probability that the roots of a real quadratic equation lie inside or on the circumference of the unit circle in the complex plane. Andrushkiw Joseph W.), Math. Mag., 1959, **32**, № 3, 123—128 (англ.)

Имеется уравнение $xz^2 + wz + y = 0$. Полученные результаты дают вероятности того, что корни уравнения будут действительными и комплексными. С помощью геометрических методов решаются следующие вопросы: 1. Найти вероятность того, что корни действительного квадратного уравнения действительны и лежат в интервале $(a, b)$. 2. Найти вероятность того, что корни этого уравнения комплексные и их действительные части лежат в интервале $(a, b)$. В. И. Бабкин

**4297. Характеризация некоторых вероятностных распределений. Фиш** (Characterization of some probability distributions. Fisz M.), Skand. aktuarietidskr., 1958 (1959), № 1-2, 65—67 (англ.)

Рассматривается распределение вероятностей с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{m+1}{b^{m+1} - a^{m+1}}\, x^m & (a \leqslant x \leqslant b), \\ 0 & (x < a, x > b), \end{cases} \qquad (1)$$

$0 \leqslant a < b$, $m \geqslant 0$ и не обязательно целое. Пусть $x_1, x_2$ — две независимые и одинаково распределенные случайные величины, $F(x)$ — их функция распределения; пусть $y_1, y_2$ обозначают эти же величины, но расположенные в порядке возрастания; наконец, пусть

$$z_1 = \frac{y_1}{y_2}, \quad z_2 = y_2.$$

Доказывается следующая теорема:

Если $F(x)$ — абсолютно непрерывная функция распределения и $F(0) = 0$, то $f(x)$, определенная по формуле (1) с $a = 0$, является функцией плотности для $F(x)$ тогда и только тогда, когда случайные величины $z_1$ и $z_2$ независимы. В. М. Волков

**4298. Среднее отклонение распределения Пуассона. Кроу** (The mean deviation of the Poisson distribution. Crow Edwin L.), Biometrika, 1958, **45**, № 3-4, 556—559 (англ.)

Показывается, что среднее абсолютное отклонение от среднего значения $m$ распределения Пуассона имеет вид:

$$MD = \sum_{r=0}^{\infty} |r - m|\, e^{-m} \frac{m^r}{r!} = 2e^{-m} \frac{m^{[m]+1}}{[m]!} = 2mY,$$

где $[m]$ — целая часть от $m$, а $Y$ — максимальная вероятность распределения Пуассона. Изучается отношение среднего отклонения к стандартному $R(m) = \dfrac{MD}{\sigma} = 2m^{1/2}Y$ для пуассоновского распределения, полученные результаты сравниваются с соответствующими результатами для биномиального и нормального распределений.

Г. П. Башарин

**4299. Гипергеометрическое разложение для неполных моментов двумерного нормального распределения. Камат** (Hypergeometric expansions for incomplete moments of the bivariate normal distribution. Kamat A. R.), Санкия, Indian J. Statist., 1958, **20**, №3-4, 317—320 (англ.)

Приводятся формулы в виде гипергеометрического ряда относительно коэффициента корреляции для неполных моментов двумерного нормального распределения. Р. Х. Дивеев

**4300. Замечание о семействе распределений Перкса. Талакко** (A note about a family of Perks' distribution. Talacko Joseph), Санкия, Indian J. Statist., 1958, **20**, № 3-4, 323—328 (англ.)

Изучаются некоторые свойства частного случая распределения Перкса, с плотностью

$$\varphi(x) = \frac{c}{e^x + k + e^{-x}},$$

где $x = (\tau - \mu)/\alpha$ — стандартизованная переменная; $\mu$ — средняя и $\alpha$ — стандарт этого распределения; $k > -2$ — действительный параметр. Р. Х. Дивеев

**4301. Одна экстремальная задача теории вероятностей. Прохоров Ю. В.**, Теория вероятностей и ее применения, 1959, **4**, № 2, 211—214 (рез. англ.)

Пусть $n$ — натуральное число, $c$ и $\sigma^2$ — положительные числа, $K(n, c, \sigma^2)$ — класс случайных величин $\xi$, которые можно представить в виде суммы $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ независимых случайных величин, удовлетворяющих условиям: $E\xi_k = 0$, $|\xi_k| \leqslant c$ $(k = 1, 2, \ldots n)$, $\sum_{k=1}^{n} D\xi_k = \sigma^2$.

Теорема 1. Для любой $\xi \in K(n, c, \sigma^2)$

$$P\{\xi > x\} \leqslant \exp\left\{-\frac{x}{2c} \operatorname{Arsh} \frac{xc}{2\sigma^2}\right\}.$$

В следующей теореме рассматривается сумма $\hat{\xi}$ независимых случайных величин $\xi_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ таких, что

$$P\{\xi_k = 0\} = 1 - \frac{\sigma^2}{nc^2}, \quad P\{\xi_k = \pm c\} = \frac{\sigma^2}{2nc^2}.$$

Теорема 2. При $2x \geqslant c$ или $\sigma^2 \geqslant 2c^2$

$$P\{\hat{\xi} \geqslant x\} \geqslant \frac{1}{160} \exp\left\{-16 \frac{x}{c} \operatorname{Arsh}\left(16 \frac{xc}{\sigma^2}\right)\right\} - \frac{1}{2} e^{-n\Gamma},$$

где $\Gamma = \ln 2 - \dfrac{1}{2}$. В. В. Петров

**4302. О точной оценке для локальной теоремы. Сираждинов С. Х. Теория вероятности и ее применения.** 1959, № 2, 229—233 (рез. англ.)

Рассматривается последовательность взаимно независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, имеющих плотность распределения $p(x)$ и конечный момент третьего порядка $\alpha_3 = E\xi_i^3$. Предполагается, что $E\xi_i = 0$ и $E\xi_i^2 = 1$. Обозначения: $p_n(x)$ — плотность распределения случайной величины $(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)/\sqrt{n}$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad C_n^{(p)} = \int_{-\infty}^{\infty} |p_n(x) - \varphi(x)|^p dx.$$

Доказано, что если при некотором $n_0 \geqslant 1$ функция $p_{n_0}(x)$ интегрируема в степени $\alpha$ $(1 < \alpha \leqslant 2)$, то для любого $p \geqslant 1$

$$C_n^{(p)} = \lambda_p \left(\frac{|\alpha_3|}{\sqrt{n}}\right)^p + o\left(\frac{1}{n^{p/2}}\right),$$

где

$$\lambda_p = \frac{1}{6^p (\sqrt{2\pi})^p} \int_{-\infty}^{\infty} | 3x - x^3 |^p e^{-p\frac{x^2}{2}} dx.$$

В. В. Петров

**4303. О преобразованиях случайных величин. Большев Л. Н.**, Теория вероятностей и ее применения, 1959, 4, № 2, 136—149 (рез. англ.)

Пусть $F(x)$ — функция распределения нормированной суммы $\eta_n$ независимых непрерывно и одинаково распределенных $n$ случайных величин, обладающих конечным моментом порядка $r \geqslant 3$; $\Phi(x)$ — нормированная нормальная функция распределения. Приводятся асимптотические формулы для функций $y(x) = \Phi^{-1}[F(x)]$, $x(y) = F^{-1}[\Phi(y)]$, $z(w) = \Phi[F^{-1}(w)]$, $w(z) = F[\Phi^{-1}(z)]$. В качестве примера применения этих формул указана таблица квантилей $\chi^2$-распределения с числом степеней свободы $k \geqslant 80$. Доказана следующая теорема: Пусть $U_r$ — множество функций $u(x, v)$, каждая из которых определена в полосе $|x| < \infty$, $0 \leqslant v \leqslant V$ и удовлетворяет условиям: 1) $\partial^{r-2}u/\partial v^{r-2}$ существует и непрерывна по $v$ на оси $Ox$; 2) существует положительная частная производная $\partial u/\partial x$ в области $|x| < Cv^{-\frac{r-2}{r-1}}$ $(C>0, r \geqslant 3)$. Если $u(x, v) \in U_r$, то функция распределения $G(z)$ случайной величины $\zeta = u\left(\eta_n, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ удовлетворяет условию

$$G(z) = \Phi(z) + O\left(\frac{1}{n^{\frac{r-2}{2}}}\right)$$

тогда и только тогда, когда для $u(x, v)$ справедлива асимптотическая формула

$$u(x, v) = x + \sum_{m=1}^{r-3} P_{2m-1}(x) v^m + O(v^{r-2}) \quad (v \to 0),$$

где $P_{2m-1}(x)$ — некоторый полином относительно $x$ степени $m+1$. Эта теорема устанавливает связь между асимптотически нормальными преобразованиями и разложением Корниша—Фишера (Cornish E. A., Fisher R. A., Rev. Inst. Internat. Statist., 1937, 4, 307—320). В заключение рассматриваются примеры отыскания с помощью полученной теоремы функционального преобразования с заданными свойствами. Обсуждаются преобразования Вильсона—Хильферти (Wilson E. B., Hilferty M. M., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1931, 17, 684—688) и Бартлетта (РЖМат, 1954, 1736) и некоторые их обобщения. Рассматривается задача преобразования последовательности равномерно распределенных случайных чисел в последовательность нормально распределенных случайных чисел. В. В. Петров

**4304. Об эквидистрибутивности сумм независимых случайных величин. Санкаранараянан** (A note on the equidistribution of sums of independent random variables. Sankaranarayanan G.), J. Indian Math. Soc., 1958 (1959), 22, № 2, 93—98 (англ.)

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x)$. Возможны три типа поведения характеристической функции $\varphi(t) = \int e^{itx} dF(x)$: 1) $\varphi(t) = 1$ только при $t = 0$, 2) $\varphi(t) = 1$ для всех $t$, 3) $\varphi(t) = 1$ для некоторого $t \neq 0$, тогда $\varphi(t) = 1$ лишь в точках $t = 2k\pi/\beta$, $\beta > 0$.

Соответственно определяется среднее значение функции $h(x)$

$$M(h) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} h(x)\, dx, \quad M(h) = h(0),$$

$$M(h) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^{N} h(j\beta).$$

Пусть $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$ — последовательность целых чисел, возрастающая неограниченно,

$$S_1 = \sum_{1}^{p_1} X_k, \quad S_2 = \sum_{p_1+1}^{p_1+p_2} X_k, \ldots, S_j = \sum_{p_{j-1}+1}^{p_{j-1}+p_j} X_k, \ldots$$

Тогда для любой $F(x)$ и любого $t$ с вероятностью 1

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{tS_j} = M(e^{itx}).$$

Класс $H$ функций $h(x)$ таких, что с вероятностью 1

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} h(S_j) = M(h),$$

содержит все равномерно почти периодические функции. Если здесь положить $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1$, то теорема неверна. Если $h(x)$ имеет период $p$ и интегрируема по Риману на $0 \leqslant x \leqslant p$, то с вероятностью 1

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} h(S_j) = \frac{1}{p} \int_0^p h(x)\, dx$$

в предположении, что имеет место либо случай 1), либо случай 3) с $\beta$ несоизмеримым с $p$. В. М. Волков

**4305. Поправка к хи-квадрат распределению. Дарвин** (On corrections to the chi-squared distribution. Darwin J. H.), J. Roy. Statist. Soc., 1958, **B20**, № 2, 387—392 (англ.)

Пусть рассматривается $k$-мерное мультиномиальное распределение и пусть

$$X^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(n_j - Np_j)^2}{Np_j}$$

Обозначим через $F$ распределение $X^2$. Известно, что $\chi^2$ распределение с $k-1$ степенями свободы, которое обозначим через $\Phi$, служит аппроксимацией для $F$ при больших $N$. При конечных $N$ $F$ — дискретное распределение, а $\Phi$ непрерывное и, следовательно, эти распределения не совпадают. Автор находит главный член разложения $F - \Phi$. Особо выделен случай $k = 2$. Для этого случая приводится таблица, показывающая как влияет введение поправки. Б. В. Финкельштейн

**4306. Некоторые элементарные доказательства в теории восстановления с приложением к задачам времени ожидания. Кестен, Рюнненбург** (Some elementary proofs in renewal theory with applications to waiting times. Kesten H., Runnenburg J. Th. Rept. Math. Centrum Amsterdam, Statist. Afd. 1956, № S 203, 16 pp.) (англ.)

Даются элементарные доказательства следующих результатов в теории восстановления: Пусть $x_n$, $n = 1, 2, \ldots$, — независимые положительные нерешетчатые случайные величины с одной и той же функцией распределения $F(x)$.

Пусть $s_k = x_1 + \ldots + x_k$, $a(t) = \max_{s_k < t} s_k$, $b(t) = \min_{s_k > t} s_k$, $\mu_t = Ex_1^t$, $U(t) = \sum P\{s_k < t\}$. Тогда для каждой ограниченной функции $K(t)$, обращающейся в нуль для $t < 0$, не возрастающей для $t \geqslant 0$ и удовлетворяющей условию:

$$\int_0^\infty k(t)\,dt < \infty,$$

$$\int_0^\infty k(t-x)\,dU(x) \longrightarrow \int_0^\infty k(x)\,dx/\mu_1,$$

$$t \to \infty.$$

Если $\mu_1 < \infty$, $b(t) - t$ имеет предельное распределение ($t \to \infty$) с плотностью $(1 - F(\omega))/\mu_1$ ($\omega \geqslant 0$), а $b(t) - a(t)$ имеет предельное распределение ($t \to \infty$) с функцией распределения $\int_0^\omega x\,dF/\mu_1$ ($\omega \geqslant 0$).

Если $\mu_2 < \infty$, $U(t) = (t/\mu_1) + (\mu_2/2\mu_1^2) - 1 + o$ (1) при $t \to \infty$. D. Blackwell

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 2, 156.

**4307. К задаче случайного блуждания на плоскости. Распределение числа шагов. Мерик** (Sur un problème de marche au hasard dans le plan. Distribution du nombre de pas. Méric Jean), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 22, 3111—3113 (франц.)

Рассматривается случайное блуждание в области плоскости, ограниченной линиями $(L_1)$ $ay - bx = f_1(x)$, $(L_2)$ $ay - bx = f_2(x)$, где $a > 0$, $b > 0$ — целые числа, а $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — функции с периодом $a$. Движение начинается из начала координат и происходит единичными шагами параллельно осям $Ox$ или $Oy$ с вероятностями $p$ и $1 - p$ соответственно. Движение прекращается, если произошло пересечение $(L_1)$ или $(L_2)$. В заметке предлагается метод вычисления производящей функции числа шагов. Предложенным методом рассчитаны два примера. В первом за линии $(L_1)$ и $(L_2)$ взяты прямые $y = 0$ и $y = k$. В этом случае число шагов — это число независимых испытаний, проводимых до появления $k$ успехов. Во втором примере $(L_1)$ и $(L_2)$ выбраны с $f_1(x)$ и $f_2(x)$, отличными от 0. В. П. Чистяков

**4308. Некоторые замечания относительно устойчивых процессов. Кац** (Some remarks on stable processes. Kac M.), Publs Inst. statist. Univ. Paris, 1957, **6**, № 4, 303—306 (англ.)

Рассматриваются устойчивые случайные процессы с независимыми приращениями, т. е. такие процессы $x(s)$, что $x(0) = 0$, $M\{e^{i\xi x(s)}\} = e^{-s|\xi|^\alpha}$, $0 < \alpha \leqslant 2$. Процесс $x(s)$ называется „касающимся" прямой $x = a$ (где $a \neq 0$) в момент $s_0$, если $x(s_0 + 0) = a$ или $x(s_0 - 0) = a$. Ставится задача о вычислении вероятности того, что процесс $x(s)$ коснется прямой $x = a$ хоть в одной точке в интервале $0 < s \leqslant t$.

Отмечается, что при $0 < \alpha < 1$ эта вероятность равна нулю в силу известных результатов П. Леви о характере выборочных функций соответствующих случайных процессов. При $\alpha = 1$ (процесс Коши) эта вероятность также равна нулю в силу одного (пока не опубликованного) результата П. Эрдёша. При $\alpha = 2$ (процесс Винера) соответствующая вероятность равна вероятности пересечения прямой $x = a$ процессом $x(s)$ и легко подсчитывается. Для случая же $1 < \alpha < 2$ доказывается следующая формула для преобразования Лапласа искомой вероятности $P(t)$:

$$s\int_0^\infty e^{-st} P(t)\,dt = \frac{K_s(a)}{K_s(0)},$$

$$K_s(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \xi x}{s + |\xi|^\alpha}\,d\xi.$$

В заключение указывается несколько более общая формула, определяющая вероятность того, что процесс $x(s)$ коснется либо прямой $x = a$, либо прямой $x = b$. Далее исследуется асимптотическое поведение этой вероятности при $t \to \infty$ и намечается одно интересное обобщение последнего результата. А. М. Яглом

**4309. Новое в изучении некоторых функций, пригодных для представления скорости турбулентной жидкости. Басс** (Contribution à l'étude de certaines fonctions susceptibles de représenter la vitesse d'un fluide turbulent. Bass J.), J. math. pures et appl., 1958, **37**, № 2, 173—205 (франц.)

Функция $u(t)$, представляющая собой пульсацию скорости жидкости в какой-либо фиксированной точке турбулентного потока, является вещественной беспорядочно колеблющейся функцией. Обычно предполагается, что она обладает следующими свойствами: 1) ее временное среднее значение существует и равно нулю, т. е.

$$\overline{u(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt = 0,$$

2) предел

$$\gamma(h) = \overline{u(t)\,u(t+h)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,u(t+h)\,dt$$

(определяющий корреляционную функцию скорости $u(t)$) существует при любых $h$ и представляет собой непрерывную функцию от $h$ такую, что $\gamma(0) > 0$, $\lim_{h\to\infty} \gamma(h) = 0$.

Функции $u(t)$, обладающие свойствами 1) и 2) и еще дополнительным свойством 3) $u(t) = 0$ при $t < 0$, были изучены Н. Винером (Wiener N., Acta Math., 1930, **55**, 117—258; The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge, 1933); однако в этих работах не было указано никаких эффективно строящихся конкретных примеров таких функций. Показывается, что широкий класс таких примеров можно получить, рассматривая функции вида

$$u(t) = \begin{cases} e^{i\varphi(n)} & \text{при } n \leqslant t \leqslant n+1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

где $\varphi(t)$ — вещественная функция. Исходя из этих примеров и применяя к ним операции умножения на функции специального вида, составления линейных комбинаций и интегрирования с некоторым весом, можно построить затем и значительно более широкие классы функций, обладающих свойствами 1) — 3), причем можно также добиться, чтобы соответствующие функции $u(t)$ были непрерывными и дифференцируемыми любое нужное нам число раз (это, очевидно, необходимо для возможности использования $u(t)$ в качестве модели пульсаций скорости в турбулентном потоке). В заключение отмечается, что построенные примеры функций $u(t)$, определяемые с использованием небольшого числа численных параметров, обычно обладают тем свойством, что сами значения $u(t)$ очень резко изменяются при сколь угодно малых возмущениях указанных параметров, в то время как соответствующая корреляционная функция $\gamma(h)$ при малых изменениях параметров меняется очень слабо; это свойство аналогично известным из экспериментов свойствам турбулентных потоков. А. М. Яглом

**4310. О некоторых классах функций, имеющих непрерывную автокорреляционную функцию. Басс** (Sur certaines classes de fonctions admettant une fonction d'autocorrélation continue. Bass Jean), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 15, 1217—1219 (франц.)

Предварительное сообщение о результатах, подробно изложенных в последующей подробной статье автора (реф. 4309). А. М. Яглом

**4311. Псевдослучайные функции и функции Винера. Басс** (Fonctions pseudo-aléatoires et fonctions de Wiener. Bass Jean), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 16, 1163—1165 (франц.)

Псевдослучайными функциями автор называет комплексные функции $u(t)$, обладающие свойствами 1) — 3) (реф. 4309) с заменой во втором из этих свойств произ-

ведения $u(t)\,u(t+h)$ на $u^*(t)\,u(t+h)$, где звездочка обозначает переход к комплексно-сопряженным величинам) (реф. 4309—4310). Отмечается, что примеры псевдослучайных функций вида $u(t) = \exp\{i\varphi(t)\}$, построенные в предыдущей работе, обладают тем свойством, что множество возможных значений $u(t)$ там всегда оказывалось всюду плотным множеством на единичной окружности. Строятся другие примеры псевдослучайных функций, принимающие лишь конечное число различных значений (равных единице по модулю). В частности, удается построить пример псевдослучайной функции, принимающей лишь два значения $+1$ и $-1$; этот пример в известном смысле родственен примеру такой функции, построенному (с использованием случайных экспериментов) Винером (Wiener N., The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge, 1933).

Примечание референта. Термин „псевдослучайные функции", введенный автором, вряд ли можно признать удачным, так как фактически речь здесь идет об определенном классе обычных комплексных функций, не имеющем непосредственного отношения к теории вероятностей. А. М. Яглом

**4312. Построение одного класса псевдослучайных функций. Бертрандиа** (Formation d'une classe de fonctions pseudo-aléatoires. Bertrandias Jean-Paul), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 4, 513—515 (франц.)

Термин „псевдослучайные функции" понимается здесь в том же смысле, что и в работе Басса (реф. 4311). Дается общая теорема, описывающая весьма широкий класс таких функций, включающий также и все примеры, построенные в предыдущих работах. А. М. Яглом

**4313. Переходные явления в ветвящихся случайных процессах. Севастьянов Б. А.**, Теория вероятностей и ее применения, 1959, **4**, № 2, 121—135 (рез. англ.)

Пусть $\mu_t$ — число частиц в момент времени $t$ в ветвящемся случайном процессе, задаваемом производящей функцией $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$, где

$$p_n = \lim_{t\to 0} \frac{P\{\mu_t = n \mid \mu_0 = 1\}}{t} \quad (n \neq 1)$$

и $p_1 = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{P\{\mu_t = 1 \mid \mu_0 = 1\} - 1}{t}$. Положим $a = f'(1)$, $b = f''(1)$, $c = f'''(1)$.

Ветвящийся процесс с $a = 0$ разделяет два резко отличных друг от друга типа ветвящихся процессов. Явления, возникающие при $a \to 0$ названы в статье переходными. Рассматриваются процессы из класса $K(b_0, c_0)$, который определяется условиями: $b > b_0$, $c \leqslant c_0$ $(0 < b_0 < \infty, \quad 0 \leqslant c_0 < \infty)$. Положим $q(t, a) = \dfrac{e^{at}}{1 + \dfrac{b}{2a}(e^{at} - 1)}$ $(a \neq 0)$ и $q(t, 0) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{bt}{2}}$ $(a = 0)$. В статье доказано, что при $t \to \infty$ и $a \to 0$ равномерно по всем $f(x) \in K(b_0, c_0)$ $1 - P\{\mu_t = 0 \mid \mu_0 = 1\} \sim q(t, a)$ и распределение

$$S_t(y) = P\left\{\frac{\mu_t}{M\{\mu_t \mid \mu_t > 0\}} < y \,\middle|\, \begin{matrix}\mu_0 = 1\\ \mu_t > 0\end{matrix}\right\}$$

сходится к показательному. Получены предельные распределения для $S_t(y)$ с $\mu_0 = n$ при $n \to \infty$, $t \to \infty$, $a \to 0$. В. П. Чистяков

**4314. Кумулянты некоторых распределений, связанных с цепью Маркова с двумя состояниями. Кришна-Айер, Шакунтала** (Cumulants of some distributions arising from a two-state Markoff chain. Krishna Iyer P. V., Shakuntala N. S.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1959, **55**, № 3, 273—276 (англ.)

Рассматривается $n$ последовательных испытаний, связанных в цепь Маркова с двумя состояниями и матрицей вероятностей перехода $(p_{ij})$, $i, j = 1, 2$. Для каждого $n$ определяется производящая функция моментов $M(n)$ совместного распределения чисел перехода типа 11, 12, 21 и 22. Она удовлетворяет рекуррентному соотношению $M(n+2) - (p_{11}e^{t_{11}} + p_{22}e^{t_{22}})\,M(n+1) + (p_{11}p_{22}e^{t_{11}+t_{22}} - p_{12}p_{21}e^{t_{12}+t_{21}})\,M(n) = 0$.

Дифференцируя $\log M(n)$ по $t_{11}$ и $t_{12}$, авторы получают выражения для четырнадцати первых кумулянтов совместного распределения чисел перехода типа 11 и 12. В. М. Волков

**4315. О сглаживании обобщенных стационарных процессов. Парасюк О. С.**, Укр. матем. ж., 1957, **9**, № 2, 210—214 (рез. франц.)

В теории автоматического регулирования возникает следующая задача. Пусть на вход некоторой динамической системы поступает случайное управляющее воздействие $m(t)$ ($m(t)$ — случайный стационарный процесс), на которое накладывается случайный стационарный шум $h(t)$. Величина на выходе системы $\chi(t)$ линейно зависит от величины на входе $\varphi(t) = m(t) + h(t)$:

$$\chi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-\tau)\,k(\tau)\,d\tau \quad (k(\tau) = 0,\ \tau < 0)$$

$k(\tau)$ называется передаточной функцией системы. Пусть по выходному сигналу $\chi(t)$ мы должны определить сигнал $h(t)$ ($\chi(t)$ и $h(t)$ — случайные стационарные процессы). Допустим, что известны корреляционные функции $R_\varphi(\tau) = M[\varphi(t+\tau)\,\varphi(t)]$ и $R_{h\varphi}(\tau) = M[h(t+\tau)]\,\varphi(t)]$.

Спрашивается, как, зная $R_\varphi(\tau)$ и $R_{h\varphi}(\tau)$, найти передаточную функцию $k(\tau)$ так, чтобы средний квадрат отклонения $\varepsilon^2 = M[h(t) - \chi(t)]^2$ был бы наименьшим. Оказывается, что функция $k(\tau)$ определяется из интегрального уравнения

$$\int_0^\infty R_\varphi(t-\tau)\,k(\tau)\,d\tau = R_{h\varphi}(t),\ t > 0,\ (k(t) = 0,\ t > 0). \quad (1)$$

Задача в приведенной постановке решена (см., например, Солодовников, Введение в статистическую динамику систем автоматического управления, М.-Л., 1952). При этом предполагается, что все процессы $m(t)$, $h(t)$, $\chi(t)$ являются случайными процессами в смысле Хинчина, т. е. реализуются в обычных функциях.

Автор реферируемой заметки решает ту же задачу, однако уже в предположении, что шум на входе $h(t)$ может быть обобщенным случайным процессом (в смысле Гельфанда) ($m(t)$, $\chi(t)$ по-прежнему обычные случайные процессы). Автор снова приходит к интегральному уравнению (1), в котором, однако, функции $R_\varphi$ и $R_{h\varphi}$ являются уже обобщенными функциями. Доказано, что при этом уравнение (1) допускает обобщенное решение $k(\tau)$. Р. А. Минлос

**4316. О стационарном процессе «нуль—один» с ограниченными пробелами. Вефер** (Über stationäre Null — Eins — Prozesse mit beschränkten Lücken. Wever Franz), Math. Z., 1959, **71**, № 3, 283—288 (нем.)

Стационарный случайный процесс $\{x_n : n = 0, 1, 2, \ldots; x_0 \equiv 1\}$, где случайные величины $x_n$ могут принимать лишь значения 1 и 0 с вероятностями $p$ и $q = 1 - p$, называется „пробельным" процессом, если он определяется путем задания распределения длин пробелов — интервалов между последовательными единицами.

Рассматриваются такие пробельные процессы, для которых: а) пробелы независимы и с вероятностью 1 ограничены, б) наибольший общий делитель совокупности

длин пробелов, имеющих положительную вероятность, равен единице.

Показано, что такие процессы имеют абсолютно непрерывную спектральную функцию и что соответствующая спектральная плотность рациональна относительно $e^{2\pi i\lambda}$. Приведены формулы, с помощью которых спектральная плотность выражается через вероятности длин пробелов. В. М. Волков

**4317. О регулярности многомерных стационарных случайных процессов с дискретным временем.** **Матвеев Р. Ф.**, Докл. АН СССР, 1959, 126, № 4, 713—715

Найдены следующие необходимые и достаточные условия того, чтобы $n$-мерный стационарный процесс $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ был регулярным ранга $m \leqslant n$:

1) спектральные функции $F_{ij}(\lambda)$ абсолютно непрерывны,

2) ранг матрицы $f(\lambda)$ спектральных плотностей равен $m$ почти всюду,

3) существует главный минор $M(\lambda)$ порядка $m$ матрицы $f(\lambda)$, не равный нулю почти всюду, для которого

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log M(\lambda)\, d\lambda > -\infty,$$

4) функции $\theta_{ik}(\lambda) = M_{ik}(\lambda)/M(\lambda)$, где $M_{ik}(\lambda)$ — детерминант матрицы, полученной из матрицы, отвечающей минору $M(\lambda)$ путем замены $k$-й строки на $i$-ю строку из $f(\lambda)$, являются граничными функциями класса $N_\delta$ при некотором $\delta > 0$. В. М. Волков

**4318. Эргодические свойства случайной функции на выходе линейной динамической системы.** **Коронкевич** (Ергодичні властивості випадкової функції на виході лінійної динамічної системи. Коронкевич О. І.), Доповіді АН УРСР, 1958, № 8, 810—812 (укр.; рез. русск., англ.)

Основным результатом работы является следующая теорема:

Если $\xi(t)$ — многомерная стационарная в широком смысле эргодическая случайная функция, а $Y(t)$ — некоторое стационарное решение уравнения

$$\frac{dY}{dt} = P \cdot Y(t) + \xi(t). \qquad (1)$$

где $P$ — постоянная матрица, не имеющая нулевых собственных значений, то функция $Y(t)$ также является эргодической. (под эргодичностью случайной функции здесь понимается просто выполнение свойства:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t)\, dt = M\xi(t).$$

Приводятся также некоторые условия, обеспечивающие эргодичность определенных частных решений системы (1) в случае, когда матрица $P = P(t)$ зависит от $t$ и случайная функция $\xi(t)$ не обязательно является стационарной, но $M\xi(t) = \text{const}$ и $\xi(t)$ является эргодической в указанном выше смысле).

Доказательства всех сформулированных утверждений опущены. А. М. Яглом

**4319. Сглаживание и фильтрация временных рядов и пространственных полей.** **Холлоуэй** (Smoothing and filtering of time series and space fields. Holloway J. Leith, Jr), Advances geophys. Vol. 4. New York, Acad. Press, Inc., 1958, 351—389 (англ.)

Популярная обзорная статья о применении различных методов сглаживания к эмпирическим временным рядам или пространственным полям (т. е. к физическим величинам, изменяющимся во времени или в пространстве). Большая часть приведенного материала относится к дискретным рядам наблюдений, производящихся лишь в определенные периодически повторяющиеся моменты времени, и к дискретным полям, заданным в точках некоторой правильной решетки на плоскости. Сглаживание (или фильтрация) при этом понимается как арифметическая операция, сопоставляющая каждому значению ряда (или поля) новое значение, представляющее собой сумму первоначальных значений в той же и нескольких соседних точках, взятых с определенными весами. Подробно изучаются частотные характеристики различных операций сглаживания; указываются преимущества и недостатки этих характеристик для некоторых наиболее широко употребляемых таких операций. Рассматривается вопрос об операции „обратного сглаживания", восстанавливающей первоначальные значения каким-то образом сглаживающего ряда; указываются методы точного и приближенного выполнения этой операции. Приводятся примеры операций сглаживания, соответствующих „фильтру высоких частот", „фильтру низких частот" или „полосовому фильтру". Изложение сопровождается многочисленными конкретными примерами, заимствованными, по большей части, из метеорологии (сглаживание синоптических карт, т. е. полей атмосферного давления и некоторых метеорологических временных рядов).

Фактически содержание статьи относится к теории стационарных случайных процессов и однородных случайных полей; однако теоретико-вероятностная терминология нигде автором не употребляется. По этой причине некоторые высказывания автора (в частности, формулировки, касающиеся условия стационарности) оказываются не вполне четкими. А. М. Яглом

**4320. К теории связи с точки зрения поведения.** **Аккофф** (Towards a behavioral theory of communication. Ackoff Russell L.), Manag. Sci., 1958, 4, № 3, 218—234 (англ.)

В соответствии с известным определением Уивера (Shannon C., Weaver W., The mathematical theory of communication, Urbana, 1949) под связью понимается „любой способ воздействия одного разумного объекта на другой". Отмечается, что теория Шеннона касается, фактически, лишь технического вопроса о том, как точно могут быть переданы те или иные символы, образующие сообщение. Делается попытка количественной оценки влияния, оказываемого принятым сообщением на поведение принимающего объекта; при этом подчеркивается предварительный характер приведенных рассуждений, претендующих лишь на постановку задач, но не на их окончательное решение.

Основным понятием, вводимым в статье, является понятие целеустремленного состояния $S$. Это понятие связано с некоторым индивидуумом (или объектом) $I$, находящимся в определенных внешних условиях $N$; при этом $I$ может избрать конечное число $m$ образов действия $C_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, каждый из которых может привести к $n$ возможным последствиям $O_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Для задания целеустремленного состояния $S$ надо еще задать вероятности $P_i = P(C_i \mid I, N)$ того, что $I$ в условиях $N$ изберет образ действий $C_i$; вероятности $E_{ij} = P(O_j \mid C_i, I, N)$ того, что выбор образа действий $C_i$ приведет к последствию $O_j$ („эффективность образа действий $C_i$ для $O_j$ в условиях $N$") и ценности (степени важности) $V_j$ всех возможных исходов $O_j$ для $I$.

Общая „ценность" $V(S)$ состояния $S$ является некоторой функцией от величин $P_i$, $E_{ij}$ и $V_j$; одним из естественных способов определения этой величины является следующий:

$$V(S) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} P_i E_{ij} V_j.$$

Получение сообщения связи объектом $I$, вообще говоря, изменит его целеустремленное состояние, т. е. переведет его из состояния $S_1$ в состояние $S_2$. При этом ценность сообщения можно определить равенством

$$\Delta V = V(S_2) - V(S_1).$$

Изменение целеустремленного состояния может быть вызвано изменением только величин $P_i$, $E_{ij}$, $V_j$ или же какой-либо комбинацией этих изменений. В первом случае можно говорить, что сообщение содержит информацию, во втором — что оно содержит инструкцию, в третьем — мотивировку; в общем случае сообщение может содержать несколько из перечисленных качеств (разумеется, введенное здесь понятие информации не следует смешивать с понятием информации по Шеннону). Предлагаются специальные выражения для количества информации, инструкции и мотивировки, содержащихся в данном сообщении; рассматривается выражение, определяющее ценность сообщения общего типа. Вкратце обсуждаются связи развитой теории с общей теорией решений и с исследованием операций. А. М. Яглом

**4321. Очертания теории информации. Гилберт** (An outline of information theory. Gilbert E. N.), Amer. Statistician, 1958, 12, № 1, 13—19 (англ.)

Обзорная статья, содержащая краткое изложение основных идей теории информации и указания на ее разнообразные применения (с рядом конкретных примеров). Библ. (включающая, главным образом, работы по применениям теории информации) 22 назв. А. М. Яглом

**4322. Букварь теории информации. Квастлер** (A primer on information theory. Quastler Henry), Sympos. Inform. Theory in Biol. (Gatlinburg, Tenn., Oct. 29th—31st, 1956). London — New York — Paris — Los Angeles, Pergamon Press, 1958, 3—49 (англ.)

Популярное введение в теорию информации. Дано много упражнений с решениями. Р. Л. Добрушин

**4323. Типы вероятностей. Гуд** (Kinds of probability. Good I. J.), Science, 1959, 129, № 3347, 443—447 (англ.)

**4324. Лекция Мак-Кина о местном времени Брауна.** Сугаку, 1958, 10, № 1, 38—42 (японск.)

**4325. Резюме докладов, сделанных на заседаниях Семинара кафедры теории вероятностей Московского университета (сентябрь — декабрь 1958 г.).** Теория вероятностей и ее применения, 1959, 4, № 2, 233—246

**4326 К. Основания теории вероятностей. 2-е англ. изд. Колмогоров** (Foundations of the theory of probability. 2nd Engl. ed. Kolmogorov A. N. Transl. from the Russ. New York, Chelsea Publ. Co., 1956, viii, 84 pp., 2.50doll.) (англ.)

**4327 К. Исследования по анализу стационарных временных рядов. Вольд, Уитс** (A study in the analysis of stationary time series. 2nd ed. Wold Herman. Appendix, Whittle Peter. Stockholm, Almqvist & Wiksell, 1954, 236 pp., ill.) (англ.)

Второе издание книги, вышедшей в 1938 г. Общий план и содержание книги сохранены. Одно из приложений, написанное Уитлом, знакомит с некоторыми результатами, полученными за последние годы по спектральной теории стационарных процессов и вопросам их статистического изучения. Н. В. Смирнов

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

**4328. Об аналоге неравенства Крамера—Рао. Рао** (On an analogue of Cramér—Rao's inequality. Rao B. R.), Skand. aktuarietidskr., 1958 (1959), № 1-2, 57—64 (англ.)

Пусть $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ — вектор неизвестных параметров, $f(x, \theta)$ — плотность распределения вероятностей, причем $a \leqslant x \leqslant b$, где $a$ и $b$ могут быть функциями $\theta$ или постоянными. Пусть, далее, $T$ — любая функция либо только $x$, либо $x$ и $\theta$ (предполагается лишь существование интегралов, подлежащих рассмотрению). Получено неравенство

$$D(T) \geqslant \frac{[T(b)f(b,\theta) - T(a)f(a,\theta) - E\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) - \psi(\theta)\vartheta(\theta)]^2}{E\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln f\right)^2 - \vartheta^2(\theta)},$$

где $\psi(\theta) = E(T)$, $\vartheta(\theta) = E\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln f\right) = f(b,\theta) - f(a,\theta)$. В случае, когда $f(a,\theta) = f(b,\theta) = 0$, это неравенство принимает более простой вид:

$$D(T) \geqslant \frac{\left[E\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right]^2}{E\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln f\right)^2}.$$

Во второй части работы рассматривается более общий случай независимых наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таких, что $x_j$ имеет плотность распределения $f_j(x_j, \theta)$, причем $a_j \leqslant x_j \leqslant b_j$, $a_j$ и $b_j$ — функции неизвестного параметра $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ или постоянные. При этих предположениях получен аналог многомерного обобщения неравенства Крамера — Рао для функций $T_1, T_2, \ldots, T_n$ ($T_j$ — функция либо только $x_j$, либо $x_j$ и $\theta$). В. В. Петров

**4329. Неравенство, которому удовлетворяет гамма-функция. Олкин** (An inequality satisfied by the gamma function. Olkin Ingram), Skand. aktuarietidskr., 1958 (1959), № 1-2, 37—39 (англ.)

Используя неравенство Крамера — Рао для некоторой случайной величины, связанной с распределением Уишарта, автор получает неравенство

$$\prod_{i=0}^{p-1} \frac{\Gamma^2\left(\delta + \alpha - \frac{i}{2}\right)}{\Gamma\left(\delta - \frac{i}{2}\right)\Gamma\left(\delta + 2\alpha - \frac{i}{2}\right)} \leqslant \frac{\delta^2(p^2-1)^2 + \delta p^4}{\delta^2(p^2-1)^2 + \delta p^4 + \alpha^2},$$

которое имеет место для всех вещественных значений $\alpha$ и $\delta$, удовлетворяющих условиям $\delta + \alpha > \frac{p-1}{2}$, $\delta > 0$, $p > 0$. Знак равенства достигается лишь в случаях $\alpha = p = 1$ или $\alpha = 0$. Если $p = 1$, то полученное неравенство совпадает с неравенством, найденным Гейленом (РЖМат, 1958, 4906). В. В. Петров

**4330. О статистиках, не зависящих от достаточных статистик. Басу** (On statistics independent of sufficient statistics. Basu D.), Санкия, Indian J. Statist., 1958, 20, № 3-4, 223—226 (англ.)

Пусть $X$ — произвольное пространство, $S$ — $\sigma$-алгебра множеств из $X$, $\{P_\theta\}$, где $\theta \in \Omega$ — пространство вероятностных мер на $(X, S)$. Рассматривается статистика $y = t(x)$ на $X$, со значениями в измеримом пространстве $(Y, T)$, которая индуцирует совокупность мер $\{P_\theta t^{-1}\}$ на $(Y, T)$. Две меры $P_{\theta_1} t^{-1}$ и $P_{\theta_2} t^{-1}$ называются частично совпадающими, если для каждого $B \in T$ из $P_{\theta_1} t^{-1}(B) = 1$ следует, что $P_{\theta_2} t^{-1}(B) > 0$. Запись $\theta_1 \Leftrightarrow \theta_2$ означает, что $P_{\theta_1} t^{-1}$ и $P_{\theta_2} t^{-1}$ частично совпадающие. $\theta$ и $\theta'$ называются соединенными (статистикой $y$), если существуют $\theta_1, \ldots, \theta_k$ такие, что $\theta \Leftrightarrow \theta_1 \Leftrightarrow \theta_2 \ldots \Leftrightarrow \theta_k \Leftrightarrow \theta'$.

Теорема. Если $t$ — достаточная статистика и если каждая пара значений $\theta$ в $\Omega$ является соединенной (статистикой $t$), тогда для любого $A \in S$, не зависящего от $t$, $P_\theta(A)$ не зависит от $\theta$.

Следствие. В условиях теоремы, любая статистика $t_1$, не зависящая от достаточной статистики, не содержит информации относительно $\theta$. Р. Х. Дизеев

**4331. Экстремальное значение в многомерной нормальной выборке. Кудо** (The extreme value in a multivariate normal sample. Kudo Akio), Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 1957, **A11**, № 2, 143—156 (англ.)

Величины $x^\nu = (x_1^{(\nu)}, \ldots, x_n^{(\nu)})$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ независимы и нормально распределены с одной и той же матрицей вторых моментов $(\sigma_{ij})$ и обратной матрицей $(\sigma^{ij})$. Экстремальным значением выборки $x^\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ называется такое значение, при котором квадратичная форма $\sum_{i<j} \sigma^{ij} (x_i^\nu - \overline{x_i})(x_j^\nu - \overline{x_j})$ достигает наибольшего значения.

Получающаяся при этом статистика $\max_\nu \sum_{i<j} \sigma^{ij} (x_i^\nu - \overline{x_i})(x_j^\nu - \overline{x_j})$ используется автором для испытания гипотез о средних (в частности, об однородности рассматриваемой выборки). Указаны некоторые обобщения рассматриваемой задачи, связанные с неполным знанием матрицы вторых моментов. Имеются некоторые опечатки.

А. А. Зингер

**4332. О линейной гипотезе в теории нормальной регрессии. Октаба** (On the linear hypothesis in the theory of normal regression. Oktaba W.), Bull. Acad. polon. sci. sér. sci. math., astron. et phys., 1958, 6, № 2, 75—78, V (англ.; рез. русск.)

Некоррелированные нормальные величины $y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ имеют математические ожидания $\mu_i = Ey_i$, зависящие от $p$ параметров $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$, и одинаковую дисперсию $\sigma^2$. На параметры наложено некоторое число линейных ограничений (некоторые данные линейные формы от параметров $\beta$ принимают предписанные значения).

Автор рассматривает задачу испытания гипотезы, согласно которой некоторые линейные формы от параметров $\beta$ линейно не зависимые от форм, упомянутых выше, принимают некоторые определенные значения. При этом автору удается избежать процесса минимизации при определении используемой для испытания статистики, применявшегося другими авторами при решении рассматриваемой задачи.

А. А. Зингер

**4333. Простая мера зависимости. Таубенхейм** (Ein einfaches Korrelationsmaß. Taubenheim J.), Gerlands Beitr. Geophys., 1958, 67, № 4, 295—303 (нем.; рез. англ.)

Пусть $(x_i, y_i)$ — выборка из совокупности значений двумерной случайной величины, $M_1$ и $M_2$ — выборочные медианы величин $X$ и $Y$. Пусть при этом $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\delta$ — количества пар, удовлетворяющих соответственно соотношениям I, II, III и IV, где

I. $X_i < M_1$ и $Y_i > M_2$,

II. $X_i < M_1$ и $Y_i < M_2$,

III. $X_i > M_1$ и $Y_i > M_2$,

IV. $X_i > M_1$ и $Y_i < M_2$

и $q = 1 - 4\frac{\alpha}{n}$.

В качестве статистики, характеризующей зависимость, предлагается величина $R = \sin\left(q\frac{\pi}{2}\right)$, которую легко вычислять. В случае нормального распределения $R$ совпадает с коэффициентом корреляции $\rho_{xy}$. $R$ инвариантна относительно монотонных преобразований $X$ и $Y$ и потому в случае нелинейной зависимости является более совершенной характеристикой зависимости, чем $\rho_{xy}$.

Автор показывает, что, пользуясь этой статистикой, легко проводится тест гипотезы независимости $X$ и $Y$.

Б. В. Финкельштейн

**4334. Достаточные статистики для некоторых марковских процессов. Форте** (Résumés exhaustifs pour un processus de Markov. Fortet Robert), C. r. Acad. sci., 1958, 247, № 1, 28—29 (франц.)

Рассматривается однородный марковский процесс с непрерывным временем и состояниями $0, 1, \ldots, r$, инфинитезимальный оператор которого определяется матрицей $Q = \| q_k^j \|_{j,k=0}^r$. Пусть производится наблюдение за реализацией процесса в интервале $(\tau, \tau + T)$, где $T > 0$, причем как $Q$, так и начальные вероятности $P_k(\tau)$ $(k = 0, 1, \ldots, r)$ неизвестны полностью или частично. Справедлива следующая теорема:

Если $J_0$ — состояние в момент $\tau$, $T_j$ — время пребывания в состоянии $j$ $(j = 0, 1, \ldots, r)$ в интервале $(\tau, \tau + T)$, $N_k^j$ — число переходов из состояния $j$ в состояние $k$ $(j, k = 0, 1, \ldots, r;\ j \neq k)$, то совокупность значений $J_0, T_j, N_k^j$ (всего $(r+1)^2 + 1$ значений, между которыми имеются очевидные соотношения) являются достаточной системой статистик для $Q$ и $P_k(\tau)$.

Рассматривается также вопрос об оценке параметра в случае, когда $Q$ является известной функцией одного параметра $\theta$, при всех значениях которого кратность характеристического числа 0 матрицы $Q$ равна 1, а марковский процесс является строго стационарным, т. е.

$$P_k(\tau) = \pi_k \ (k = 0, 1, \ldots, r), \quad \sum_{k=0}^{r} \pi_k = 1,$$

$$\sum_{k=0}^{r} \pi_k q_j^k = 0 \quad (j = 0, 1, \ldots, r).$$

Г. П. Башарин

**4335. Некоторые методы расслоения и выбора. Хаяси, Тага, Такакура** (Hayashi Chikio, Taga Yasushi, Takakura Setsuko), Токэй сури кэнкюсё ихо, Proc. Inst. Statist. Math., 1955, 2, № 2, 11—24 (японск.; рез. англ.)

**4336. О выборочных ошибках в некоторых задачах квантования. Аояма** (Aoyama Hirojiro), Токэй сури кэнкюсё ихо, Proc. Inst. Statist. Math., 1955, 2, № 2, 3—9 (японск.; рез. англ.)

**4337. Пример выборочной проверки с применением полиномиального распределения. Нисимура Кацубуми, Мидзутани Хисаси,** Хинсицу канри, Statist. Quality Control, 1958, ноябрь, спец. вып., 96—98 (японск.)

**4338. К теории статистики со скаляром в качестве случайной величины. Сасаки** (Sasaki Tatsujiro), Токэй сури кэнкюсё ихо, Proc. Inst. Statist. Math., 1955, 2, № 2, 1 (японск.; рез. англ.)

**4339. Влияние числа выборок на среднее значение нерегулярных амплитуд. Манабэ** (Manabe Daikaku), Кюсю дайгаку когаку сюхо, Technol. Repts Kyushu Univ., 1958, 31, № 3-4, 171—176 (японск.)

**4340 К. Статистические оценки и бэта-преобразованные переменные. Блум** (Statistical estimates and transformed beta-variables. Blom Gunnar. New York, John Wiley & Sons, Inc., Stockholm, Almqvist & Wiksell, 1958, 176 pp., ill.) (англ.)

Книга состоит из трех частей. Первая часть посвящена обобщению фишеровой теории асимптотически эффективных оценок. Во второй части изучаются свойства так называемых бэта-преобразованных случайных величин, которые можно рассматривать как члены вариационного ряда, т. е. упорядоченную по величине группу независимых случайных величин. Детально исследуются асимптотические приближения первых двух моментов таких величин при возрастании общей численности группы. Затем изучается асимптотическое распределение линейной комбинации бэта-преобразованных переменных.

В третьей части найденные результаты применяются к задачам линейной оценки параметров положения и

масштабных. Здесь показывается как конструируются оценки, которые иногда существенно более эффективны, чем оценки минимальной дисперсии.

Оглавление книги: Часть I. Исследования по теории оценок из больших выборок. Гл. 1. Оценка одного неизвестного параметра. Гл. 2. Оценка нескольких неизвестных параметров.

Часть II. Бэта-преобразованные величины. Моменты и распределения вероятностей. Гл. 3. Общее введение. Гл. 4. Основные свойства бэта-преобразованных величин. Гл. 5. Неособенные бэта-преобразованные величины. Гл. 6. α-, β-поправки. Гл. 7. Несобственные бэта-преобразованные величины. Гл. 8. Линейные комбинации бэта-преобразованных величин.

Часть III. Бэта-преобразованные величины. Приложения к теории линейной оценки. Гл. 9. Линейные оценки параметров положения и масштаба. Гл. 10. Приближенно наилучшие линейные оценки. Гл. 11. Линейные оценки, отвечающие приближенно минимуму среднего квадратического отклонения. Гл. 12. Модифицированные приближенно наилучшие линейные оценки. Гл. 13. Асимптотические свойства приближенно наилучших линейных оценок. Гл. 14. Заключительные замечания.

Н. В. Смирнов

**4341 К. Планы экспериментов. Кокран, Кокс** (Experimental designs. 2nd ed. Cochran William G., Cox G. M. New York, John Wiley and Sons, Inc.; London, Chapman and Hall, Ltd, 1957, xvi, 611 pp., ill.) (англ.)

Второе издание книги, вышедшей в 1950 г. Книга представляет обширное руководство по планированию экспериментов, позволяющих изучить одновременно влияние данного ряда факторов и учесть их взаимодействие в условиях случайного рассеивания показаний. Теория планирования экспериментов, развитая впервые Р. Фишером в его известной книге «The Design of experiment» (1947 г., 4-е изд., Эдинбург) применительно главным образом к агрономическим опытам, за последние годы нашла себе широкое приложение в области медицины, технологии промышленных производств, в некоторых вопросах химии и физики и т. п. Вместе с тем и теоретическое обоснование различных приемов в этой области стало более глубоким и совершенным. Оба этих обстоятельства нашли отражение в настоящем издании книги, значительно расширенной за счет некоторых новых глав и параграфов. Н. В. Смирнов

**4342 К. Введение в статистику. Фрейзер** (Statistics. An introduction. Fraser D. A. S. New York, John Wiley and Sons, Inc.; London, Chapman and Hall, Ltd, X, 398 pp., ill.) (англ.)

В отличие от большинства руководств по математической статистике, выпускаемых иностранными издательствами, настоящая книга имеет целью дать по возможности строго логическое и до известной степени математически обоснованное изложение этой дисциплины, не предполагая в то же время у читателя большой математической подготовки. В основе книги лежит курс, прочитанный автором в университете Торонто. Вопросы приложений отодвинуты на второй план и привлекаются лишь в порядке иллюстраций к теоретическим положениям текста. В качестве известного новшества, введенного автором в изложение стандартного материала по теории оценок (гл. 9), отметим основную теорему об «исправлении» несмещенных оценок, принадлежащую Блэквеллу и Леману, а также свежее изложение идей Фишера о доверительных оценках. Содержание книги можно усмотреть из следующего оглавления: 1. Введение. 2. Простейшие распределения вероятностей. 3. Дискретные распределения вероятностей. 4. Непрерывные распределения вероятностей. 5. Характеристики распределений. 6. Выборка из распределений вероятности. 7. Выборки из конечной совокупности. 8. Некоторые распределения вероятности. 9. Оценивание. 10. Испытание гипотез. 11. Доверительные методы. 12. Регрессионный анализ. 13. Факториальные планы. 14. Вопросы техники экспериментальных планов. 15. Выборочная инспекция и последовательный анализ. 16. Непараметрические методы. Н. В. Смирнов

**4343 К. Прикладная статистика для инженеров. Волк** (Applied statistics for engineers. Volk William. New York—Toronto—London, McGraw—Hill Book Co., Inc., 1958, xii, 354 pp., ill.) (англ.)

Автор имеет в виду инженеров химической промышленности, которым приходится применять статистические методы для анализа и контроля производственного процесса, технологии, контроля качества продукции и т. д. Вопросы теоретические попутно разъясняются, хотя строго математического обоснования методов не дается. Все же показ приложения основных статистических приемов проверки гипотез, сравнения средних, измерения связи, дисперсионного анализа, последовательных тестов проведены достаточно детально с подробным разбором конкретных примеров обработки статистического материала, взятого из различных областей техники. Книга является развитием курса, прочитанного автором для студентов Политехнического института в Бруклине, по статистике применительно к химической инженерной практике.

Ценной особенностью книги является краткий, но содержательный очерк простейших методов непараметрической статистики. В книгу вошло довольно большое число фрагментов редких таблиц, удобных для быстрого получения статистических оценок.

В гл. 8 дается обстоятельное изложение упрощенных приемов получения уравнений множественной регрессии и эмпирических формул по методу наименьших квадратов.

Книга разделена на десять глав: 1. Вероятность; 2. Перестановки и сочетания; 3. Распределения: биномиальное, Пуассона, нормальное; 4. Меры рассеивания; 5. $\chi^2$-(хи-квадрат) метод; 6. Критерий $t$; 7. Анализ дисперсии; 8. Корреляция-регрессия; 9. Последовательный анализ; 10. Непараметрическая статистика. Таблицы. Указатель. Н. В. Смирнов

**4344 К. Основы педагогической статистики. Корнелл** (The essentials of educational statistics. Cornell Francis G. New York, John Wiley and Sons, Inc.; London, Chapman and Hall, Ltd. 1956, xii, 375 pp. (англ.)

Эта книга предназначается для изучающих педагогику в качестве введения в теорию и практику статистических методов. Не претендуя на абсолютную строгость, автор старательно и детально выясняет логический замысел основных концепций математической статистики и показывает применение ее на многочисленных примерах. Текст каждой главы завершается вопросами и задачами, а также указаниями на специальные руководства, в которых читатель может найти более углубленную трактовку затронутых автором вопросов. Приводим оглавление книги: 1. Использование статистики в педагогике; 2. Счет и измерение в педагогике; 3. Распределения частот и меры центрального значения; 4. Распределения частот и дисперсия; 5. Понятие вероятности и теоретические распределения; 6. Функция нормального распределения; 7. Распределение средней в выборке; 8. Корреляция и регрессия; 9. Ошибки выборки при измерении корреляции и регрессии; 10. Хи-квадрат критерий и данные перечисления; 11. Сравнение двух выборок; 12. Сравнение более чем двух групп; 13. Специальные методы корреляции; 14. Частная и множественная корреляция; 15. Собирание и представление статистических данных. Н. В. Смирнов

## ТЕОРИЯ ИГР, ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

**4345. Торги. Хансман, Риветт** (Competitive bidding. Hanssmann F., Rivett B. H. P.), Operat. Res. Quart., 1959, **10**, № 1, 49—55 (англ.)

Новый метод решения задачи, рассмотренной Фридманом (РЖМат, 1959, 8287). Метод основан на практически проверенном предположении, что отношение выигрывающей ставки к предварительной ее оценке имеет логарифмически-нормальное распределение. В конце статьи ставится ряд нерешенных вопросов.

С. С. Кислицын

**4346. Трудности научного решения Пирон** (Les difficultés de la décision scientifique. Piron J.), Méc. industr., 1959, № 49, 8—12 (франц.)

Элементарные сведения по теории игр: определения, графический способ решения матричной 2×2-игры.

С. С. Кислицын

**4347. Исследование операций. Теория игр. Пакер** (Recherche opérationnelle. Théorie des jeux. Paker Marko A.), Rev. Soc. roy. belge ingrs et industriels, 1957, № 12, 478—483 (франц.)

Несколько элементарных примеров практического применения теории игр.

**4348. Метод свободного максимума для решения задач линейного программирования. Юхансен** (Il metodo del libero massimo per risolvere problemi di programmazione lineare. Johansen Leif), Studi econ., 1958, **13**, № 6, 449—466 (итал.)

Пусть требуется найти максимум формы $f=\sum_{k=1}^{n} p_k x_k$ при условиях, что $y_t = b_{t0} + \sum_{j=1}^{n} b_{tj} x_j \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$, где $N \geqslant n$, а ранг матрицы $(b_{tj})$ равен $n$. Автор показывает, что приближенное (но сколь угодно близкое к точному) решение этой задачи может быть получено, если найти максимум $f + \sum_{i=1}^{N} \Phi\left(b_{t0} + \sum_{j=1}^{n} b_{tj} x_j, \alpha\right)$ при достаточно большом $\alpha$, где $\Phi(\xi, \alpha)$ — функция, подчиненная следующим условиям:

1) $\Phi$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \Phi'$, $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} = \Phi''$ непрерывны по $\xi$ и $\alpha$;

2) $\Phi < 0$, $\Phi' > 0$, $\Phi'' < 0$ при всех вещественных $\xi$ и $\alpha$;

3) $\lim_{\xi \to -\infty} \Phi(\xi, \alpha) = -\infty$, $\lim_{\xi \to -\infty} \Phi'(\xi, \alpha) = +\infty$, $\lim_{\xi \to +\infty} \Phi''(\xi, \alpha) = 0$;

4) $\lim_{\alpha \to +\infty} \Phi(\xi, \alpha) = \begin{cases} -\infty & \text{при } \xi < 0 \\ 0 & \text{при } \xi > 0. \end{cases}$

В частности, в качестве $\Phi(\xi, \alpha)$ можно взять $-e^{-\alpha\xi}$. Точка максимума находится итерационным путем.

Как указывает автор, впервые подобный метод был предложен Моцкиным (Motzkin T. S., Symposium on Linear Programming and Inequalities; Washington, June 14 — 16, 1951). Замечены опечатки в формулах 2.8, 2.16′ и 3.2.

С. С. Кислицын

**4349. Логарифмические программы. Их приложение к линейному программированию. Паризо** (Les programmes logarithmiques. Leur application au calcul des programmes linéaires. Parisot Georges), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 10, 1470—1472 (франц.)

Описывается новый метод решения задачи линейного программирования, из которого как частный случай получается известный метод логарифмического потенциала, или двойного градиента.

С. С. Кислицын

**4350. Коэффициенты в задаче о размещении. Оман, Краскал** (The coefficients in an allocation problem. Aumann R. J., Kruskal J. B.), Naval Res. Logist. Quart., 1958, **5**, № 2, 111—123 (англ.)

Рассматривается вопрос о нахождении коэффициентов в задаче о размещении (назначении) на основе субъективных качественных оценок и предположении линейности функции полезности. По основной идее статья близка к работе Черчмана и Аккоффа (РЖМат, 1957, 2561).

С. С. Кислицын

**4351. О нахождении (способа) наилучшей эксплуатации рудного месторождения неизвестной мощности. Бийе** (Sur la recherche de l'optimum d'exploitation d'un gisement minier de capacité incertaine. Billiet A.), Rev. franç. rech. opérat., 1959, **3**, № 10, 21—30 (франц.)

В случае известной мощности месторождения задача сводится к нахождению максимума выражения

$$\int_0^T v(t)\, Q(t)\, J(t)\, dt - \int_0^T f(t)\, J(t)\, dQ^*(t)$$

при условии $\int_0^T Q(t)\, dt = R_0$, где $v(t)$, $f(t)$ — соответственно рыночная цена и стоимость добычи единицы продукции в момент $t$; $Q(t)$ — производительность в момент $t$; $Q^*(t)$ — количество продукции, которое можно получить при наличии лишь имеющихся ко времени $t$ капиталовложений; $J(t)$ — коэффициенты эффективности работы; $R_0$ — мощность месторождения. Этот максимум находится в статье при упрощающих предположениях относительно $v$, $f$, $J$. Далее рассматривается задача максимизации математического ожидания дохода при известной функции распределения мощности месторождения и задача максимизации дохода в самом неблагоприятном случае, если известны только границы мощности месторождения.

С. С. Кислицын

**4352. Ошибки модели и оценивание экономических связей. Тейл** (Specification errors and the estimation of economic relationships. Theil H.), Rev. Inst. internat. statist., 1957, **25**, № 1-3, 41—51 (англ.; рез. франц.)

Пусть нам известен вектор $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_T)$ наблюденных значений некоторой случайной величины и, кроме того, известно, что $y = X\beta + U$, где $X$ — известная $T \times \Lambda$-матрица ранга $\Lambda \geqslant 1$, $\beta$ — столбец $\Lambda$ неизвестных параметров, $U$ — столбец выборочных значений случайной величины с $EU = 0$. Сравнивается оценка $\beta$ по методу наименьших квадратов с оценкой, полученной по тому же методу, но при ошибочном использовании матрицы $\overline{X}$ ранга $\overline{\Lambda}$. Полученные результаты применяются к ряду задач математической экономики.

С. С. Кислицын

**4353. Оценка по методу максимального правдоподобия уравнений спроса Торнквиста. Фиск** (Maximum likelihood estimation of Tornqvist demand equations. Fisk P. R.), Rev. Econ. Studies, 1958, **26**, № 69, 33—50 (англ.)

Предполагается, что спрос некоторого товара при доходе $\mu$ выражается логистической кривой:

$$y = k \int_{-\infty}^{\alpha+\beta \ln \mu} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\, dx + \varepsilon,$$ где $k$, $\alpha$, $\beta$—коэффициенты, имеющие экономический смысл (например, $k$ характеризует уровень „насыщения“), а $\varepsilon$ — независимая ошибка, распределенная по закону $N(0, \sigma^2)$. Параметры $k$, $\alpha$, $\beta$ оценены по методу максимального правдоподобия. Полученные результаты сравниваются с данными Этчисона и Брауна (Aitchison J., Brown J. A. C., Rev. Econ. Studies, 1954, **22**, № 57, 34—46), полученными в предположении логарифмической нормальности спроса.

С. С. Кислицын

**4354. Экономические модели Вальраса и Леонтьева. Абдель-Малек** (Les modèles économiques de Walras et de Léontief. Abdel-Malek Ménès), Egypte contemp., 1958, **49**, № 292, 51—65 (англ.)

Основным подходом Вальраса является субъективная теория стоимости, согласно которой последовательные единицы богатства имеют для носителя этого богатства полезность убывающей интенсивности. Полезность богатства $A$ для владельца этого богатства выражается уравнением: $r = \Phi_a(q)$ (где $r$ — маргинальная полезность, $q$ — потребляемое количество). Предположим, что владелец товара $B$, обладающего количеством $q_b$ этого товара, хочет обменять часть его $o_b$ на некоторое количество $d_a$, товара $A$, $p_a$ и $p_b$ — цены товаров $A$ и $B$. Основная теорема Вальраса состоит в том, что при обмене двух товаров каждый обменивающий получит максимальное удовлетворение своих потребностей, если выполнены следующие условия:

$$d_a \times p_a = o_b \times p_b,$$
$$\frac{\Phi_a(d_a)}{\Phi_b(q_b - o_b)} = \frac{p_a}{p_b}. \qquad (1)$$

Пусть имеется $n$ производственных услуг: $(T)$, $(P)$, $(K)$,... (услуги имеют для каждого их обладателя полезность, выраженную также уравнением $r = \Phi(q)$).

Посредством этих услуг производится $m$ товаров: $(A)$, $(B)$,$(C)$,...; $O_t$, $O_p$, $O_k$,... — количества предлагаемых услуг, $D_a$, $D_b$, $D_c$,... — спрос на товары. Составляя уравнения, аналогичные (1), и разрешая их относительно $O_t$, $O_p$, $O_k$,..., $D_a$, $D_b$, $D_c$,..., получим:

$$O_t = F_t(p_t, p_p, p_k, \ldots, p_b, p_c, \ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$D_b = F_b(p_t, p_p, p_k, \ldots, p_b, p_c, \ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$D_a = O_t p_t + \ldots - (D_b p_b + D_c p_c + \ldots),$$

где $p_t$, $p_p$, $p_k$,... — цены услуг, $p_b$, $p_c$,... — цены товаров; цена товара $A$ считается равной 1. Вальрас, однако, считает цены также неизвестными и для их нахождения вводит новый ряд уравнений, с помощью которых неизвестные величины выражаются через коэффициенты производства (т. е. количества различных услуг, необходимых для производства единицы продукта).

Система Леонтьева, описание которой приводится, является упрощением модели Вальраса.

Л. А. Кораблева

**4355. Об устойчивости равновесия при конкуренции. Эрроу, Гурвич** (On the stability of the competitive equilibrium. I. Arrow Kenneth J., Hurwicz Leonid), Econometrica, 1958, 26, № 4, 522—552 (англ.)

Пусть в начальный момент у $n$ лиц имеются $m+1$ предметов протребления в количествах $\mathring{X}_0^i, \mathring{X}_1^i, \ldots, \mathring{X}_m^i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ при ценах $p_0 = 1, p_1, \ldots, p_m$. Стремление $i$-го потребителя $(i = 1, 2, \ldots, n)$ к максимизации своей функции полезности $u^i(X_0^i, X_1^i, \ldots, X_m^i)$ при бюджетном ограничении $\sum_{k=0}^{m} p_k X_k^i = \sum_{k=0}^{m} p_k \mathring{X}_k^i$ и условиях $X_k^i \geqslant 0$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ приводит к изменению первоначальных количеств товаров. Разность между новыми количествами $X_k^i$ и $\mathring{X}_k^i$ определяет функцию $f_k^i(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ превышения спроса товара $k$ для лица $i$. Суммарная функция превышения спроса товара $k$, $f_k(p_1, p_2, \ldots, p_m) = \sum_{i=1}^{n} f_k^i(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ оказывает влияние на цены таким образом, что $dp_k(t)/dt = f_k(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$.

Описанная модель названа авторами процессом мгновенного регулирования (the instantaneous adjustment process). Исследуется устойчивость вышеуказанной системы дифференциальных уравнений при каждом из следующих условий: 1) когда при равновесии нет торгов; 2) если имеются лишь два предмета потребления; 3) когда все товары взаимно заменяемы. Во всех исследованных случаях система оказалась устойчивой.

Менее подробно рассмотрена несколько более сложная модель (the lagged adjustment process), для которой получен аналогичный результат. Библ. 37 назв.

С. С. Кислицын

**4356. Вероятностный выбор составных частей статьи бюджета при построении индексов стоимости жизни. Банерджи** (Probability selection of the constituent items of a composite item in the construction of cost of living index numbers. Banerjee K. S.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1958, 8, № 30-31, 106—109 (англ.)

Указаны несмещенные оценки для суммы $\sum_{j=1}^{N_i} r_j w_j$ при известных $w_j$, а также, если $w_j$ неизвестны. Обозначения имеют следующий смысл: $N_i$ — число подразделений $i$-й составной части бюджета семьи (например, расходов на пищу, одежду и т. д.); $r_j = p_{1j}/p_{0j}$ — относительная цена, а $w_j$ — доля $j$-го подразделения в $i$-й части.

С. С. Кислицын

**4357. О стоимости и спросе и о теории стандартных индексов и индексов стоимости жизни. Африат** (On value and demand and theory of index-numbers of the standard and cost of living. Afriat S. N.), Bull. Res. Council Israel, 1957, F7, № 1, 48—49 (англ.)

Описывается метод вычисления индексов стоимости и относительных цен с помощью так называемых интервальных уравнений, связывающих данные четырех последовательных промежутков времени.

С. С. Кислицын

**4358. Об эволюции экономики (принципы абстрактной экономики). Керубино** (Sull'evoluzione economica (Principi di economia astratta). Cherubino Salvatore), Rend. mat. e applic., 1958, 17, № 3-4, 231—261 (итал.)

Статья является продолжением цикла работ автора (РЖМат, 1958, 8062; 1959, 5006, 6116 и др.), в которых рассматриваются примеры применения $n$-мерной геометрии и матричного исчисления к теории производства цен, и в основном представляет обобщение второй и упомянутых работ на случай отсутствия экономического равновесия.

С. С. Кислицын

**4359. Вероятностный анализ распределения размеров фирм. Эйделман** (A stochastic analysis of the size distribution of firms. Adelman Irma G.) J. Amer. Statist. Assoc., 1958, 53, № 284, 893—904 (англ.)

Фирмы некоторой отрасли промышленности разбиваются на несколько групп в зависимости от размера капитала. Автор считает, что изменение численности этих групп с течением времени происходит по закону однородной цепи Маркова, если добавить дополнительную группу, в которую попадают разорившиеся фирмы и из которой появляются новые. Рассчитанное при таком предположении предельное распределение размера фирм в стальной промышленности США до некоторой степени согласуется с тем, чего можно ожидать, исходя из наблюдающихся тенденций.

С. С. Кислицын

**4360. Различие стоимостей почтово-телеграфных операций. Приложение метода. Риелло** (La discriminazione dei costi delle operazioni P. T. Applicazione del metodo. Riello Giuseppe), Poste e telecomun., 1959, 27, № 3, 204—211 (итал.)

Расчет бюджета почтово-телеграфного ведомства. Применный математический аппарат элементарен.

С. С. Кислицын

**4361. По поводу статьи «Сглаживание производства».** **Шерман** (Comment on «Smooth patterns of production». Sherman S.), Management Sci., 1955, 1, 271 (англ.)

Автор отмечает без доказательства, что некоторые заключения статьи (РЖМат, 1958, 4006) продолжают оставаться справедливыми для функции издержек $d(x_{t+1}-x_t)$, которая равна нулю для неотрицательных $x_{t+1}-x_t$ и является неотрицательной монотонно возрастающей функцией от $x_{t+1}-x_t$ для неотрицательных $x_{t+1}-x_t$. Однако теорема 4 названной выше статьи, дающая алгорифм для составления оптимального производственного графика в случае, когда требования к снабжению возрастают из месяца в месяц, становится неверной в некоторых примерах, в которых функция $d(x_{t+1}-x_t)$ равна нулю при $x_{t+1}-x_t \leqq 0$ и является выпуклой невозрастающей функцией при $x_{t+1}-x_t > 0$.

T. L. Saaty

Перевод из „Math Revs, 1956, 17, № 5, 507—508".

Примечание переводчика. Референт допустил ошибку: функция $d(x_{t+1}-x_t)$ должна быть равна нулю для неположительных $x_{t+1}-x_t$. А. А. Корбут

**4362. Модель поломок оборудования, на котором выполняются комплексные операции.** **Столлер** (A failure model for equipments undergoing complex operation. Stoller David S.), Operat. Res., 1958, 6, № 5, 723—728 (англ.)

На станке деталь проходит операцию обработки, состоящую из $k$ циклов. Рассматривается случай, когда в каждом цикле $i$ продолжительностью $\tau_i$ возможны поломки оборудования $n$ типов, причем поломка данного типа возможна в течение цикла лишь на определенном интервале времени (эти интервалы могут перекрываться). Предполагается, что длина одних интервалов зависит от продолжительности цикла, а длина других не зависит.

Во многих случаях справедливо предположение, что $Q(t, t+\delta) = \delta\,\Lambda_{\tau_i} + o(\delta)$ — вероятность того, что за интервал времени $(t, t+\delta)$ вообще произойдет поломка, если $(t, t+\delta)$ лежит в пределах цикла продолжительностью $\tau_i$. При этом во многих случаях $\Lambda_{\tau_i} = \Lambda_0 + \Lambda_1/\tau_i$, т. е. $\Lambda_{\tau_i}$ делится на две части — одну, пропорционально зависящую от длительности цикла, другую, не зависящую от продолжительности цикла.

Тогда вероятность того, что в течение операции не произойдет поломок, равна

$$\exp\left[-\sum_{i=1}^{k}\Lambda_{\tau_i}\tau_i\right] = \exp\left[-\Lambda_0\sum_{i=1}^{k}\tau_i + k\Lambda_1\right].$$

Кроме того, дан метод испытания правдоподобности этой модели. В. Н. Комлева

**4363. Изучение методами исследования операций размещения отделов в цепи розничных магазинов.** **Мелез** (Une étude de recherche opérationnelle sur l'implantation des rayons dlune chaîne de magasins populaires. Melèse Jacques), Rev. rech. opérat., 1957, 1 № 3, 133—148 (франц.)

Требовалось, найти такое размещение отделов в нескольких магазинах, при котором суммарная стоимость продаваемых товаров была бы максимальна. Для решения этой задачи были собраны статистические данные, поставлен ряд экспериментов, а затем применен метод Монте-Карло. С. С. Кислицын

**4364. Математическая модель защиты за счет местности.** **Хэр** (A mathematical model of terrain shielding. Hare R. R., Jr), Operat. Res., 1958, 6, № 4, 530—537 (англ.)

При оценке эффективности оружия осколочного действия часто важно оценить защиту, которую дает неоднородность местности (холмы, камни, впадины).

Пусть бомба разрывается на высоте $h$ над некоторой плоскостью $C$, осколки разлетаются по прямым линиям, $Y$ — высота цели, $r$ — расстояние по горизонтали от места взрыва до цели. Предполагается, что поверхность вокруг места взрыва неровная и все точки поверхности лежат на плоскости $C$ или выше нее. Плоскость, перпендикулярная к плоскости $C$ и проходящая через точку взрыва бомбы, называется траекторной. Траекторная плоскость пересекает поверхность по кривой, называемой кривой местности, а плоскость $C$ — по некоторой прямой $L$. Пусть локальные максимумы на кривой местности распределены случайно и $\rho(u)$ — среднее число локальных максимумов высотой не меньшей $u$ на единице длины прямой $L$. Уравнение траектории осколка, который попадает в цель на высоте $y$, имеет вид: $\eta = h + \xi(y-h)/r$ (ось $\xi$ направлена по прямой $L$, ось $\eta$ — по перпендикуляру, опущенному из точки взрыва на $L$). Тогда $P(r, y, h) = \exp\left\{-\int_0^r \rho(\eta)\,d\xi\right\}$ — вероятность того, что осколок попадет в цель на высоте $y$ при данных $r$ и $h$. $F(r, Y, h) = Y^{-1}\int_0^Y P(r, y, h)\,dy$ — ожидаемая часть цели высотой $Y$, которая будет подвергаться действию осколков. $F$ — называется функцией защиты. Трудность состоит в правильном выборе функции $\rho(u)$. В некоторых случаях $\rho(u)$ полагают равной $\alpha e^{-\beta u}$ ($\alpha$, $\beta$ — параметры).

Приведены результаты испытания построенной модели на местности трех типов. В. Н. Комлева

**4365. Исследование операций в теории связи.** **Гаррис, Хауптшейн, Шварц** (Operations research in communications. Harris B., Hauptschein A., Schwartz L. S.), Commun. and Electronics, 1958, № 39, 633—637. Discuss., 637—638 (англ.)

Обзор исследований, в которых для сравнения качеств систем связи используются некоторые критерии, полученные на базе идей и методов исследования операций. Библ. 15 назв. И. А. Ибрагимов

**4366. Общие методы исследования оптимизационных задач в теории связи.** **Калаба, Хункоса** (General systems approaches to telecommunication optimization problems. Kalaba R. E., Juncosa M. L.), IRE Nat. Convent. Rec., 1957, 5, № 8, 203—208 (англ.)

Обзорная статья, излагающая некоторые новые методы решения задач теории связи, приводящихся к нахождению максимумов функций очень большого числа переменных. Существо этих методов — использование аппарата линейного или динамического программирования в соединении с бы тродействующими вычислительными машинами. Библ. 15 назв. И. А. Ибрагимов

**4367. Системы с решающей обратной связью, предназначенные для обнаружения сигналов, искаженных гауссовским шумом, и имеющие минимальную стоимость.** **Гаррис, Хауптшейн, Шварц** (Minimum cost decision-feedback systems for detecting signals perturbed by additive Gaussian noise. Harris B., Hauptschein A., Schwartz L. S.), Operat. Res., 1957, 5, № 5, 680—692 (англ.)

Рассматривается передача символов $x_1$ (сигнал) и $x_2$ (отсутствие сигнала) по каналу связи. На выход канала символы поступают искаженными действием некоррелированного гауссовского шума. В зависимости от характера сообщения на выходе получатель принимает одно из трех решений о наличии или отсутствии сигнала: 1) сигнал; 2) отсутствие сигнала; 3) не принимает никакого решения о сигнале (сомнительный случай). Процесс решения состоит в сравнении напряжения сигнала

на выходе $y_j$ с некоторым уровнем вольтажа $k_j$, причем принимается решение 1), если $y_j \geqslant k_j$, решение 2), если $y_j \leqslant -k_j$; решение 3), если $k_j > y_j > -k_j$. Индекс $j$ здесь обозначает $j$-й момент времени. Наличие шума в канале приводит к тому, что 1-е и 2-е решения могут оказаться ошибочными. Для уменьшения вероятности ошибки можно либо увеличить избыточность передаваемого текста, либо позволить получателю просить повторить сигнал, если полученное сообщение кажется ему сомнительным. Последний метод называется методом решающей обратной связи (decision feedback). Исследуются применения этого метода в предположении, что канал обратной связи работает мгновенно и без ошибок. Отмечается, что в этих предположениях метод решающей обратной связи в некотором смысле более эффективен, чем метод увеличения избыточности текста.

И. А. Ибрагимов

**4368. Заметки о комбинаторной задаче Купмана Финч** (Notes on a combinatorial problem of B. O. Koopman. Finch P. D.), Operat. Res. Quart., 1958, 9, №3, 169—173 (англ.)

Улучшаются результаты, полученные Купманом для следующей задачи (РЖМат, 1960, 695). Имеется $n$ обслуживаемых устройств $b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $2n$ обслуживающих станций $a_j$ $(j = 1, \ldots, 2n)$. В некоторый момент $t = 0$ все обслуживаемые устройства требуют обслуживания, причем каждая станция способна обслужить только одно устройство.

До момента $t = 0$ на каждую станцию назначается множество из $k$ устройств $(k \geqslant 2)$, и каждое устройство прикрепляется к $2k$ станциям. Станция может обслужить только одно из $k$ устройств, связанных с ней. Далее, до момента $t = 0$, но уже после того, как были определены условия обслуживания, случайно и независимо с вероятностью $p$ обслуживающие станции выходят из строя. Задача состоит в том, чтобы определить математическое ожидание числа устройств, которые можно обслужить в момент $t = 0$. Отношение этого числа к полному количеству устройств называется индексом данной системы (т. е. конкретного назначения устройств на станцию и прикрепления устройства к станциям) и обозначается $I(A)$, где $A$ — данная система. Купман рассмотрел случай $p = 1/2$, $k = 2$, $n = 100$ и нашел, что существует такое $A$, что $0{,}87 \leqslant I(A) \leqslant 0{,}97$. Автор рассматривает случай $k = 2$, при произвольных $n$, $p$. Доказывается, что при произвольном $A$ $I(A)$ удовлетворяет неравенству $I(A) \leqslant 1 - p^{2k}$. В случае $p = 1/2$, $k = 2$ $I(A) \leqslant 0{,}9375$. Эту оценку можно улучшить при рассмотрении конкретных $A$. Определяется также нижняя граница индекса.

В. Н. Комлева

**4369. Исследование операций сегодня и завтра. Суон** (Operational research today and tomorrow. Swan A. W.), Operat. Res. Quart., 1958, 9, № 4, 279—292 (англ.)

По словам автора, статья написана «в защиту простоты, а также глубины и широты мышления». Подчеркивается, что большая часть задач исследования операций может быть решена на основе простых статистических соображений в результате рассмотрения кривых выборочных распределений. При этом, например, бимодальность распределения означает неоднородность совокупности, асимметрия в условиях унимодальности заставляет предполагать логнормальность распределения и т. д.

Автор классифицирует методы, применяемые в исследовании операций следующим образом:

Группа 1. Простые статистические приемы с широкой областью приложений: а) визуальное рассмотрение кривых распределения; б) выборки и карты контроля качества; в) значимые отклонения: критерий $t$, дисперсионный анализ, $\chi^2$ и т. д.; г) регрессия — корреляция.

Группа 2. Более сложные статистические приемы, очень полезные, но не так часто применяемые к решению промышленных задач: а) планирование статистических экспериментов, б) теория очередей, в) моделирование методом Монте-Карло.

Группа 3. Математические и другие методы, потенциально важные, но еще редко применяемые: а) линейное программирование, б) теория решений, теория информации, теория игр, в) математическая логика, г) кибернетика.

Роль более сложных приемов с течением времени возрастает.

Н. Н. Воробьев

**4370. Исследование операций и управление. Оптимизация капиталовложений в оборудование. Вантюра** (Recherche opérationnelle et manutention. Optimisation d'un investissement en engins de manutention. Ventura E.), Manutention, 1959, 9, № 56, 91—95 (франц.)

Без точной постановки и численных расчетов приведен ряд задач, которые можно решить с помощью методов исследования операций. Отмечается, что ввиду сложности задач часто бывает применим лишь метод Монте-Карло.

С. С. Кислицын

**4371. О степени централизации управления. Уайтин** (On the span of central direction. Whitin T. M.), Naval Res. Logist. Quart., 1954, 1, № 1, 25—35 (англ.)

Для четырех экономических моделей анализируются преимущества и недостатки централизованного управления.

И. А. Ибрагимов

**4372. Упорядоченный выбор решений. Милс** (Organized decision making. Mills H. D.), Naval Res. Logist. Quart., 1955, 2, № 3, 137—143 (англ.)

Описываются общие принципы иерархии внутри организации, которая должна принимать те или иные решения.

Н. М. Митрофанова

**4373. Статистический контроль телефонной сети. Линд** (Statistical supervision of telephone plant. Lind Gunnar), Ericsson Techn., 1958, 14, № 2, 197—220 (англ.)

Обсуждается вопрос об оптимальном способе надзора (обнаружение и исправление случайных неисправностей) над телефонной сетью. Автор считает наиболее целесообразной последовательную проверку всех линий сети с применением при исследовании частоты погрешностей на каждой линии метода последовательного анализа Вальда и предлагает несколько интуитивный способ определения оптимального количества затрат на содержание сети. Библ. 42 назв.

Н. М. Митрофанова

**4374. Составление графиков использования гидроэнергии. Гесфорд** (Scheduling the use of water power. Gessford John), Manag. Sci., 1959, 5, № 2, 179—191 (англ.)

Описывается модель оптимального управления запасами применительно к составлению графика использования воды на гидроэлектростанции в случае, когда изменения уровня воды в гидросистеме не совпадают с изменениями в потребностях на электроэнергию, а в случае недостатка мощностей гидростанции приходится дополнительно подключать в энергосистему более дорогие тепловые электростанции. Требуется минимизировать математическое ожидание суммарных издержек на производство электроэнергии за некоторый период $[0, T]$. Постановка задачи и методы ее исследования весьма близки к идеям Купманса (РЖМат, 1959, 714). Математически задача сводится к минимизации функционала $C[u(t)] = \int_0^T c[z(s) - u(s)]\,ds$ путем выбора режима $u(t)$, $w(t)$ при условиях: $0 \leqslant u(t) \leqslant z(t)$, $0 \leqslant V(t) = V(0) + \int_0^t [r(s) - u(s) - w(s)]\,ds \leqslant V^*$, $w(t) \geqslant 0$, где

$c(y)$ — выпуклая неубывающая функция издержек, $r(t)$ — скорость поступления воды в резервуар, $u(t)$ — скорость поступления воды из резервуара на турбину, $z(t)$ — спрос на электроэнергию, выраженный через скорость поступления воды на турбину, $w(t)$ — переполнение резервуара, $V(t)$ — объем воды в резервуаре, $V^*$ — объем резервуара.

Описывается оптимальное поведение в использовании воды для выпуклой функции издержек, а также для случая, когда водный режим реки известен на всем промежутке $[0, T]$. Приведен числовой пример.

А. А. Корбут

**4375 К. Экономические модели. Введение. Бич** (Economic models. An exposition. Beach E. F., New York, John Wiley and Sons, Inc., London, Chapman and Hall, Ltd, 1957, XII, 227 pp., ill.) (англ.)

Книга, по замыслу автора, призвана решить две задачи — во-первых, дать возможность экономистам, обладающим ограниченными математическими познаниями, приобрести сведения и навыки для активного участия в исследовательской работе; во-вторых, помочь студенту-экономисту в овладении простым математическим аппаратом применительно к математическому моделированию экономических явлений и исследованию их простейших закономерностей.

Во введении (4 стр.) отмечается постоянно возрастающая роль упрощенных модельных схем при изучении количественных взаимоотношений в экономической теории. Под экономической моделью автор понимает некоторый набор переменных, имеющих наглядный экономический смысл, и соотношений между ними, выраженных, как правило, в виде уравнений. Здесь же автор вводит понятия математических и эконометрических моделей, представляющих формальные соотношения между экономическими параметрами. В эконометрических моделях находят более полное отражение вероятностные моменты.

Первая часть книги посвящена математическим моделям.

В гл. 2 (13 стр.) описаны простейшие понятия, используемые при построении экономических моделей, такие как аргумент, функция, уравнение. В качестве иллюстрации приведена линейная модель, описывающая потребление сахара в США; дана ее геометрическая интерпретация. Даны основы классификации экономических моделей — линейные и нелинейные модели, статические и динамические, стохастические и детерминированные, микромодели и макромодели.

В гл. 3 (30 стр.) описываются простейшие линейные модели. В гл. 4 (18 стр.) изучаются нелинейные модели, которые получаются из рассмотренных в предыдущей главе добавлением нелинейных членов. Углубляется понятие равновесия в экономике (определяется устойчивость, неустойчивость, нейтральность равновесия). Бегло рассмотрены модели Кейнса, Хикса, Модильяни. В гл. 5 (29 стр.) детальнее изучается влияние фактора времени. Для описания непрерывных динамических моделей привлекаются простейшие линейные дифференциальные уравнения и системы. В гл. 6 (19 стр.) рассматриваются модели, описываемые с помощью разностных уравнений. Такие модели автор называет секвенциальными.

Вторая часть книги посвящена описанию эконометрических моделей. В гл. 7, 8, 9 (70 стр.) автор элементарно излагает некоторые основные понятия теории вероятностей и статистики. В гл. 10 (23 стр.) делается попытка проиллюстрировать построение эконометрических моделей.

Книга завершается некоторыми довольно общими и расплывчатыми соображениями об экономическом моделировании и приложении статистических методов в эконометрике.

В конце каждой главы приводятся элементарные упражнения и литература. Цитируется большое количество журнальных статей и книг. Имеются опечатки.

Л. И. Горьков

## ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

**4376. Статистическое исследование нестационарных процессов в линейных системах с применением инверсных моделирующих устройств. Солодов А. В.,** Автоматика и телемеханика, 1958, **19**, № 4, 312—324

Дается практический метод вычисления интегралов типа

$$\int_0^t \int_0^t W(t, \xi) W(t, \eta) K(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta$$

($W(t, \xi)$ и $K(\xi, \eta)$ — заданные функции) с помощью специальных моделирующих устройств, более удобный, чем метод, описанный в гл. 6 книги: Лэнинг Дж., Бэттин Р., Случайные процессы в задачах автоматического управления, М., Изд-во ин. лит., 1958. Отмечается значение таких вычислений при статистическом исследовании нестационарных процессов в линейных системах.

А. М. Яглом

**4377. Методы математической статистики и теория автоматического управления. Солодовников В. В., Батков А. М., Бредис А. А., Матвеев П. С.** В сб.: Автомат. управление и вычисл. техн. М., Машгиз, 1958, 7—28

Обзорная статья, отмечающая некоторые новые направления в теории автоматического управления, связанные с использованием современных средств математической статистики (в первую очередь, теории информации, теории игр и теории решающих функций). Библ. 37 назв.

А. М. Яглом

**4378. Географическое изображение квадратичных значений — геометрический метод синтеза оптимальных сервосистем. Чжан** (The root square locus plot- a geometrical method for synthesizing optimum servo systems. Chang S. S. L.), IRE Nat. Convent. Rec., 1958, **6**, № 4, 79—87 (англ.)

Рассматриваются два критерия оптимальности сервосистем: условный критерий, формулируемый в терминах интеграла по времени от квадрата ошибки (этот критерий удобен при отсутствии точных данных о статистических характеристиках сигналов и шумов), и статистический критерий — обычный критерий минимума среднего (в статистическом смысле) квадрата ошибки. При использовании статистического критерия качества нахождение оптимальной системы может быть осуществлено с помощью известного метода А. Н. Колмогорова — Н. Винера; дается графическая интерпретация получаемого на этом пути аналитического решения и специально рассматривается случай, когда система подвергается нескольким различным типам возмущений (например, кроме обычного „шума", имеются еще случайные „пульсации нагрузки").

А. М. Яглом

**4379. Методика определения оптимальной импульсной переходной функции для одного класса воздействия. Матвеев П. С.,** Автоматика и телемеханика, 1959, **20**, № 1, 3—15 (рез. англ.)

Рассматривается задача об оптимальной несмещенной линейной фильтрации сигнала $y(t)$ (заданного на конечном интервале $-T < t < 0$), представляющего собой сумму регулярной (не случайной) функции $g(t)$, являющейся линейной комбинацией экспоненциальных и три-

спектрических (синусов и косинусов) функций, и стационарной случайной функции $m(t)$. Шум $n(t)$ также предполагается стационарной случайной функцией (некоррелированной с $m(t)$); спектральная плотность $S(\omega)$ процесса $m(t)+n(t)$ считается рациональной функцией $\omega$. Приведенное решение задачи, естественно, не отличается от решения той же задачи, имеющегося в книге: Лэнинг Дж., Бэттин Р., Случайные процессы в задачах автоматического управления, М., 1958. В заключение приведено два конкретных примера, иллюстрирующие общее решение. А. М. Яглом

**4380. О полнодоступном пучке линий с отрицательно-экспоненциальным распределением времени занятия, обслуживающем процесс восстановления.** Бенеш (On trunks with negative exponential holding times serving a renewal process. Beneš Václav E.), Bell System Techn. J., 1959, 38, № 1, 211—258 (англ.)

Рассматривается полнодоступный пучок из $N$ линий, на который поступает произвольный поток вызовов, образующий процесс восстановления. Это означает, что если $t_k$ и $t_{k+1}$ моменты появления двух последовательных вызовов, то $P\{t_{k+1}-t_k<u\}=A(u)$ независимо от $k$, где $A(u)$ — произвольная функция распределения, удовлетворяющая условию $A(0)=0$. Если $N(t)$ — число разговоров в момент $t$, то $N(t)$ является марковским процессом только в случае пуассоновского потока, для которого $A(u)=1-\exp\{-u/\mu_1\}$, где $u\geqslant 0$ и $\mu_1>0$. Обозначим $N(k)=N(t_k-0)$, $p_n=\lim\limits_{k\to\infty}P\{N(k)=n\}$ $(0\leqslant n\leqslant N)$,

$$a_n=\int_0^\infty e^{-n\gamma u}\,dA(u)\quad (1\leqslant n\leqslant N),$$

где $\gamma$ — обратная величина для среднего времени занятия линий.

Теорема 2. Стационарным распределением для $N(k)$ является $\{p_n\}$, причем вероятность потери равна

$$p_N=\left\{1+\sum_{j=1}^{N}\binom{N}{j}\frac{(1-a_1)\dots(1-a_j)}{a_1\dots a_j}\right\}^{-1}$$

Теорема 4. Вероятность потери удовлетворяет неравенству

$$(1-a_1+a_N)^{-N}\leqslant\frac{p_N}{a_1a_2\dots a_N}\leqslant(1+a_1-a_N)^{-N}$$

Теорема 10. Если $\gamma$ и $\mu_1$ — фиксированные положительные постоянные, то для любого $\varepsilon>0$ можно найти такую функцию распределения $A(u)$, что $p_N(A)\geqslant 1-\varepsilon$, т. е.

$$\sup_A\{p_N(A)\mid\int u\,dA(u)=\mu_1\}=1.$$

Для функции корреляции $R(n)$ случайного процесса $N(k)$

$$R(n)=\lim_{k\to\infty}\{E[N(k)N(k+n)]-E^2[N(k)]\}$$

выводится следующая формула:

Теорема 15.

$$R(n)=R(-n)=\frac{m_1(a_1-a_1^{n-1})}{1-a_1}+a_1^n m_2$$

$$-m_1^2-\sum_m m p_m\sum_{j=0}^{n-1}a_1^{j-1}P\{N(n-j-1)=N\mid N(0)=m\},$$

где $m_n=\sum\limits_m m^n p_m$ $(n=1,2,3,\dots)$. Приводится большое количество числовых примеров для пуассоновского, равномерного и регулярного потока вызовов.

Г. П. Башарин

**4381. Селекционные индексы при ограничениях.** **Кемпторн, Нордског** (Restricted selection indices. Kempthorne Oscar, Nordskog Arne W.), Biometrics, 1959, 15, № 1, 10—19 (англ.)

Находятся коэффициенты линейной формы $I=\sum_{j=1}^{m}b_jP_j$, при которых достигает максимума коэффициент корреляции между $I$ и $H=\sum_{i=1}^{m}a_ig_i$ при дополнительных условиях, что $\operatorname{cov}(I,\sum_{j=1}^{m}c_{jk}g_j)=0$; $k=1,2,\dots,r$; $r<m$. Обозначения: $a_i, c_{jk}$ — известные постоянные; $g_i$ — случайные величины с известной корреляционной матрицей; $P_i=g_i+E_i$, где $E_i$ не зависят от $g_1, g_2, \dots, g_m$; корреляционная матрица $P_i$ также известна. Эта задача возникает, когда нужно оценить прогресс признака при селекции, оставляющей некоторые свойства неизменными. Приведен конкретный пример из селекционной практики. С. С. Кислицын

**4382. Равновесия в автотетраплоидах при естественном отборе для упрощённой модели жизнеспособности.** **Парсонс** (Equilibria in auto-tetraploids under natural selection for a simpliflied model of viabilities. Parsons P. A.), Biometrics, 1959, 15, № 1, 20—29 (англ.).

Рассматривается вероятностный процесс, заданный соотношениями:

$$S_n u_{n+1}=au_n^2+bu_nv_n+\frac{1}{6}(v_n^2+2u_nw_n),$$

$$S_n v_{n+1}=bu_n v_n+\frac{2}{3}(v_n^2+2u_nw_n)+bv_nw_n, \qquad (1)$$

$$S_n w_{n+1}=\frac{1}{6}(v_n^2+2u_nw_n)+bv_n w_n+aw_n^2,$$

где $u_n$, $v_n$, …, $w_{n+1}$ — вероятности гаметных генотипов $GG$, $Gg$ и $gg$ в $n$-м и $(n+1)$-м поколениях (отсюда следует, что $S_n$ равно сумме правых частей (1)); $a$, $B$, $1$, $B$, $a$ — жизнеспособности генотипов зигот $G_4(GGGG)$, $G_3g$, $G_2g_2$, $Gg_3$, $g_4$.

Найдены все предельные состояния при различных $a$ и $b$; исследована их устойчивость. С. С. Кислицын

**4383. Характеристика выполнения логических заданий, содержащих некоторую неопределенность, с помощью количественных показателей.** **Рапопорт** (Quantification of performance in a logical task with uncertainty. Rapoport A.), Sympos. Inform. Theory in Biol. (Gatlinburg, Tenn., Oct. 29th—31st, 1956). London—New York—Paris—Los Angeles, Pergamon Press, 1958, 230—238 (англ.)

Приводятся некоторые (не вполне четкие) соображения в пользу использования в теории информации субъективных («психологических») вероятностей, например, для оценки информации, получаемой при решении некоторой точно поставленной математической задачи (при обычном понимании вероятностей эта информация, разумеется, оказывается равной нулю). Далее описываются специальные психологические опыты, в которых испытуемый стремится быстрее всего добиться определенного результата при помощи испытаний, содержащих

некоторую степень произвола, и дается их теоретико-информационное истолкование. А. М. Яглом

**4384. Антигенетическая специфичность. Ярослов, Квастлер** (Antigenic specificity. Jaroslow Bernard N., Quastler Henry), Sympos. Inform. Theory in Biol. (Gatlinburg, Tenn., Oct. 29th—31st, 1956). London—New York—Paris—Los Angeles, Pergamon Press, 1958, 211—217 (англ.)

Экспериментальная работа по биологии, использующая идеи теории информации как при планировании эксперимента, так и при истолковании полученных данных. А. М. Яглом

**4385. Некоторые явления, связанные с перепонками, с точки зрения теории информации. Брансон** (Some membrane phenomena from the point of view information theory. Branson Herman), Sympos. Inform. Theory in Biol. (Gatlinburg, Tenn., Oct. 29th—31st, 1956). London—New York—Paris—Los Angeles, Pergamon Press, 1958, 197—203 (англ.)

Обсуждаются биологические явления, связанные с наличием полупроницаемых перепонок или других тканей, создающих перемещение каких-либо химических веществ против градиента их концентрации. Согласно законам термодинамики такие перепонки приводят к убыванию энтропии, что можно рассматривать также как создание определенной информации. Оценивается скорость создания информации некоторыми специальными биологическими перепонками. А. М. Яглом

**4386. Основополагающие замечания относительно приложимости теории информации к оптике. Шобер** (Grundlegende Bemerkungen zur Anwendbarkeit der Informationstheorie auf die Optik. Schober Herbert), Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau, 1957, 3, № 3-4, 273—276 (нем.)

Обзорная статья о приложениях теории информации в оптике. Указываются следующие две основные области оптических приложений понятий теории информации: 1) изучение с точки зрения теории информации преобразования реальных объектов в их изображения, даваемые некоторой оптической системой (объект рассматривается как «сигнал на входе канала связи», а его изображение — как «сигнал на выходе этого канала») и 2) теоретико-информационное изучение пропускной способности зрительных нервов, являющееся интересной частью физиологической оптики. Библ. 16 назв.

А. М. Яглом

**4387. Информационное содержание данных опытов по прослеживанию переходов в устойчивых системах. Берман, Шёнфелд** (Information content of tracer data with respect to steady-state systems. Berman Mones, Schoenfeld Robert L.), Sympos. Inform. Theory in Biol. (Gatlinburg, Tenn., Oct. 29th—31st, 1956). London—New York—Paris—Los Angeles, Pergamon Press, 1958, 181—186 (англ.)

Рассматривается система, состоящая из $n$ составных частей, между которыми непрерывно (но стационарным образом) происходит обмен молекулами. Указывается метод количественного выражения информации о параметрах системы, содержащейся в данных опытов с «мечеными молекулами». Делаются некоторые замечания относительно степени неопределенности подобных данных, связанной с их возможной неполнотой и со случайными пульсациями, характеризующими процесс молекулярного обмена. А. М. Яглом

**4388. Инварианты однородной и изотропной турбулентности в сжимаемой вязкой жидкости. Ситников К. А.**, Докл. АН СССР, 1958, **122**, № 1, 29—32

Из законов сохранения количества движения, массы и полной энергии выводится, что некоторые 4 интеграла от корреляционных функций полей величин $\rho v_i$, $i = 1, 2, 3$ (где $\rho$ — плотность жидкости, $v_i$ — компоненты скорости потока), $\rho$ и $\rho U$ ($U$ — полная энергия единицы массы жидкости) в случае однородной и изотропной турбулентности в сжимаемой жидкости являются интегралами движения. В случае несжимаемости жидкости из этих четырех интегралов три обязательно обращаются в нуль; однако можно построить конкретный пример сжимаемого потока, для которого все четыре инварианта отличны от нуля (и принимают произвольные заранее заданные значения, удовлетворяющие естественным ограничениям типа положительности). Далее с помощью спектральной теории однородных и изотропных случайных полей (ср. работу референта: Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз., 1948, **12**, № 6, 501—522) выводится закон затухания однородной и изотропной турбулентности в сжимаемой вязкой жидкости на последнем этапе вырождения (когда можно пренебречь нелинейными членами уравнений гидродинамики).

А. М. Яглом

**4389. Средняя начальная скорость движения конца двумерной цепочки. Лангебартел** (Average initial velocity of the terminus of a two-dimensional linkage. Langebartel R. G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 1, 128—132 (англ.)

Молекула полимера, состоящая из $n+1$ атомов, представляется в виде последовательности твердых стержней длин $a_i$, лежащих в плоскости и соединенных шарнирами. Пусть $\omega_i$ — начальные скорости изменения углов между соседними стержнями ($\omega_1$ — начальная скорость вращения первого стержня относительно его свободного конца). Рассматриваются цепочки, у которых расстояние между началом и концом (т. е. между первым и $n+1$-м атомами) имеет фиксированное значение $r$. Решается задача о нахождении среднего по всевозможным таким цепочкам значения угловой скорости движения конца цепочки ($n+1$-го атома) относительно ее начала. Для этого среднего значения, зависящего от заданных $a_i$, $\omega_i$ и $r$, выводится общая формула. В частном случае, когда все $a_i$ равны $a$, эта формула принимает простой вид $E = \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i}{i}$, независимо от значений $r$ и $a$. А. С. Монин

**4390. Относительно неоднородности в имущественном страховании. Часть 2. Гренандер** (Om heterogeneity in non-life insurance. Part 2. Grenander Ulf), Skand. aktuarietidskr., 1957 (1958), № 3-4, 153—179 (англ.)

Объяснение введенных здесь обозначений см. РЖМат, 1959, 8330. Рассматриваются различные методы получения линейных оценок $G^*(\lambda)$ распределения $G(\lambda)$ с помощью величин $n_\nu$. Распределение $G^*(\lambda)$, получающееся по методу максимума функции правдоподобия $L(G) = \prod_{\nu=0}^{\infty} \left[ \int_0^\infty e^{-\lambda} \frac{\lambda^\nu}{\nu!} dG(\lambda) \right]^{n_\nu}$, принадлежит классу $C$ распределений, сосредоточенных в конечном числе точек $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$. В предположении, что $G(\lambda) \in C$ и точкам $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ соответствуют вероятности $q_1, \ldots, q_s$, строятся несмещенные оценки $q_i^*$ с помощью уравнений $n_\nu = \sum_{i=1}^{s} q_i^* e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^\nu}{\nu!}$ ($\nu = 0, \ldots, s-1$), а также методом минимизации величины $\sum_{\nu=0}^{\infty} \left( n_\nu - \sum_{i=1}^{s} \frac{\lambda_i^\nu}{\nu!} e^{-\lambda_i} q_i \right)$.

Для случая известной ковариационной матрицы величин $n_\nu$ дается способ нахождения оценок $q_i^*$ с наименьшей сре-

ди всех линейных несмещенных оценок дисперсией. Отмечается, что если $s$ достаточно большие, то выгоднее рассматривать смещенные оценки, так как дисперсия несмещенной оценки неограниченно растет с ростом $s$.

Для конкретного распределения $G(\lambda)$ вычислены ковариационная матрица оценок $q_i^*$ и дисперсии оценок $G^*(\lambda_i)$, соответствующих трем последним методам, причем наибольшие дисперсии соответствуют первому методу, а наименьшие — последнему, требующему, однако, большей вычислительной работы, чем предыдущие. Развитая теория иллюстрируется численными примерами.

М. И. Фортус

**4391. Анализ гидрогеологических данных методами математической статистики. Беляев Б. И.,** Научн. тр. Моск. горн. ин-т, 1959, сб. 25, 57—67

**4392. Изучение вопросов заработной платы с помощью особых карт. Каваками Колзи, Сакума Тэруо,** Хинсицу канри, Statist. Quality Control, 1958, ноябрь, спец. вып., 13—16 (японск.)

**4393. К статистическому исследованию анамнеза в международной медицине. Сакино** (Sakino Shigeki), Токэй сури кэнкюсё ихо, Proc. Inst. Statist. Math., 1955, 2, № 2, 39—46 (японск.; рез. англ.)

**4394. Об эффективности лекарственных доз. Кобаяси Хироси, Тадзака Сигэо,** Хинсицу канри, Statist. Quality Control, 1958, ноябрь, спец. вып., 113—116 (японск.)

**4395. Определение уровня контроля. Ито Сидзуо,** Хинсицу канри, Statist. Quality Control, 1958, ноябрь, спец. вып., 27—30 (японск.)

**4396. Об отклонениях и точности данных, полученных при опытных подсчетах продолжительности жизни, подчиненной нормальному закону. Исида Макото, Тагами Сигэёси,** Хинсицу канри, Statist. Quality Control, 1958, ноябрь, спец. вып., 10—13

**4397. О методах проверки качества. Сато Макото,** Хинсицу канри, Statist. Quality Control, 1958, ноябрь, спец. вып., 133—137 (японск.)

**4398. Определение качества отливок по внешнему виду. Сакаи Наоёси,** Хинсицу канри, Statist. Quality Control, 1958, ноябрь, спец. вып., 121—126 (японск.)

**4399. Обобщенные данные об исключительных случаях в вопросах зазоров при установке подшипников. Ока Микио,** Хинсицу канри, Statist. Quality Control, 1958, ноябрь, спец. вып., 45—48 (японск.)

**4400. Количество наблюдений при хронометраже производственных процессов. Кавасэ Такэси,** Хинсицу канри, Statist. Quality Control, 1958, ноябрь, спец. вып., 69—72 (японск.)

**4401. Определение эффективности механизмов на заводах, выпускающих кабели связи. Хираока Акиро, Ясиро Рюдзи.** Хинсицу канри, Statist. Quality Control, 1958, ноябрь, спец. вып., 38—40 (японск.)

**4402. Оценивание измерений горизонтальных углов по способу Гаусса — Шрейбера (доверительный эллипсоид). Гиллерт Г.,** Вестн. Ленингр. ун-та, 1959, № 7, 140—142 (рез. англ.)

**4403 К. Планирование экспериментов в промышленности. Под ред. Чу** (Experimental Designs in Industry (Sympos. Inst. Statist. North Carolina State Coll., Raleigh, Nov. 5th—9th, 1956). Ed. Chew Victor. New York, John Wiley and Sons, Inc.; London, Chapman and Hall, Ltd, 1958, XII, 268 pp., ill.) (англ.)

В колледже штата Северная Каролина 5—9 ноября 1956 г. состоялся симпозиум по вопросам применения статистических методов в промышленности. Настоящий сборник статей составлен из материалов этого симпозиума. Сборник состоит из двух частей. В первой части дается обзор статистических методов, применяющихся в промышленных исследованиях. Во второй части приводятся различные конкретные примеры применений этих методов.

Б. А. Севастьянов

**4404 К. Анализ прямолинейных данных. Актон** (Analysis of straight-line data. Acton Forman S. New York, John Wiley and Sons, Inc.; London, Chapman and Hall, Ltd, 1959, XIV, 267 pp., ill. (англ.)

При обработке экспериментального материала в различных областях науки и техники часто требуется выявить линейные зависимости между величинами, подверженными случайным погрешностям. Наиболее рациональная методика обработки в этих случаях может быть математически обоснована, если сделать надлежащие предположения о характере распределения погрешностей измерения или, как часто говорят, произвести выбор подходящей модели данного эксперимента. Настоящая весьма оригинально написанная книга знакомит читателя с различными приемами обработки экспериментов, их теоретическим обоснованием, оценкой полученных результатов, оценкой точности, интер- и экстраполяции и различными приложениями развитой теории. Попутно рассматриваются и некоторые чисто статистические задачи и критерии.

Приводим оглавление книги: 1. Выбор модели; 2. Классическая модель: $x$ известно точно, дисперсия $y$ постоянна; 3. Регрессия по нескольким значениям $y$ для каждого данного $x$; 4. Выборки из двумерной нормальной совокупности; 5. Регрессия в случае, когда как $x$, так и $y$ подвержены ошибкам; 6. Некоторые линии; анализ дисперсии; 7. Представление кривых: ортогональные многочлены; 8. Использование преобразований; 9. Отбрасывание неподходящих данных; 10. Накапливаемые данные: линия Фэдинга.

Н. В. Смирнов

**4405. Таблицы для конечной очереди. Пек, Хейзелвуд** (Finite Queuing tables. Peck L. G., Hazelwood R. N. New York, John Wiley and Sons, Inc.; London, Chapman and Hall, Ltd, 1958, XVI, 210 pp.) (англ.)

Таблицы предназначаются для лиц, использующих на практике современную теорию скученности для определения качества обслуживания при данном числе потребителей (абонентов), данном числе обслуживающих устройств (линий и среднем времени занятия.

Н. В. Смирнов

---

**См. также:** 4157, 4219

## ГЕОМЕТРИЯ

Редакторы *С. П. Фиников, А. М. Васильев, Н. М. Остиану*

**4406. Геометрия замечательных элементов. Несколько точек, прямых и окружностей. Михалеску** (Geometria elementelor remarcabile. Cîteva puncte, drepte şi cercuri. Mihalescu Constantin. Bucureşti, Ed. tehn., 1957, 523 p., il.) (рум.)

**4407. Эйлер и кинематика. Бляшке** (Euler und die Kinematik. Blaschke Wilhelm), Leonhard Euler 250. Geburtstag. Berlin, Akad. Verl., 1959, 35—41 (нем.; рез. русск.)

Исходя из эйлерова параметрического представления вращений евклидова пространства около точки, выводятся важнейшие соотношения между сферической кинематикой и эллиптической геометрией, причем используются кватернионы, впервые введенные Эйлером. При этом получается естественным образом применение «канонической координатной системы». Тогда при помощи принципа перенесения Ельмслева — Штуди может быть легко осуществлено формальное распространение на пространственную кинематику. Резюме автора

**4408 К. Геометрия для технических, коммерческих, сельскохозяйственных, индустриальных, мореходных институтов, а также для землемеров и для I и II классов. Геометрия на плоскости и в пространстве. Фортини** (La geometria per gli istituti tecnici, commerciali, agrari, industriali, nautici e per geometri. Per la la e per 2a cl. Geometria del piano e dello spazio. Fortini Roberto. Firenze, F. Monnier, 1958, XII, 516 p., ill., 1600 L.), Bibliogr. naz. ital., 1958, **1**, № 7, 262 (итал.)

**4409 К. Геометрия. Т. II. Тиц** (Geometrie. Handbuch der Physik. Bd. 2. Tietz H. Berlin-Göttingen — Heidelberg, 1955, S.117—197, 88.00 DM) (нем.)

Эта часть второго тома учебника физики дает хороший обзор тех геометрических идей, которые наиболее важны для физиков. Содержание: A. Элементарная аналитическая геометрия: I. Векторное исчисление; II $n$-мерная геометрия и матрицы, ортогональные преобразования; III. Проективная геометрия, эллиптическая, гиперболическая и параболическая геометрия. B. Элементарная дифференциальная геометрия: I. Кривые; II. Поверхности. C. Элементарная теория поля, Гаусс, Стокс, Пуассон. Д. «Высшая» геометрия: I. Исчисление Риччи, параллелизм, $V_n$ и $W_n$; II. Спиноры; III. Контактные преобразования. Имеются ссылки и список литературы.

J. A. Schouten

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 10, 1121.

**4410 К. Внешние дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Дедеккер** (Equations différentielles extérieures et calcul des variations. Dedecker Paul (Colloque de topologie et géométrie différentielle, Strasbourg, 1952, № 3). Bibl. Nat. et Univ. Strasbourg, 1953, 14 p.) (франц.)

**4411 Д. Обобщенные решения вполне интегрируемых систем Пфаффа. Боровский Ю. Е.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1959

## ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

**4412. О разбивке кривой способом продолженных хорд. Муйжнек Г.**, Eesti Põllumaj. Akad. teadusliku tööde kogumik. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1959, № 6, 240—245 (рез. эст.)

Рассматривается построение точек окружности, используемое в геодезии. Автор подвергает применяемый для этого известный способ продолженных хорд детальному исследованию и критикует имеющиеся в этой области приемы. Автор рекомендует приближенно принимать за крайнее перемещение половину промежуточного перемещения и оценивает величину получающейся при этом погрешности $\Delta$. Практически, при $s$ (длина хорды) $< 20\,м$ и $s < \frac{r}{4}$, $\Delta < 0{,}5\,см$. Н. В. Наумович

**4413. Внутренняя геодезия и общие свойства картографических отображений. Минео** (Geodesia intrinseca e proprietà generali delle rappresentazioni cartografiche. Mineo Corradino), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. fis., mat. e natur., 1955, **18**, 569—576 (итал.)

Статья, написанная в резко полемической манере, посвящена критике попыток итальянского профессора геодезии Марусси (A. Marussi) реформировать основания геодезии посредством изучения „истинной локальной структуры геоида". (Свои идеи Марусси изложил на Восьмой генеральной ассамблее Международного геодезического и геофизического союза в Осло в августе 1948 г., а также в ряде статей, опубликованных в итальянских научных журналах, и в монографии Fondamenti di Geodesia intrinseca, 1951, Milano). Автор ставит в вину Марусси чрезмерную абстрактность и неясность его исходных принципов, наличие фактических ошибок в математических выводах и доказательствах (например, при установлении уравнений Майнарди — Кодацци для поверхностей $\varphi = \text{const}$. и $\lambda = \text{const}$.), неоригинальность ряда объявленных им результатов (в частности, в вопросе о геодезических отображениях, изученном еще Дини) и т. п. Ю. М. Гайдук

**4414. Исследования по математической картографии. Маруяма** (Some investigations in mathematical cartography. Maruyama Takaharu. J. Gakugei, Tokushima Univ. (Nat. Sci.), 1954, **4**, 48—53) (англ.)

Рассмотрено некоторое расширение обобщенной конической проекции, описанной Кёнигом и Вейзе (König, Weise, Mathematische Grundlagen der höheren Geodäsie und Kartographie, Bd. 1, 1951, Berlin, Springer). Преобразование $\Lambda = \exp f(M)$, где $M$ — комплексная долгота Кёнига, рассматривается при условии, что искажение проекции и ее производные равны нулю в начале координат. N. A. Hall

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 11, 981.

**4415. Применение методов параллельного перемещения к решению основной задачи пространственной графостатики. Радов Е. А.**, Тр. Укр. конференции по вопр. начерт. геометрии и инж. графики. Киев, 1958, 102—108

Основной задачей пространственной графостатики является задача „о трех неизвестных" усилий в трех стержнях, сходящихся в узле $S$ и не лежащих в одной плоскости, если к $S$ приложена сила $R$. Для определений усилий в стержнях узла $S$, находящегося в равновесии, кроме аналитического метода, пользуются начертательной геометрией, применяя к ортогональным проекциям разного рода преобразования.

Автор предлагает способ преобразования проекций, названный способом параллельного смещения и сочетает его с графической интерпретацией аналитических методов проекций и моментов. Рассматривается случай, когда $R$ параллельна одной из плоскостей проекций. Перемещают систему сил параллельно горизонтальной плоскости проекций так, чтобы $R$ заняла положение фронтальной прямой в плоскости $V$. Искомые усилия раскладывают на составляющие параллельно $V$ и перпендикулярно $V$ и в результате система сил, находящихся в равновесии, сводится к трем составляющим, параллельным оси $y$ и к паре с моментом $Ry$, $y$ — расстояние от $S$ до $V$. Замена одной из искомых составляющей и момента $Ry$ новой равнозначащей силой и условия равновесия приводят все вычисления к элементарным операциям, позволяющим найти искомые величины составляющих усилий и сами усилия.

В. С. Люкшин

**4416. Об одном кинематическом свойстве, касающемся движения сферы как твердого тела в самой себе. Форте** (Di alcune proprietà cinematiche riguardanti il moto rigido di una sfera su se stessa. Forte Bruno. Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., 1953, **8**, 14, 765—770) (итал.)

Рассматривая движение сферы в самой себе в некоторый момент, автор обобщает понятие „кинематического пути" (cammino cinematico), введенное Собрero (Sobrero L., Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1950, **8**, № 8, 360—364). Две точки $P$ и $P'$

неподвижной, соответственно движущейся, сферы могут быть сопряженными точками $n$-го порядка. Для $n=2$ достаточно, чтобы $P$ и $P'$ лежали на окружности одного и того же большого круга через мгновенный центр, для $n=3$ они должны удовлетворять формуле Савари; геометрическое место сопряженных точек для $n=4$ — сферическая кривая третьего порядка. O. Bottema

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 7, 66.

**4417. О дугах кривых с некоторым экстремальным свойством.** Тамашши (Über Kurvenbögen, die gewisse Extrema liefern. Tamássy L. Publs math., 1959, 6, № 1-2, S. 90—100) (нем.)

Даны две прямые $a$, $b$, пересекающиеся в точке $O$ под углом $\alpha$, и на них две точки: $A$ на $a$ и $B$ на $b$. $OA \leqslant OB$. Назовем кривую допустимой, если она не выходит за пределы треугольника $OAB$, касается прямых $a$, $b$ в точках $A$, $B$ соответственно и имеет непрерывную неотрицательную кривизну, которая в точках $A$, $B$ обращается в нуль. Требуется найти ту допустимую кривую, которая имеет наименьшую максимальную кривизну.

Пусть $\varkappa_0$ — кривизна окружности с центром на биссектрисе $f$ угла $AOB$, касающейся прямой $a$ в точке $A$.

Теорема. Максимальная кривизна допустимых кривых превышает $\varkappa_0$, но для любого положительного $\varepsilon$ существует допустимая кривая, максимальная кривизна которой не превышает $\varkappa_0+\varepsilon$.

Таким образом, задача не имеет решения. Автор рассматривает аналогичную вторую задачу, где к допустимым кривым предъявлено еще одно требование: отношение приращений кривизны и длины дуги должно быть ограниченным:

$$\left|\frac{\Delta\varkappa}{\Delta s}\right| \leqslant m.$$

Рассматривается семейство кривых, выходящих из точки $A$ и касающихся прямой $a$:

$$\varkappa^{\eta}(s)=\begin{cases} ms, & \text{если } s \leqslant \dfrac{\eta}{m}, \\ \eta, & \text{если } s > \dfrac{\eta}{m}, \end{cases}$$

где $\eta$ — параметр семейства. Указано уравнение для нахождения значения $\eta$, которым определяется единственная кривая семейства $\overline{C}$, пересекающая биссектрису $f$ угла $AOB$ в некоторой точке $R$ ортогонально. Но для того чтобы такая кривая $\overline{C}$ существовала, значение $m$ не должно быть слишком малым, именно: необходимо и достаточно, чтобы полная кривизна кривой $\varkappa(s)=ms$ от точки $A$ до точки встречи с биссектрисой $f$ была не меньше, чем $\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$. Если это условие выполнено, то допустимая кривая $L_0$, удовлетворяющая условиям второй задачи, существует и состоит из следующих трех дуг: а) дуги $\widehat{AR}$ кривой $\overline{C}$, б) ее зеркального отражения $\widehat{RA'}$ от биссектрисы $f$ и в) прямолинейного отрезка $A'B$.

Вторая задача представляет собою математическое содержание технической проблемы соединения двух прямолинейных участков железнодорожного пути криволинейным участком так, чтобы при этом развивалась наименьшая центробежная сила. А. М. Комиссарук

**4418. Геометрическое представление общих четырехполюсников с потерями, включенных последовательно.** Бур (Die geometrische Darstellungsweise hintereinandergeschalteter, allgemeiner, verlustbehafteter Vierpole. Buhr Johannde), Arch. electr. Übertrag., 1957, 11, № 4, 173—176 (нем.; рез. англ.)

**4419. Начертательная геометрия в термодинамике.** Ривкинд М. Я., Тр. Иркутского горнометаллург. ин-та, 1958, вып. 16, 184—215

Если в пространстве по осям $Ox$, $Oy$, $Oz$ будем откладывать соответственно величины давления $P$, объема $V$, температуры $T$, которыми обладает идеальный газ, то любое уравнение относительно $P$, $V$, $T$, выражающее тот или иной закон термодинамики идеальных газов, изображается в пространстве кривой линией или поверхностью. Такие линии и поверхности строятся в эпюре Монжа.

В. А. Маневич

## ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

**4420. Об одной ошибке в школьных учебниках геометрии.** Базылев В. Т., Уч. зап. Моск. гор. пед. ин-та им. В. П. Потемкина, 1959, 95, 215—217

Формулировка теоремы: Геометрическое место точек, равноудалённых от сторон угла, есть биссектриса этого угла — является неверной, так как стороны угла суть не прямые, а лучи и определение расстояния от точки плоскости до луча требует уточнения. Поэтому целесообразнее из курса геометрии эту теорему устранить, а говорить лишь о геометрическом месте точек, одинаково удаленных от двух пересекающихся прямых.

А. И. Фетисов

**4421. О трисекции произвольного угла.** Финлай (On the trisection of an angle. Finlay Archibald H.), Math. Gaz., 1959, 43, № 343, 50—52 (англ.)

Из вершины $O$ данного угла описывается произвольным радиусом дуга окружности $AB$ (точки $A$ и $B$ на сторонах угла), на которой берется переменная точка $C$. На $OA$ выбирается точка $D$ так, чтобы $\angle CDA=30°$. На прямой $DC$ берется точка $P$ так, чтобы $DP=BC$. Геометрическое место точки $P$ есть кривая, пересекающая дугу $AB$ в точке трисекции. В непосредственной близости к точке трисекции эта кривая весьма близка к прямой линии. Далее приводится простейшее построение трисекции угла $AOB$. Откладываем $OA=OB$. На линейке отмечаем точки $D$ и $E$ так, чтобы $DE=OA$. Эта линейка располагается таким образом, чтобы прямая $DE$ проходила через точку $O$, точка $D$ находилась на отрезке $AB$, а $E$ — на полуокружности с центром в $A$ и радиусом $AO$. Тогда $\angle DOA=\frac{1}{3}\angle AOB$.

Н. В. Наумович

**4422. Об одной экстремальной задаче, связанной с кругом.** Томан (A note on a minimum property of the circle. Toman K.), Math. Gaz., 1959, 43, № 434, 46—48 (англ.)

Через произвольную точку внутри окружности проводятся всевозможные хорды и определяются величины углов, образуемых ими с этой окружностью. Показывается, что наименьший из этих углов получается в случае, если проведенная хорда перпендикулярна к диаметру, проходящему через ту же точку. Н. В. Наумович

**4423 К. Построения на плоскости, решаемые при помощи стереометрии.** Вигашши (Síkmértani szerkesztések térmértani megoldással. Vigassy Lajos. Budapest, Tankönyvkiadó, 1957, 99 l., ill.) (венг.)

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

**4424. О качении без скольжения одной кривой по другой.** Трайнин Я. Л., Уч. зап. Новосибирск. гос. пед. ин-та, 1954, вып. 9, 85—100

**4425. Кривая погони.** Хоземан (Verfolgungskurven. Hosemann R.), Naturforsch. und Med. Deutschland, 1939—1946 (1953), 3, 269—307 (нем.)

**4426. Замечание об уравнении касательной в обыкновенной точке кривой $F(x, y)=0$.** Гутьеррес-Ри-

**вего** (Nota sobre la ecuacion de la tangente en un punto ordinario de una curva $F(x, y)=0$. Gutiérrez Rivero Horacio), Gac. mat., 1958, **10**, № 5-6, 135—138 (исп.)

Простое практическое правило, позволяющее быстро найти уравнение касательной к данной алгебраической кривой в данной ее точке. Р. Н. Щербаков

**4427 К. Задачи по аналитической геометрии на образование линий и поверхностей. Гордевский Д. З.**, Харьков, Харьковск. ун-т, 1958, 51 стр., 1 р. 40 к.

## ПРОЕКТИВНАЯ И НЕЕВКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИИ

**4428. Некоторые вопросы теории полярности. Хаскин А. М.**, Тр. Укр. конференции по вопр. начерт. геометрии и инж. графики. Киев, 1958, 32—42

Рассматриваются хорошо известные из проективной геометрии вопросы, связанные с проектированием полярной системы абсолютной кривой пространства.

В. А. Маневич

**4429. Точечное преобразование проективной плоскости второго и третьего рода. Мураккини** (Sulle trasformazioni puntuali di seconda e terza specie fra piani proiettivi. Muracchini Luigi. Mem. Accad. sci. Torino, Cl. fis. mat. nat., 1955, **1**, 25—44) (итал.)

Общее точечное преобразование $T$ двух плоскостей определяет в общей точке три характеристических направления, т. е. те направления, которые сохраняют элементы перегиба. Преобразование $T$ относят ко второму (или третьему) роду, если в общей (регулярной) паре соответствующих точек совпадают два (или все три) характеристические направления. Следуя методу Борувка (Borůvka, Publ. fac. sci. Univ. Masaryk, 1926, **72**; 1927, 85), в этой работе автор улучшает и дополняет результаты Борувки и дает полную классификацию преобразований второго и третьего рода. Для каждого типа автор определяет фундаментальные инварианты и в некоторых случаях дает их геометрическую конструкцию.

C. Longo

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 2, 145.

**4430. Инвариант Мемке — Сегре и связки конических сечений. Фава** (Invariante di Mehmke—Segre e reti di coniche. Fava Franco), Atti Accad. Sci. Torino. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953—1954, **88**, № 1, 161—169 (итал.)

Определяются пары связок кривых второго порядка, для которых в каждой точке плоскости инволюция, связанная с инвариантом Мемке—Сегре, имеет порядок ниже обычного. Резюме автора

**4431. Краткий курс лекций по основаниям геометрии (применительно к программе педагогических институтов). Демидович М. К.**, Уч. зап. Марийск. гос. пед. ин-та, 1958, **22**, 208 стр., илл.

**4432. О связи полуплоскости Пуанкаре с гиперболической геометрией. Сас** (A Poincaré-féle félsík és a hiperbolikus síkgeometria kapcsolatáról. Szász Pál), Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1956, **6**, № 2, 163—184 (венг.)

Результаты автора опубликованы на немецком языке (РЖМат, 1955, 3883.) А. А. Бовди

**4433. Обоснование аналитической геометрии в гиперболической плоскости классическими методами, независимо от тригонометрии этой плоскости. Сас** (Begründung der analytischen Geometrie der hyperbolischen Ebene mit den klassischen Hilfsmitteln, unabhängig von der Trigonometrie dieser Ebene. Szasz Paul), Acta math. Acad. sci. hung., 1957, **8**, № 1-2, 139—157 (нем.)

**Гиперболическая тригонометрия как результат аналитической геометрии гиперболической плоскости. Сас** (Die hyperbolische Trigonometrie als Folge der analytischen Geometrie der hyperbolischen Ebene. Szasz Paul), Acta math. Acad. sci. hung., 1957, **8**, № 1-2, 159—161 (нем.)

Дается новое обоснование аналитической геометрии в гиперболической плоскости. Автор непосредственно вводит однородные координаты Вейерштрасса; определяет уравнение прямой, расстояние между двумя точками и расстояние точки до прямой в этих координатах. Другое обоснование дано Гильбертом (Hilbert D., Math. Ann., 1903, **57**, 137—150). А. А. Бовди

**4434. Квазиэллиптические пространства. Розенфельд Б. А.**, Тр. Моск. матем. о-ва, 1959, **8**, 49—70.

$n$-мерным квазиэллиптическим пространством $R_n^m$ называется $n$-мерное проективное пространство $P_n$, в котором заданы мнимый конус

$$\sum_a (x^a)^2 = 0 \quad (a = 1, 2 \ldots m), \tag{1}$$

с $(n - m - 1)$-мерной вершиной

$$x^a = 0 \tag{2}$$

и невырожденная мнимая квадрика

$$x^a = 0; \quad \sum_u (x^u)^2 = 0 \quad (u = m+1, \ldots, n). \tag{3}$$

Совокупность конуса (1) и квадрики (3) называется абсолютом пространства $R_n^m$, конус (1) — абсолютным конусом, квадрика (3) — абсолютной квадрикой, а плоскость (2) — абсолютной плоскостью этого пространства. При $m = 0$ квазиэллиптическое пространство $R_n^0$ будет $n$-мерным евклидовым пространством. Прямая, пересекающая абсолютный конус в двух точках, называется эллиптической прямой 1-го рода. Расстояние $\omega$ между ее двумя точками $X$ и $Y$ определяется по формуле

$$\cos^2\omega = \left(\sum_a x^a y^a\right)^2 \cdot \left[\sum_a (x^a)^2 \sum_a (y^a)^2\right]^{-1}$$

Прямые, целиком лежащие на абсолютной плоскости, называются эллиптическими прямыми второго рода. Расстояние $\omega$ между ее двумя точками $X$ и $Y$ определяется равенством: $\cos^2\omega = \left(\sum_u x^u y^u\right)^2 \cdot \left[\sum_u (x^u)^2 \times \right.$ $\left. \times \sum_u (y^u)^2\right]^{-1}$. Прямые, пересекающиеся с абсолютной плоскостью в одной точке, являются евклидовыми прямыми. Движениями пространства $R_n^m$ называются взаимно однозначные отображения этого пространства на себя, сохраняющие расстояния между точками. Движения пространства $R_n^m$ образуют группу, зависящую от $\frac{n(n+1)}{2}$ параметров. Квазиэллиптическое пространство $R_n^m$ можно рассматривать как метризованное квазиаффинное пространство $A_n^m$ ($n$-мерное проективное пространство $P_n$, фундаментальной группой которого является подгруппа коллинеаций, переводящих в себя некоторую $(n - m - 1)$ мерную плоскость). Движения пространства $R_n^m$ не исчерпывают всех коллинеаций, переводящих в себя абсолют. Эти последние образуют группу, называемую группой подобия. При преобразованиях подобия

расстояния между точками, лежащими на эллиптических прямых, не меняются, а расстояния между точками, лежащими на евклидовых прямых, умножаются на одно и то же число. Группа движений пространства $R_n^m$ является инвариантной подгруппой группы подобия. Метрические инварианты двух $m$-мерных плоскостей пространства $R_n^m$ с декартовыми матричными координатами $X$ и $Y$ совпадают с собственными числами матрицы $X - Y$. Эквидистантой в пространстве $R_n^m$ называется геометрическое место точек, отстоящих на данном расстоянии от $m$-мерной плоскости, называемой базой. Эквидистанта является квадрикой, обладающей $m$-мерными плоскими образующими, причем эта квадрика проходит через квадрику абсолюта и касается абсолютного конуса. Эти $m$-мерные плоские образующие эквидистанты паратактичны ее базе. В заключение методом прямоугольных матриц находятся метрические инварианты квадрик пространства $R_n^m$.

Р. М. Гейдельман

**4435 Д. Геометрия $m$-евклидовых пространств. Чахленкова Т. Г.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. гос. пед. ин-т, М., 1959

**4436 Д. Спинорные представления движений квазиевклидовых пространств. Аббасов Н. Т.** Автореф. дисс. физ.-матем. н., Азерб. ун-т, Баку, 1958

## НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

**4437. Проектирование при помощи скрещивающихся лучей. Руубель А.,** Eesti Põllumaj. Akad. teaduslike tööde kogumik, Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1959, № 6, 246—256 (рез. эст.)

Проектирование фигуры на плоскость осуществляется с помощью лучей конгруэнции первого порядка, нулевого класса. Эта конгруэнция состоит из прямых, принадлежащих пучку плоскостей с несобственной осью, в каждой плоскости которого лучи конгруэнции параллельны прямой, определяемой двумя точками пересечения взятой плоскости с двумя фиксированными скрещивающимися прямыми. С помощью указанного проектирования решается на чертеже задача о нахождении точек пересечения прямой с гиперболическим параболоидом.

В. А. Маневич

**4438. Некоторые вопросы исследования аксонометрических проекций. Хаскин А. М.,** Тр. Укр. конференции по вопр. начерт. геометрии и инж. графики. Киев, 1958, 9—31

Работа состоит из трех самостоятельных частей. В первой части решаются задачи на построение основных элементов косоугольной аксонометрии особым методом, заключающимся в том, что начало натуральной системы координат совмещается с плоскостью картины, и далее строится базис аксонометрического проектирования. Во второй части решается задача на построение аксонометрических осей по заданным показателям искажения. В последней части рассмотрен частный случай определения истинного вида плоской фигуры в методе двух изображений, когда вырождается ее главное изображение.

В. А. Маневич

**4439. Начертательная и конструктивная геометрия. Ребок** (Darstellende und konstruktive Geometrie. Rehbock F.), Naturforsch. und Med. Deutschland, 1939—1946 (1953), **3**, 259—261 (нем.)

**4440 К. Начертательная геометрия и ее приложения. 2-е издание. Делаше, Моро** (La géométrie descriptive et ses applications. 2e éd. Delachet André, Moreau Jean. Paris, Presses univ. France, 1959, 120 p., ill., 200 fr.), Bibliogr. France, 1959, **148**, № 22, 599 (франц.)

**4441 Д. Методы определения локальных характеристик кривых линий и поверхностей, заданных своими ортогональными проекциями. Михнев М. М.** Автореф. дисс. канд. техн. н., Моск. авиац. ин-т, М., 1958

**4442 Д. К вопросу о пересечении поверхностей второго порядка по плоским кривым. Гвоздев Ю. В.** Автореф. дисс. канд. техн. н., Киевск. инж.-строит. ин-т, Киев, 1959

## АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

**4443. Некоторые результаты в теории дифференциальных форм первого рода на алгебраических многообразиях. Накаи.** Сугаку, 1956, **7**, № 4, 236—237 (японск.). См. РЖМат, 1959, 8437.

**4444. Классические и новые идеи алгебраической геометрии. Манара** (Idee classiche ed idee moderne sulla geometria algebrica. Manara Carlo Felice), Period. mat., 1957, **35**, № 1, 1—13 (итал.)

Статья воспроизводит частью вступительную лекцию к курсу автора в университете Павии.

Зарождение алгебраической геометрии следует отнести ко времени, непосредственно следующему за возникновением геометрии аналитической: к примеру, «Enumeratio linearum tertii ordinis» Ньютона необходимо рассматривать как работу по алгебраической геометрии, причем предпочтительнее все работы геометрического характера с алгебраическими методами до XIX в. относить скорее к предыстории алгебраической геометрии, чем к ее истории, так как нельзя приурочивать начало этой доктрины ранее эпохи овладения теорией комплексных чисел. Начало алгебраической геометрии следует отнести ко времени работ Понселе. Далее возникло плодотворное взаимодействие алгебры и геометрии, обогащающее взаимно обе эти дисциплины. Как вначале принципу Понселе, так и дальнейшему пути развития алгебраической геометрии сопутствовали критика и дискуссии, которые содействовали ее систематизации и уточнению и которые почти всегда подтверждали силу интуиции великих геометров. Сами разнообразные течения общей математической мысли были источниками исторического развития алгебраической геометрии и в этом отношении нельзя обойти влияния на алгебраическую геометрию теории эллиптических функций и абелевых интегралов. Именно, труды итальянской геометрической школы: Кремона (Cremona), Сегре (C. Segre), Бертини (Bertini), Кастельнуово (Castelnuovo), Энрикеса (Enriques), Севери (Severi) — придали теории алгебраических функций тот классический вид, который она сохраняет как геометрическая теория алгебраических функций. Значительные трудности пришлось преодолеть в развитии теории алгебраических многообразий высших порядков, в частности в теории поверхностей; здесь, наряду с именами Севери, Кастельнуово, Энрикеса, следует назвать также Конфорто, Сегре (B. Segre).

Переходя к новым идеям, которые обращаются в алгебраической геометрии, следует отметить прежде всего распространение и рафинирование топологических методов и введение методов абстрактной алгебры. Первый из этих аспектов, можно сказать, возник по наследству от первых исследований алгебраической геометрии, когда была обнаружена связь теории алгебраических функций одного переменного с топологией замкнутой двусторонней поверхности. В дальнейшем Пикар в своей классической теории алгебраических дифференциалов изучал четырехмерное многообразие, изображающее точки алгебраической поверхности. Путь, намеченный Пикаром и Севери, был плодотворно разработан Лефшецем,

Кизини и др. Что касается проникновения в алгебраическую геометрию идей абстрактной алгебры, то, между прочим, это является признаком ее перехода (по диалектическому закону) с фазы открытий на фазу преимущественно критическую.

В заключение автор останавливается на вопросах: на каких основаниях перечисленные разнообразные доктрины объединяются под одним наименованием «Геометрии» и что имеется в них общего? С. С. Бюшгенс

**4445. Две теоремы алгебраической геометрии.** **Вейль** Сугаку, 1956, 7, № 4, 261—263 (японск.)

**4446. Плоские алгебраические кривые и квадратичные преобразования. Рионеро** (Curve algebriche piane e trasformazioni quadratiche. Rionero Mario), Period. mat., 1959, 37, № 2, 110—115 (итал.)

В качестве метода исследования некоторых алгебраических кривых предлагается использование простых квадратичных преобразований, при помощи которых порядок кривой понижается. Приводятся примеры.

Р. Н. Щербаков

**4447. О непосредственном выяснении независимости заданных рациональных точек на кубической кривой. Бюке** (Sur la recherche directe de l'indépendance de plusieurs points rationnels donnés d'une cubique. Buquet A.), Mathesis, 1959, 68, № 1-3, 24—37 (франц.)

Элементарные предложения теории абелевых групп применяются к изучению линейных зависимостей между точками из конечного множества на кубической кривой, рассматриваемой как групповое многообразие.

Ю. И. Манин

**4448. Метод малой вариации в задачах о действительных плоских алгебраических кривых (Часть 2). Поркy** (Il metodo di «piccola variazione» in problemi concernenti le curve algebriche piane reali. Parte 2a. Porcu Livio), Period. mat., 1958, 36, № 4, 239—250 (итал.)

Часть 1, см. РЖМат, 1959, 10378. Применение метода малой вариации к построению алгебраических кривых с заданным числом и расположением действительных ветвей.

Ю. И. Манин

**4449. Абстрактная теория исчезающих циклов. Игуса** (Abstract vanishing cycle theory. Igusa Junichi), Proc. Japan Acad., 1958, 34, № 9, 589—593 (англ.)

Пусть $C$ — неособая алгебраическая кривая рода $g$, определенная над полным дискретно нормированным полем $K$; $k$ — поле вычетов нормирования; $C'$ — специализация кривой $C$, продолжающая специализацию $K \to k$. Предполагается, что на $C'$ есть единственная особенность — обычная двойная точка. Специализация якобиева многообразия $J$ кривой $C$ есть замыкание $(J')_0$ многообразия Розенлихта кривой $C'$. Пусть $\Omega$ — группа точек порядка $n$, взаимно простого характеристикой поля $k$, на многообразии $J$; $\Omega'$ — аналогичная группа на $(J')_0$. Существует однозначно определенная подгруппа $\Omega_i \supset \Omega_v$, которая изоморфно специализируется на $\Omega'$. В $\Omega_i$ в свою очередь выделяется подгруппа $\Omega_v$, изоморфно специализирующаяся на циклическую подгруппу $n$-го порядка, точки которой лежат на групповом подмногообразии $(J')_0$, изоморфном мультипликативной группе универсальной области над $k$. $\Omega_v$ называется группой исчезающих точек порядка $n$; в классической теории $\Omega_v$ соответствует делению на $n$ частей периодов вдоль исчезающего цикла в смысле Лефшеца. Доказывается теорема: Группы $\Omega_i$ и $\Omega_v$ являются полными аннигиляторами друг друга относительно кососимметрического спаривания $\Omega$ в группу $n$-х корней из единицы (Weil A., Variétés abéliennes et courbes algébriques, Paris, 1948). Из этой теоремы получается описание представления группы Галуа поля $K(\Omega)/K$ в группе $\Omega$. Ю. И. Манин

**4450. О пространственных кривых 4-го порядка второго вида. Фаччотти** (Sulle quartiche sghembe di seconda specie. Facciotti Guido), Period. mat., 1958, 36, № 2, 93—109 (итал.)

**4451. О циклических инволюциях, принадлежащих поверхности пар точек алгебраической кривой. Годо** (Sur les involutions cycliques appartenant à la surface des couples de points d'une courbe algébrique. Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1955, 41, № 10, 1094—1100 (франц.)

Для алгебраической кривой $L$, допускающей циклическую инволюцию $\gamma_p$ простого нечетного порядка $p$, автор рассматривает поверхность $F$, представляющую пары точек кривой $L$. На поверхности $F$ $\gamma_p$ определяют инволюцию $I$ того же порядка $p$, имеющую не более конечного числа кратных точек. Существует два вида кратных точек. Автор занимается кратными точками первого вида, определяет структуру последних и дает приложение к частному случаю, когда кривая $L$ задана уравнением

$$a_1 x_1^{\nu} x_2 + a_2 x_2^{\nu} x_3 + a_3 x_3^{\nu} x_1 = 0.$$

Частный случай $\nu = 3$ (когда $L$ — кривая четвертого порядка Клейна) рассматривается особо. S. Gołąb

**4452. Алгебраическо-геометрическое определение трех- и четырехкратных плоскостей с одной и той же кривой ветвления. Тибилетти** (Determinazione algebrico geometrica di piani tripli e piani quadrupli con la stessa curva di diramazione. Tibiletti Cesarina), Rend. Ist. lombardo sci. e lettere. Cl. sci. mat. e natur., 1953, 86, № 1, 86—100 (итал.)

Известно, что любая четырехкратная плоскость имеет такую же кривую ветвления, как и некоторая трехкратная плоскость, так как любое уравнение четвертой степени с одной переменной имеет кубическую резольвенту с тем же дискриминантом. Настоящая статья посвящена обратной задаче, а именно: дана трехкратная плоскость; существует ли четырехкратная плоскость с той же самой кривой ветвления? Показывается, что если трехкратная плоскость дана уравнением $f = 0$, где $f$ есть кубичная относительно $z$ функция с коэффициентами любого порядка относительно неоднородных координат на плоскости, т. е. $f = 0$ есть поверхность, проекция которой из бесконечно удаленной точки на оси $z$ есть рассматриваемая трехкратная плоскость, то проблема построения четырехкратной плоскости с той же кривой ветвления сводится к построению неприводимой двухлистной поверхности, покрывающей $f = 0$ без кривой ветвления. Две такие двойные поверхности, являющиеся бирационально различными, дают две бирационально различные четырехкратные плоскости. Как известно, число таких двухлистных бирационально различных поверхностей равно числу возможных полунулевых линейных систем на $f = 0$ (Comessatti A., Rend. Semin. mat. Univ. Padova, 1930, 1, 1—45) (Точка не является точкой сгущения, однако двухлистная поверхность без кривой ветвления может иметь изолированные точки ветвления в особых точках поверхности $f = 0$; аналогичным образом, если принять во внимание окрестности особых точек, то нет надобности сохранять полунулевые системы). P. Du Val

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 5, 509.

**4453. О прямых кубических поверхностей линейной системы. Годо** (Sur les droites des surfaces cubiques d'un système linéaire. Godeaux Lucien), Mathesis, 1956, 65, № 1-3, 12—15 (франц.)

Нёйберг (J. Neuberg) изучал под именем комплекса Грассмана комплекс прямых, встречающих три пары плоскостей в трех парах точек одной и той же инволюции (Mathesis, 1902, 221—225). Эта статья навела автора на изучение класса прямых, принадлежащих кубическим поверхностям трижды бесконечной линейной системы (Bull. Acad. roy. Belgique, 1907, 17—27), и

позднее комплекса прямых, принадлежащих поверхностям порядка $n$ линейной системы измерения $n$ (Mém, Soc. sci. Hainaut, 1908; Enseign. math., 1909, 123—125).

Автор в данной статье возвращается к этим вопросам, ограничиваясь случаем $n=3$; обобщение на случай любого $n$ возможно непосредственно.

Берется трехмерная линейная система $|F|$ без фундаментальных точек общих кубических поверхностей $F$, место их прямых будет комплекс $\Sigma$.

Если прямая $r$ принадлежит $\Sigma$, то она лежит на одной поверхности $F$ и другими пересекается по $\infty^2$ групп троек точек, образующих инволюцию $I_2^3$ порядка, равного 3, и ранга, равного 2 (и обратно).

Пусть $\lambda_0 F_0(x_1, x_2, x_3, x_4)+\lambda_1 F_1+\lambda_2 F_2+\lambda_3 F_3=0$ будет уравнение линейной системы $|F|$. Чтобы три точки пересечения прямой $(yz)$ поверхностями $F_0$, $F_1$, $F_2$, $F_3$ принадлежали инволюции $I_2^3$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} F_0(y) & \Delta F_0(y) & \Delta^2 F_0(y) & \Delta^3 F_0(y) \\ F_1(y) & \Delta F_1(y) & \Delta^2 F_1(y) & \Delta^3 F_1(y) \\ F_2(y) & \Delta F_2(y) & \Delta^2 F_2(y) & \Delta^3 F_2(y) \\ F_3(y) & \Delta F_3(y) & \Delta^2 F_3(y) & \Delta^3 F_3(y) \end{vmatrix} = 0, \qquad (1)$$

где принято

$$\Delta = z_1\frac{\partial}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial}{\partial y_2}+z_3\frac{\partial}{\partial y_3}+z_4\frac{\partial}{\partial y_4};$$

уравнение (1) не меняется, если точки $y$ и $z$ заменить двумя другими различными точками той же прямой; поэтому уравнение (1) изображает комплекс $\Sigma$. В плоскости $z_1=0$ уравнение (1) изображает кривую 6-го порядка, таков будет порядок комплекса $\Sigma$.

Далее рассматривается четырехмерная линейная система кубических поверхностей; всякая прямая $r$ пространства принадлежит, по крайней мере, одной из поверхностей этой системы; но если $r$ принадлежит $\infty^1$ этих поверхностей, то поверхности системы $|F|$ высекают на этой прямой группы инволюции $I_2^3$. Обратно, если поверхности системы $|F|$ высекают на прямой $r$ группы инволюции $I_2^3$, то через каждую группу ее проходят $\infty^2$ поверхностей системы, и, следовательно, прямая $r$ принадлежит $\infty^1$ поверхностей.

Условие принадлежности прямой $\infty^1$ поверхностей $F$ будет:

$$\left\| \begin{matrix} F_0(y) & \Delta F_0(y) & \Delta^2 F_0(y) & \Delta^3 F_0(y) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_4(y) & \Delta F_4(y) & \Delta^2 F_4(y) & \Delta^3 F_4(y) \end{matrix} \right\| = 0; \qquad (2)$$

откуда следует, что такие прямые образуют некоторую конгруэнцию $G$. Эта конгруэнция будет порядка, равного 25 и класса, равного 15. Назовем через $\Sigma_l$ комплекс прямых, принадлежащих кубическим поверхностям трехмерной линейной системы, которая получается из рассмотренной четырехмерной в предположении $\lambda_l=0$. Комплексы $\Sigma_4$ и $\Sigma_5$ порядка, равного 6, имеют общую конгруэнцию порядка и класса, равного 36; в эту конгруэнцию входит конгруэнция $G$ и последняя поэтому дополняется конгруэнцией $H$ порядка, равного 11, и класса, равного 21. Конгруэнция $H$ есть место прямых кубических поверхностей, принадлежащих сети, определяемой поверхностями $F_0$, $F_1$, $F_2$.

Четыре линейно независимых поверхности системы $|F|$ определяют комплекс $\Sigma$ и таким образом имеется $\infty^4$ комплексов $\Sigma$, содержащих $G$. Через какую-нибудь прямую проходит одна поверхность из $|F|$, следовательно, четыре прямых определяют четыре поверхности, а потому и комплекс $\Sigma$. Подобным образом заключается, что три прямых вообще определяют одну конгруэнцию $H$.

С. С. Бюшгенс

**4454. Об одной косой линейчатой поверхности пятого порядка.** Бишара (On a certain quintic scroll. Bishara S.), Proc. Math. and Phys. Soc. Egypt, 1957(1958), № 21, 25—32 (англ.)

Изучается линейчатая поверхность пятого порядка с двойной кривой которой является совокупность простой ранственной кубики и ее хорды, причем последняя — тройная линия поверхности.

В. В. Морозов

**4455. Классификация эллиптических поверхностей с эллиптическим пучком кривых жанра, равного четырем.** Скафати (Sulla classificazione delle superficie ellittiche con un fascio ellittico di curve di genere quattro. Scafati Maria), Rend. Circolo mat. Palermo, 1955, 4, № 3, 367—394 (итал.)

Проблема построения эллиптических поверхностей с эллиптическим пучком кривых $C$ данного жанра $\pi$ может быть решена, учитывая, что такие поверхности имеют также пучок (жанра $p_g$) эллиптических кривых, который на $C$ высекает инволюцию $\gamma_k$ рода $p_g$; числовые характеристики инволюции могут быть получены из формулы Цёйтена при заданном жанре $\pi$ кривых $C$.

Предполагая $\pi=4$, автор в прежней работе (РЖМат, 1959, 11483) нашел все арифметические решения формулы Цёйтена и установил, какие из них реализуются на гиперэллиптической кривой. Дополняя этот результат, в данной статье автор предварительно решает вопрос, какие из этих арифметических решений реализуются на кривой 4-го жанра, не гиперэллиптической. Итак, должны быть определены циклические или абелевы группы бирациональных преобразований, принадлежащих кривой жанра 4, не гиперэллиптической. Если для данной кривой взять ее проективную модель — каноническую кривую, последняя будет кривой $C^6$ 6-го порядка и группы преобразований будут группами гомографий (F. Severi). Кривая $C^6$ принадлежит квадрике, и ее группы будут содержаться в группе всех проективитетов, переводящих эту квадрику в себя. Собственно определение групп гомографии $C^6$ было рассмотрено Виманом (Wiman A., Über die algebraischen Curven von den Geschlechten $p=4,5$ und 6 welche eindeutigen Transformationen in sich besitzen, Stock. Akad. Bihang, XXI, 1895), но в данном случае интересно не общее решение, а циклические или абелевы подгруппы. В дальнейшем исследуется отдельно, когда квадрика вырожденная и когда она не вырожденная.

Автор устанавливает, какие из данных им решений уравнения Цёйтена не имеют геометрического смысла, какие реализуются для гиперэллиптических кривых и какие только для кривых не гиперэллиптических, какие решения осуществляются как для гиперэллиптических, так и для не гиперэллиптических кривых. В каждом из этих случаев перечисляются соответствующие номера решений.

С. С. Бюшгенс

**4456. К вопросу об эллиптических поверхностях с пучком кривых жанра 4.** д'Оржеваль (A propos des surfaces elliptiques avec un faisceau de courbes de genre 4. d'Orgeval B.), Publs scient. Univ. Alger, 1955, A2, № 1, 6 (франц.)

Задача, которой занимался автор (РЖМат, 1957, 1721; 1958, 6120), была подробно изучена Скафати (РЖМат, 1956, 1610; 1959, 11483; реф. 4455). Автор выражает надежду, что в журнале Publs. scient. Univ. Alger будет помещена статья Скафати, в которой объясняются причины расхождения в полученных результатах.

**4457. О якобиевой системе линейной системы алгебраических поверхностей.** Годо (Sur le système jacobien d'un système linéaire de surfaces algébriques. Godeaux Lucien), Mathesis, 1958, 67, № 1-3, 5—7 (франц.)

Линейная система алгебраических поверхностей $|F|$, не сводящаяся ни к пучку поверхностей, ни к линейной конгруэнции кривых, может иметь фундаментальные поверхности двух видов. Фундаментальная поверхность первого вида содержит пучок фундаментальных кривых и поверхность $F$ системы встречает фундаментальную поверхность по конечному числу фундаментальных кривых. Фундаментальная поверхность второго вида не имеет с поверхностями $F$ переменных точек и поверхности $F$, проходящие через какую-нибудь точку фундаментальной поверхности, содержат последнюю целиком. Фундаментальные поверхности принадлежат якобиевой системе $|F_j|$ линейной системы $|F|$, причем фундаментальные поверхности первого вида входят в $F_j$ простыми составляющими, поверхности второго вида — двойными составляющими. Эти положения известны и автор обосновывает второе из них элементарным способом, доказав предварительно предложение: Если алгебраические поверхности трижды бесконечной линейной системы проходят через точку и имеют в ней общую касательную точку, то эта точка будет двойной для якобиана системы. Последнее же предложение доказывается простым подсчетом якобиана. С. С. Бюшгенс

**4458. Об аналитических поверхностях с двойными точками.** Атия (On analytic surfaces with double points. Atiyah M. F.), Proc. Roy. Soc., 1958, **A247**, № 1249, 237—244 (англ.)

Предметом статьи является доказательство теоремы 1: Пусть $X$ и $Y$ — две алгебраические поверхности порядка $n$ в трехмерном комплексном проективном пространстве, причем $Y$ без особенностей, а $X$ имеет только обыкновенные двойные точки, и пусть $\widetilde{X}$ будет стандартная не особенная модель $X$, тогда $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ дифференцируемо гомеоморфны.

Фактически доказывается более общий результат (теорема 4), касающийся гиперплоских сечений трехмерных алгебраических многообразий, а теорема 1 является наиболее интересным специальным случаем. Весьма неожиданным является то обстоятельство, что теорема неверна для гиперповерхностей измерения $r \neq 2$, что автор подтверждает примерами ($r = 1$ и $r \geqslant 3$).

Теорема 2 является наиболее общим результатом, доказанным в статье; она касается семейства аналитических поверхностей и теорема 4 является ее простым следствием.

Пусть $C^n$ — пространство комплексных переменных; через $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ будем обозначать степенной ряд по $x_1, \ldots, x_n$, через $f_k(x)$ — его однородный компонент степени $k$. Если $f$ сходится в окрестности, например, начала координат, то уравнение $f(x) = 0$ в этой окрестности, определяет гиперповерхность $V$ пространства $C^n$. Пусть $V$ проходит через начало; последнее будем называть особой точкой $V$, если $f_1(x) = 0$; особая точка будет обыкновенной двойной точкой, если $f_2(x)$ не особая квадратичная форма, для краткости такую точку назовем узлом.

Если $V \subset C^n$ имеет узел в начале, то аналитическая функция $g(x)$, определенная в области $O$, в $C^n$ индуцирует на $V$ функцию $G$, которую назовем аналитической функцией на $V$ в окрестности $O$. Если $G(0) = 0$, то $G(x) = 0$ определит комплексную аналитическую гиперповерхность $W$ на $V$, которая является пересечением $V$ и $g(x) = 0$, начало на $W$ будет также особой точкой. Будем говорить, что $G$ не критическая в точке $O$, если $O$ есть простая особенность $W$, что эквивалентно двум условиям: 1) $g$ не критическая в $O$ (т. е. $g_1(x) \neq 0$), 2) $g(x) = 0$ не касается $V$ в $O$, т. е. линейное пространство $g_1(x) = 0$ не касается конуса $f_2(x) = 0$. Теперь возможно определить нодальное многообразие (измерения $n$) как локальные модели окрестностей в точке $O$ в $C^n$ и окрестностей точки $O$ на поверхностях $V$ с узлами. По определению семейство $(V, f, R)$ нодальных многообразий принимается состоящим из нодального многообразия $V$ и комплексного аналитического отображения $f : V \to R$ многообразия $V$ на риманову поверхность $R$, так что: 1) для каждого $t \in R$ $V_t = f^{-1}(t)$ компактно и связно, 2) $f$ не критично в узлах $V$, 3) $f$ имеет конечное число узлов. Если $V$ имеет $p$ узлов и $f$ имеет $q$ узлов, автор говорит, что семейство $(V, f, R)$ имеет $(p, q)$ узлов. Далее определяется отображение $(\alpha, \beta)$ семейства $(V, f, R)$ на семейство $(V', f', R')$ как совокупность двух аналитических отображений $\alpha : V \to V'$ и $\beta : R \to R'$ таких, что $f'\alpha = \beta f$. После этого формулируется и доказывается теорема 2: Пусть имеется $(\widetilde{V}, \widetilde{f}, R)$ семейство нодальных многообразий, причем размерность $V$ равна 3. Тогда существует семейство $(\widetilde{V}, \widetilde{f}, \widetilde{R})$ и отображение $(\alpha, \beta)$ второго на первое таковы, что: 1) $\beta : \widetilde{R} \to R$ есть двулистное покрытие, 2) для каждого $s \in R$ $\widetilde{V}_s$ является стандартной не особой моделью $V_{\beta(s)}$. Теорема 2 доказывается следующими шагами: а) семейство $(V, f, R)$ с $(p, q)$ узлами заменяется семейством $(V', f', R)$ с $(0, q)$ узлами (по лемме 4), б) семейство $(V', f', R)$ заменяется семейством $(V'', f'', R'')$ с $(q, 0)$ узлами (лемма 5), в) применяя а), заменяем $(V'', f'', R'')$ семейством $(\widetilde{V}, \widetilde{f}, R'')$ с $(0, 0)$ узлами.

Как в этом рассуждении, так и в доказательствах последующих теорем используется ряд лемм (всего семь), устанавливающих возможность перехода от одного нодального семейства к другому. Из этих лемм отметим одну, характерную для направления рассуждений и поясняющую вводимые термины, именно лемму 3: Если $f(x)$ — степенной ряд, сходящийся в окрестности $x = 0$ и имеющий эту точку узлом, то существуют степенные ряды $y_i(x)$, сходящиеся в окрестности $x = 0$, с непропадающим якобианом в этой точке такие, что $\sum_1^n y_i^2(x) = f(x)$. Эту лемму можно сформулировать в таком виде: узел аналитически изоморфен вершине квадратичного конуса в $C''$. С помощью этой леммы можно определить стандартную не особенную модель какого-либо нодального многообразия; в общем случае, если разрешаются лишь некоторые из узлов, то получается так называемая стандартная полуособенная модель. Сформулируем две последних теоремы статьи.

Теорема 3. Пусть $(V, f, R)$ — семейство нодальных многообразий, причем $\dim V = 3$, и пусть $a, b \in R$; тогда стандартные не особенные модели многообразий $V_a$ и $V_b$ дифференцируемо гомеоморфны.

Теорема 4. Пусть $W$ будет трехмерным нодальным алгебраическим многообразием в проективном пространстве и $X$ гиперплоским сечением, которое является нодальным подмногообразием $W$. Тогда стандартная не особая модель многообразия $X$ будет дифференцируемо гомеоморфна некоторому не особому гиперплоскому сечению $W$. С. С. Бюшгенс

**4459. Классические и новейшие исследования действительных алгебраических поверхностей.** Галафасси (Classici e recenti sviluppi sulle superficie algebriche reali. Galafassi Vittorio Emanuele), Colloq. quest. réalité géom. Liège, 1955. Liège—Paris, 1956, 131—147 (итал.)

В изучении действительных алгебраических поверхностей и многообразий широко признана важность вкла-

дов Комессатти (A. Comessatti), и недаром на этой конференции внимание неоднократно обращается к его работам; последние столь обширны и разнообразны, что в коротком докладе их можно коснуться лишь очень бегло.

Прежде всего отмечается установление Комессатти общих проблем. Алгебраическое действительное многообразие в $S_r(x_0, x_1, \ldots, x_r)$ может быть представлено алгебраическими уравнениями с действительными коэффициентами; вводится инволюторное соответствие $\rho x_i' = \overline{x_i}$ — сопряжение — и тогда алгебраический объект (многообразие или соответствие) им переводится в алгебраический объект — комплексно сопряженные; объект будет действительным, если он совпадает со своим сопряжением. Бирациональное преобразование между двумя алгебраическими действительными многообразиями $V_0$ и $V_0'$ (одного и того же измерения, но, может быть, расположенными в пространствах различных размерностей) называется действительным, когда сопряжение на одном многообразии переводится им в сопряжение на другом. Комессатти принадлежит и введение антибирациональных преобразований $T$ алгебраического многообразия $V$ (необязательно действительного) в себя, определяемых формулами $\rho x_i' = \varphi_i(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_r})$, где $\varphi_i$ — алгебраические формы одного и того же измерения; когда $V$ есть линейное пространство, $T$ будет антикремоновым преобразованием, т. е. произведением кремонова преобразования и сопряжения. Преобразование $T$, в частности, может быть инволюционным, тогда говорят о некоторой симметрии многообразия; если $V$ допускает симметрию $S$, то будет допускать симметрию и всякое бирациональное преобразование многообразия $V$ (все многообразия класса $\Omega$). Действительные свойства действительного $\Omega_0$ получаются из более общих свойств класса $\Omega$ введением симметрии с функцией абсолюта в классическом смысле „Программы" Клейна. В частности, заслуживает внимания случай, когда $V$ имеет более одной симметрии, тогда $V$ допускает бирациональные преобразования в себя; в этом случае возникает проблема действительных классов, т. е. о числе и характерах действительных классов, принадлежащих одному и тому же классу $\Omega$.

Соответственно классической теореме Гарнака о циклах кривой здесь возникают проблемы Гарнака о числе полостей многообразия $V_0$, принадлежащего данному классу $\Omega_0$, т. е. о его верхнем пределе в функции некоторых инвариантов $V_0$. Далее идут проблемы связности многообразия, касающиеся индивидуализации (топологической) каждой полости $V_0$. В случае поверхности с каждой полостью связывается два характера: качественный (ориентируемость или неориентируемость) и числовой, например, порядок связности, изображаемый обобщенной формулой Эйлера, в случае поверхности с несколькими полостями Комессатти определяет порядок тотальной связности.

По отношению к действительным рациональным поверхностям установленные Комессатти общие проблемы были им разрешены вполне определенным и исчерпывающим образом, что, несомненно, будет служить ориентиром для решения более общих и трудных проблем. Здесь проблема действительных классов сводится к классификации антикремоновых инволюционных преобразований. Первый критерий, ведущий к классификации, получается из рассмотрения линейных действительных систем кривых на поверхности (три типа), что позволяет различать три семейства поверхностей $F_0$. Второй шаг позволяет установить, что преобразование $T$ квадратичными преобразованиями может быть приведено к одному из пяти определенных типов. Эти различения приводят к решению проблемы класса для рациональных поверхностей. Вообще относительный инвариант $I$ Цойтен-Сегре (Zeuthen-Segre) не может спуститься ниже некоторого минимального значения $I_0$ (достижимого), которое будет абсолютным инвариантом класса $R_0$, как и число $m$ полостей действительной части; отсюда возникает задача об установлении связей между этими двумя характерами. Решение проблемы связности для $F_0$ приводит к новым способам. Совершенствуя представление $F_0$ на плоскости, переходят к так называемому нормальному представлению, что для каждой $F_0$ выделяет некоторую $F_0'$ того же класса $\Omega_0$; по связности $F_0'$ определяется связность $F_0$ и тогда оказывается, что инвариант $I$ и тотальный порядок связности связаны соотношением $Z \equiv I \pmod 2$; отсюда для различных семейств (типов) $F_0$ получается ряд неравенств. Новый плодотворный метод в изучении проблем связности был получен Комессатти перенесением с комплексного поля на действительное теории Сезери о базе алгебраических кривых на алгебраической поверхности; по аналогии с $\rho$ (комплексным) он взял число базы $\overline{\rho}$ (действительное), определяемое как число алгебраических (действительных) кривых на поверхности, алгебраически независимых между собой; при этом для рациональных поверхностей алгебраическая зависимость, как известно, сводится к эквивалентности линейной. Введение нового инварианта $\overline{\rho}$ привело Комессатти к фундаментальному соотношению $I + Z = 2(\overline{\rho} - 1)$.

Обращаясь к общему случаю алгебраических поверхностей (и многообразию вообще), Комессатти перенес методы Клейна, которые дали последнему фундаментальные результаты для действительных алгебраических кривых. Поверхности $V_0$ соответствует риманиана $R_0$ симметричная, которая может быть дважды отображена на некоторое топологическое многообразие $W$; этот метод для кривых ($k = 1$) дает теорему Гарнака. Однако для поверхностей и многообразий ($k \geqslant 2$) он не позволяет решить проблемы Гарнака. Однако Комессатти дал ряд приложений указанного метода к проблемам связности.

Некоторые углубления топологического отношения между $W$ и $R_0$ были даны автором (1952); что касается ограничения сверху числа $m$ полостей $V_0$, то теория действительных рациональных поверхностей установила, что это число может быть назначено произвольно. Этот факт был раньше обнаружен для широкого класса обобщенных линейчатых поверхностей, которые изучались рядом геометров. С. С. Бюшгенс

**4460. Об алгебраических поверхностях нулевых жанров и бижанра, равного единице. Годо** (Sulle superficie algebriche di genere zero e di bigenere uno. Godeaux Lucien), Boll. Unione mat. ital., 1958, 13, № 4, 531—534 (итал.; рез. англ.)

Алгебраическая поверхность $F$ предполагается имеющей $p_a = p_g = 0$ и $P_2 = 1$ и с одной биканонической кривой $C_2$ не нулевого порядка; последняя будет эллиптической. Подсчитывая плюриканонические кривые, автор прежде всего показывает, что при поставленных условиях кривая $C_2$ будет приводимой и, положив $C_2 = \Gamma_1 + \Gamma_2$, он определяет плюриканонические системы поверхности $F$. В пространстве $S_5$ берется многообразие $V_3^3$ Сегре, которое изображает пары точек прямой и плоскости и уравнения которого можно записать в виде

$$\left\| \begin{matrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Гиперповерхность $V_4^3$, изображаемая уравнением

$$a_{11}x_{11}^3 + a_{22}x_{22}^3 + \ldots + a_{32}x_{32}^3 = 0,$$

высекает на $V_3^3$ некоторую поверхность Ф. Гомография

$$x'_{11} : x'_{12} : x'_{21} : x'_{22} : x'_{31} : x'_{32} = x_{11} : \varepsilon x_{12} : \varepsilon x_{21} : \varepsilon^2 x_{22} : \varepsilon^2 x_{31} : x_{32},$$

где $\varepsilon$ — примитивный кубический корень из единицы, дает на Ф инволюцию 3-го порядка без соединенных точек. Изображением этой инволюции будет как раз поверхность $F$ с характерами, указанными выше.

С. С. Бюшгенс

**4461. О сетях квадрик. Фаччотти** (Sulle reti di quadriche. Facciotti Guido), Period. mat., 1957, 35, № 2, 94—103 (итал.)

Статья является продолжением прежней работы автора (РЖМат, 1958, 4099), посвященной пучкам квадрик; рассматриваются дважды бесконечные множества квадрик — их сети. Сеть вообще не вырожденных квадрик $|Q|$ определяется тремя основными квадриками $Q', Q'', Q'''$, не принадлежащими пучку; если сеть не имеет общей кривой, то эти три квадрики пересекаются в восьми точках, которые будут фундаментальными точками сети $R$; через какую-нибудь точку $P$ пространства будет проходить пучок квадрик, поэтому через две заданные точки будет проходить одна определенная квадрика $Q$ сети $R$. Собственно семь точек общего расположения вполне определяет $\infty^2$ квадрик, т. е. сеть $R$-квадрик, проходящих и через некоторую восьмую точку.

Полярные плоскости какой-либо точки $P$ относительно всех квадрик $Q$ сети $R$ образуют связку, центр которой $P'$ будет сопряжен $P$ относительно сети; на прямой $PP'$ квадрики $Q$ высекают пары точек в инволюции, для которой $P$ и $P'$ будут двойными элементами.

Через семь точек на пространственной кубике $T_3$ проходят квадрики некоторой сети $R$, которые $T_3$ будут содержать целиком, поэтому $T_3$ будет фундаментальной кривой такой сети. Две квадрики через $T_3$ пересекаются еще по прямой — хорде $T_3$; обратно через каждую хорду кривой $T_3$ проходит пучок квадрик сети $R$. Каждая квадрика, содержащая $T_3$, имеет одну систему образующих, которые будут хордами $T_3$ (дважды ее пересекающими), другая система ее образующих образована прямыми, пересекающими $T_3$ каждая лишь в одной точке.

По теореме Понселе о пучке квадрик через каждую линию 4-го порядка (фундаментальную линию пучка) проходят вообще четыре конуса 2-го порядка, четыре вершины которых образуют тетраэдр $T$, автополярный относительно каждой квадрики пучка. Сети $R$ будет соответствовать дважды бесконечное множество тетраэдров $T$, однако их вершины описывают не поверхность, а кривую $T_6$ 6-го порядка и жанра 3, связанную с данной сетью. Одновременно рассматривается для какой-нибудь плоскости $\pi$ сечения ее квадриками сети, что дает сеть конических сечений; последняя будет общей, без фундаментальных точек, если $R$ не имеет фундаментальной кривой; в плоскости $\pi$ ищется место вершин автополярных треугольников, и это будет кривая 3-го порядка $\gamma_3$, которую автор называет для плоскости $\pi$ кривой, связанной с данной сетью квадрик. Оказывается, что $\gamma_3$ будет также совокупностью точек касания квадрик сети, касающихся данной плоскости. Автор дает и другие определения кривых $T_6$ и $\gamma_3$.

В заключение рассматриваются сеть квадрик и проективная ей связка плоскостей, два пучка квадрик сети и пучок плоскостей им проективных и другие более сложные образы.

С. С. Бюшгенс

**4462. О поверхностях с нулевыми жанрами, имеющих эффективную биканоническую кривую. Годо** (Sur les surfaces de genres arithmétique et géométrique nuls possédant une courbe bicanonique effective. Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1958, 44, № 10, 809—812 (франц.)

Проблема определения алгебраических нерациональных поверхностей нулевых жанров была поставлена после того, как Кастельнуово дал (1894 г.) условия рациональности алгебраической поверхности; частные ее решения были получены Кастельнуово, Энриксом, Кампеделли, Годо; недавно Бюрниа удалось построить серию таких поверхностей. Нерациональные поверхности жанров $p_a = p_g = 0$ ра падаются на две категории: 1) поверхности, плюриканонические системы которых образуются с помощью пучка эллиптических кривых и 2) поверхности, биканонические кривые которых неприводимы. Метод построения искомых поверхностей в статьях автора состоит в формировании образа некоторой циклической инволюции без соединенных точек порядка $p_a+1$, принадлежащей регулярной поверхности арифметического жанра $p_a$. В данной статье используется регулярная поверхность, каноническая система которой представляется пучком неприводимых кривых и содержащая циклическую инволюцию без соединенных точек. Если поверхность — образ этой инволюции не имеет канонической кризой, то канонические кривые начальной поверхности будут эллиптическими кривыми и биканоническая кризая поверхности — образа состоит из двух эллиптических кривых; частная поверхность такого типа была раньше построена автором (1924 г.).

Пусть $F$ — алгебраическая регулярная поверхность, каноническая система которой представляется пучком неприводимых кривых $K$ жанра $p^{(1)}$, следовательно $p_a=2$. Предполагается, что $F$ содержит циклическую инволюцию $I$ без соединенных точек и поверхность — образ $F'$ этой инволюции не имеет канонической кривой. Обозначим через $T$ бирациональное преобразование $F$ в себя, порождающее инволюцию. Преобразование $T$ канонического пучка $|K|$ должно быть эквивалентно гомографии и потому оно имеет две соединенных кривых $K_1, K_2$; этим кривым на $F'$ будут соответствовать некоторые кривые $T_1$ и $T_2$.

В дальнейшем подробно рассматривается биканоническая система $F$, а также биканонические и триканонические кривые поверхности $F'$, определяются жанры этих кризых и размерности их систем; в ходе этого исследования показывается, что $p^{(1)} = 1$ и таковы же жанры кривых $T_1$ и $T_2$. Построенная поверхность $F'$ имеет единственную биканоническую кривую $T_1 + T_2$, состоящую из двух непересекающихся эллиптических кривых.

С. С. Бюшгенс

**4463. Сизигетические поверхности. Крейсс** (Über syzygetische Flächen. Kreiss Heinz-Otto), Ann. mat. pura ed appl., 1956, 41, 105—111 (нем.)

Группу из $n^3$ точек полного пересечения трех поверхностей $f^1 = 0$, $f^2 = 0$, $f^3 = 0$ порядка $n$ обычного трехмерного пространства $S_3$ автор обозначает $G$ и называет сизигетической; поверхности порядка $2n$, имеющие эту группу точек особыми точками, он называет „сизигетическими" поверхностями. Указанная группа $G$ точек является базисом линейной системы $\lambda_1 f^1 + \lambda_2 f^2 + \lambda_3 f^3 = 0$ поверхностей порядка $n$; две любые поверхности этой сети пересекаются по кривым, которые автор называет $\psi$-кривыми, каждая из этих $\infty^2$ кривых проходит через группу $G$ точек. Доказывается, что все поверхности порядка $2n$, которые заданную группу точек имеют особенными, могут быть представлены уравнением $\sum \lambda_{ij} f^i f^j = 0$. Это предложение, равно как и другие полученные им свойства, автор синтетически доказывает, используя свойства многообразия Веронезе $V_n^N$, изображающего линейную систему гиперповерхностей порядка $N$ в $S_n$.

Так он устанавливает, в частности, взаимно однозначные соответствия: $\psi$ — кривая через группу $G$ — то-

чка многообразия $V_2^2$, поверхность сети через $G$ — коническое сечение на $V_2^2$, сизигетическая поверхность порядка $2n$ через $G$ — нормальная кривая 4-го порядка на $V_2^2$.

Подбирая подходящим образом поверхности сети $f^1$, $f^2$, $f^3$, всякую нераспадающуюся сизигетическую поверхность через группу $G$ можно представить уравнением в иррациональной форме: $\sqrt{f^1}+\sqrt{f^2}+\sqrt{f^3}=0$. Далее автор ставит вопрос: для каких нераспадающихся сизигетических поверхностей порядка $2n$ могут существовать дальнейшие особые точки (сверх группы $G$), притом в наибольшем числе?

Здесь автор сначала устанавливает, что все дальнейшие особые точки нераспадающейся сизигетической поверхности порядка $2n$ должны лежать на кривой, удовлетворяющей условиям: Ранг

$$\begin{pmatrix} f_0^1 & f_1^1 & f_2^1 & f_3^1 \\ f_0^2 & f_1^2 & f_2^2 & f_3^2 \\ f_0^3 & f_1^3 & f_2^3 & f_3^3 \end{pmatrix} \leqslant 2, \left(\frac{\partial f^i}{\partial x_j} = f_j^i\right).$$

Эта кривая $K$ по аналогии с известным случаем $n=2$ названа узловой линией. Наконец, чтобы $q$ точек $P_1, P_2, \ldots, P_q$ были сверх точек группы $G$ особыми на нераспадающейся сизигетической поверхности, необходимо и достаточно, чтобы: 1) существовала поверхность $f^n$ сети, особая в точках $P_i$ и 2) на $f^n$ должна существовать некоторая $\psi$-кривая, содержащая все $q$ точек $P_i$.

Для $n=3$ или $n=4$ можно получить сети с указанными свойствами и, следовательно, классифицировать сизигетические поверхности 6-го или 8-го порядка, для $n \geqslant 5$ такие построения уже затруднительны, ибо мы недостаточно знаем поверхности 5-го и высших порядков.

В заключение рассматриваются два частных случая. Пусть каждая из основных поверхностей $f^1$, $f^2$, $f^3$ сети распадается на $n$ плоскостей $E_{1i}, E_{2i}, \ldots, E_{ni}$ $(i=1, 2, 3)$, тогда существуют нераспадающиеся сизигетические поверхности порядка $2n$, имеющие $n^3+\frac{3}{2}n^2(n-1)$ изолированных особых точек; при подходящем нормировании эти поверхности могут быть представлены уравнениями в иррациональной форме: $\sqrt{E_{11}\ldots E_{n1}}+\sqrt{E_{12}\ldots E_{n2}}+\sqrt{E_{13}\ldots E_{n3}}=0$. Предположим, далее, что сеть имеет не три, а четыре поверхности, из которых каждая распадается на $n$ плоскостей и проходит через группу $n^3$ точек; тогда между этими четырьмя группами по $n$ плоскостей должно существовать тождественное соотношение

$$\sum_{i=1}^{i=4} E_{1i}\ldots E_{ni}=0;$$

из этого тождества мы получим систему алгебраических уравнений относительно $16n$ коэффициентов плоскостей, она будет разрешима при $n \leqslant 7$. Однако должны быть удовлетворены еще некоторые неравенства, чтобы фундаментальные точки сети не попали на прямые пересечения плоскостей какой-либо из четырех групп, т. е. чтобы особые точки сизигетических поверхностей были различны. При выполнении указанных условий получатся сизигетические поверхности, имеющие $n^3+2n^2(n-1)$ изолированных особых точек. С. С. Бюшгенс

**4464. О поверхности, каноническая система которой имеет неподвижные компоненты.** Годо (Note sur une surface dont le système canonique a des composantes fixes. Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1958, 44, № 4, 304—311 (франц.)

Изучается поверхность, каноническая и биканоническая система которой содержат неподвижные компоненты, рациональные, виртуального порядка ниже $-2$, и роль исключительной кризой. Берется поверхность $F$, изображаемая уравнением

$$a_1x_1^{3\nu+1}x_2+a_2x_2^{3\nu+1}x_3+a_3x_3^{3\nu+1}x_4+a_4x_4^{3\nu+2}+$$
$$+a_5x_1x_2x_3x_4^{3\nu-1}+\ldots+a_{\nu+4}(x_1x_2x_3)^{\nu}x_4^2=0,$$

преобразуемая в себя гомографией:

$$H=\begin{pmatrix} x_1 & \varepsilon x_2 & \varepsilon^{9\nu^2+1}x_3 & \varepsilon^{6\nu^2+\nu+1}x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

периода $p=9\nu^2+3\nu+1$, $\varepsilon$ — первообразный корень степени $p$ из единицы; $p$ предполагается простым и $\nu \geqslant 2$. На $F$ гомография $H$ определяет инволюцию $I$ порядка $p$ с тремя соединенными точками $O_1$ (1, 0, 0, 0), $O_2$ (0, 1, 0, 0), $O_3$ (0, 0, 1, 0). Проективный образ инволюции $I$ — нормальная поверхность $\varphi$ в $S_r$ порядка $(3\nu+2)p$; ее сечения Г гиперплоскостями будут кривые жанра $\frac{3}{2}(\nu+1)(p-1)$. Точкам $O_1$, $O_2$, $O_3$ соответствуют на $\varphi$ точки дирамации $O_1'$, $O_2'$, $O_3'$, каждая из них на $\varphi$ имеет кратность $\nu+2$ и эквивалентна совокупности рациональных кривых $\sigma_\alpha$, $\tau_\alpha$, $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{3\nu}$, $\sigma_\beta$. Каждая из этих кривых пересекает предыдущую и последующую в одной точке, но не встречает другие. Для выбранной поверхности находятся фиксированные и переменные кривые как канонической, так и биканонической систем образа $\varphi$; подробно исследуются пересечения всех введенных кривых между собой.

С. С. Бюшгенс

**4465. Графическая характеристика эллиптической квадрики в конечном пространстве.** Таллини (Caratterizzazione grafica delle quadriche ellittiche negli spazi finiti. Tallini Giuseppe), Rend. mat. e applic., 1957, **16**, № 3-4, 328—351 (итал.)

Через $S_{n,q}$ обозначается конечное линейное пространство размерности $n$, построенное над телом Галуа порядка $q=p^n$, где $p$ — характеристика тела. $K$-калоттой ($K$-calotta) называется совокупность $K$ точек, которая содержит всякую прямую, имеющую с ней более двух общих точек, и которая не совпадает со всем $S_{n,q}$. Пусть $\delta$ $(0 \leqslant \delta < n)$ — наибольшее измерение пространств, содержащихся в $K$-калотте, тогда говорят, что она имеет специализацию $\delta$ и обозначают ее через $C(K, \delta)$. Указывается, что из §§ 2, 3 другой работы автора (РЖМат, 1958, 1512) можно получить предложение: В $S_{n,q}$ $(n \geqslant 3, q \geqslant 3)$ всякая квадрика эллиптического типа является калоттой $C(Q_{n-1}-q^{\delta+1}, \delta)$, где $\delta$ удовлетворяет ограничениям $\frac{n-3}{2} \leqslant \delta \leqslant n-2$, сверх того, если $\delta=\frac{n-3}{2}$ — квадрика невырожденная, если $\frac{n-3}{2}<\delta<n-2$, то она будет конусом, проектирующим из $S_{2\delta-n+2}$ вершины невырожденную квадрику эллиптического типа. Здесь для кратности было положено $Q_{n-1}=\sum_{l=0}^{n-1}q^l$.

В данной статье характеризуются графическими свойствами эллиптические квадрики $S_{n,q}$, для чего дается обращение предыдущего предложения; здесь предполагается для простоты $q>3$, так как $q=3$ представляется исключительным случаем в сравнении с другими. Именно доказывается: В $S_{n,q}$ $(n>3, q>3)$ всякая калотта $C(Q_{n-1}-q^{\delta+1}, \delta)$ с целым $\delta$, удовлетворяющим

ясным ограничениям $0 \leqslant \delta \leqslant n-2$, такова, что $\delta$ удовлетворяет условиям $\frac{n-3}{2} \leqslant \delta \leqslant n-2$ и, сверх того, для $\delta = \frac{n-3}{2}$ покрышка будет невырожденной эллиптической квадрикой, для $\frac{n-3}{2} < \delta \leqslant n-4$ (и, следовательно, $n > 5$) она будет квадратичным конусом эллиптического типа с вершиной в $S_{2\delta+2-n}$, для $\delta = n-3$ она будет квадратичным эллиптическим конусом с вершиной в $S_{n-4}$, если $p \neq 2$, конусом, проектирующим из $S_{n-4}$ покрышку $C(q^2+1, 0)$ в $S_3$, не пересекающимся с $S_{n-4}$, если $p = 2$, наконец, для $\delta = n-2$ калотта обращается в $S_{n-2}$. Сначала доказывается, что выбранная калотта не может целиком содержаться в какой-либо гиперплоскости $S_{n,q}$.

Далее обозначим через $\widetilde{S}_\delta$ какое-нибудь фиксированное $S_\delta$ калотты. Всякое $S_{\delta+1} \supset \widetilde{S}_\delta$ (число их $Q_{n-\delta-1}$) встречает калотту, кроме $\widetilde{S}_\delta$ по $S_t$ $(-1 \leqslant t \leqslant \delta)$; пусть $l_0$ — число $S_{\delta+1} \supset \widetilde{S}_\delta$, не встречающих в дальнейшем (сверх $\widetilde{S}_\delta$) калотту, $l_i$ $(i = 1, 2, \ldots, \delta+1)$ — число $S_{\delta+1} \supset \widetilde{S}_\delta$, встречающих калотту в дальнейшем по $S_{i-1}$ и имеющих с калоттой $C(Q_{n-1} - q^{\delta+1}, \delta)$ $q^{i-1}$ точек, отличных от точек $\widetilde{S}_\delta$, в частности, $l_{\delta+1} = Q_{n-\delta-1} - \sum_0^\delta l_i$.

Сравнивая число точек калотты, принадлежащих каждому $S_{\delta+1} \supset \widetilde{S}_\delta$, но не $\widetilde{S}_\delta$ с числом точек калотты, не принадлежащих $\widetilde{S}_\delta$, мы получим неопределенное уравнение

$$\sum_1^\delta l_i q^{\delta-1} + q^\delta + q^{\delta+1} = q^\delta \sum_0^\delta l_i,$$

которое должно быть разрешено относительно $l_1, l_2, \ldots, l_\delta$ в целых положительных числах. Указанное уравнение имеет только два решения:

$l_0 = q+1$, $l_1 = l_2 = \ldots = l_\delta = 0$, $[l_{\delta+1} = Q_{n-\delta-1} - (q+1)]$,

$l_0 = 2$, $l_1 = l_2 = \ldots l_{\delta-1} = 0$, $l_\delta = q$, $[l_{\delta+1} = Q_{n-\delta-1} - (q+2)]$.

Подробное уже геометрическое исследование этих решений приводит к случаям, перечисленным в сформулированной выше теореме. С. С. Бюшгенс

**4466. Графическая характеристика эллиптической квадрики в конечном пространстве. Таллини** (Caratterizzazione grafica delle quadriche ellittiche in uno spazio finito. Tallini Giuseppe), Ricerca scient., 1958, 28, № 4, 820—823 (итал.; рез. франц., англ., нем.)

Данная статья содержит сокращенное изложение полной работы автора с тем же заглавием (реф. 4465). С. С. Бюшгенс

**4467. О $k$-калоттах, содержащихся в линейчатой квадрике пространства $S_{3,q}$. Майзано** (Sulle $k$-calotte contenute in una quadrica rigata di $S_{3,q}$. Maisano Francesco), Atti. Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1959, 26, № 1, 35—38 (итал.)

Изучаются $k$-калотты (совокупности $k$ точек, из которых никакие три не коллинеарны), лежащие на линейчатой квадрике трехмерного пространства $S_{3,q}$ над полем Галуа из $q$ элементов. Показывается, что максимальная $k$-калотта содержит $k = 2q+2$ точки; ее можно рассматривать, как 1-комплекс и число типов таких калотт равно числу целочисленных неотрицательных решений уравнения $\sum_{i=2}^{q+1} n_i \cdot i = q+1$ (где $n_i$ — число циклов $c_i$ из $2i$ отрезков, содержащихся в калотте). Если $q$ — нечетное, то каждая полная калотта либо максимальна, либо содержит $k = 2q+1$ точек; число типов последних равно числу целочисленных неотрицательных решений уравнения $\sum_{i=2}^{q} n_i \cdot i = q$ (обозначения те же). В. В. Морозов

**4468. Замечания по поводу принципа Лефшеца. Зейденберг** (Comments on Lefschetz's principle. Seidenberg A.), Amer. Math. Monthly, 1958, 65, № 9, 685—690 (англ.)

Автор подвергает сомнению так называемый принцип Лефшеца (Lefschetz S., Algebraic Geometry, Princeton, 1953; Weil A., Foundations of Algebraic Geometry, N.-Y., 1946), подчеркивая, что в основе его лежит не только понятие изоморфизма, упоминаемое обоими авторами, но и понятие вычислимости, о котором оба умалчивают. В качестве примера рассматривается теорема Пикара. Называя атомической формулой выражение вида $f = 0$, где $f$ — полином с коэффициентами в базисном поле $K$, формулой — выражение, построенное посредством конечного числа шагов из атомических формул применением конъюнкций, отрицаний и кванторов $E(x)$, где $x$ лежит в алгебраически замкнутом надполе $L$ поля $K$ и элементарным выражением—формулу, не содержащую параметров, он формулирует, очевидно, справедливый ослабленный принцип Лефшеца: если элементарное выражение верно для некоторого алгебраически замкнутого поля, содержащего $K$, то оно верно и для любого такого поля. Выражения, для которых этот принцип справедлив, он называет почти элементарными. Исходя из рассмотренных им примеров, он высказывает предположение о том, что если рассматривать все результаты алгебраической геометрии, то каждый из них без труда может быть усилен до почти элементарного выражения, и тут же с помощью рассуждения типа софизма показывает, что доказательство этого предположения было бы неблагодарной задачей. В. В. Морозов

**4469. О неравенстве Коммессатти. д'Оржеваль** (Sur une inégalité de Commessatti. d'Orgeval Bernard), Bul. Inst. politehn. Iaşi, 1957, 3, № 1-2, 11—14 (франц.; рез. русск., рум.)

Коммессатти (A. Commessatti) доказал трансцендентным путем, что если характеры $q_3$ (трехмерная иррегулярность) и $q_2$ (поверхностная иррегулярность) трехмерного алгебраического многообразия связаны неравенством $q_3 \leqslant q_2 - 4$, то $V^3$ содержит либо пучок поверхностей, либо конгруэнцию кривых. Это свойство оставалось без геометрического доказательства; автор полагает, что это доказательство можно дать, исходя из того метода, каким он доказал неравенство Кастельнуово для поверхностей; последнее неравенство, как отметил Рот (L. Roth), может быть обобщено на алгебраические многообразия любой размерности. В статье кратко излагается принцип доказательства неравенства Кастельнуово, дается последнему новая форма и из нее доказывается результат Коммессатти. Пусть $V^3$ — алгебраическое многообразие, не содержащее ни конгруэнции кривых, ни пучка поверхностей, его поверхностная иррегулярность предполагается $\geqslant 3$; на этом многообразии можно построить непрерывную систему $\infty^q$ поверхностей, которая изображается определенным многообразием Пикара $V^q$. На $V^q$ данное $V^3$ изобразится бирационально или односторонне рациональным многообразием $W^3$, преобразования $W^3$ образуют систему $\infty^q$. Если выбрать $V^{q-1}$, образованное семейством $\infty^{q-1}$ таких многообразий, как $W^3$, то $V^{q-2}$ каноническое для $V^{q-1}$ будет характеристическим для $V^{q-1}$, следователь-

но, оно образовано многообразиями $W^3$; каноническая система для $V^{q-2}$, т. е. $V^{q-3}$ опять образована многообразиями $W^3$. Отсюда следует, что каноническая система $W^3$ есть кратное $(q-3)$ ее характеристической системы и методом Энрикеса можно вычислить ее размерность. Этим путем получается более широкая формула Кастельнуово

$$P_g \geqslant \frac{q(q-1)(q-2)}{6}$$

Поверхности канонической системы имеют поверхностную иррегулярность, равную $q$. Подобным образом можно получить арифметический жанр:

$$P_a \geqslant \frac{q(q-1)}{2} - q.$$

Далее автор доказывает, что для $W^3$ имеем

$$P_g = \frac{q(q-1)(q-2)}{6}, \quad P_a = \frac{q(q-1)}{2} - q,$$

откуда легко получается, что

$$q_3 = P_g - P_a = \frac{q(q-3)}{2} > q-4,$$

т. е. неравенство Коммессатти выполняется (обратное указанному выше) для многообразия, не содержащего ни конгруэнции кривых, ни пучка поверхностей.

С. С. Бюшгенс

**4470. О многообразиях Фано с каноническими кривыми — сечениями. Галларати** (Sulle varietà di Fano con curve sezioni canoniche. Gallarati Dionisio), Rend. mat. e applic., 1957, **16**, № 3-4, 315—327 (итал.)

В проективном пространстве $S_{r+p-2}$ многообразием Фано называется алгебраическое многообразие $M_r^{2p-2}$ размерности $r$ и порядка $2p-2$, которое пересекается всяким общим $S_{p-1}$ по кривой $C_p^{2p-2}$ канонической жанра $p$ и всяким $S_p$ по поверхности, имеющей все жанры, равными единице, и каноническую кривую нулевого порядка.

По аналогии с подразделением поверхностей автор предлагает многообразия Фано распределить на три вида: 1) первого, если для каждой его гиперповерхности $V$ имеется эквивалентность в форме $V \equiv mW$, где $W$ — гиперплоское сечение, 2) второго, если имеется: $V \equiv m\Gamma$, где $\Gamma$ обозначает подкратное гиперплоского сечения $(W = k\Gamma,\ k \geqslant 2)$ и 3) третьего во всех остальных случаях. Это распределение не совпадает с предложенным Фано, по которому $M_r^{2p-2}$ будет первого, второго или третьего вида, смотря по тому, будут ли его поверхности сечения первого, второго или третьего вида. Классификация $M_r^{2p-2}$ первого вида $(r \geqslant 4)$ имеется в недавней работе (Roth L., Ann. Math., 1949, **29**, 91; Proc. Cambridge Philos. Soc., 1949, **46**, 419), из которой следует, что $M_r^{2p-2}$ первого вида все рациональны, если $p > 6$, $r > 3$ или $p = 5$, $r > 4$ или $p = 6$, $r = 5$, кроме того, если $r = 4$, то это многообразие существует только в случае $p \leqslant 10$. Здесь сначала рассматриваются многообразия Фано, пересекаемые общим $S_p$ по поверхностям первого или второго вида; для них доказывается, что на $M_r$ существует линейная система $|\Gamma|$, частично содержащаяся в линейной системе $|W|$ гиперплоских сечений $M_r$, которая на общей поверхности — сечении $M_r$ высекает определенную систему $|\gamma|$ и притом такая, что $|k\Gamma|$ целиком содержится в системе $|W|$. Далее предполагается, что $|\Gamma|$ не состоит из какой-либо конгруэнции многообразия $V_d$ при $d \geqslant 1$, но обладает инволюцией $I_\mu$ порядка $\mu \geqslant 1$, $n$ — порядок этой системы, а $\pi$ — род ее характеристических кривых. Исследуются системы $|\Gamma|$, $|W|$ и их преобразования инволюцией $I_\mu$; система $|\overline{W}|$ должна обладать некоторой фундаментальной гиперповерхностью $\theta$. Предполагается, что $\theta$ неприводима и является полным пересечением $\overline{M}_r$ некоторой формой порядка $q$. Для указанных показателей устанавливается соотношение $2(\pi-1) = n[(r-2)(1-k) - (q-1)]$, которое легко может быть разрешено в целых числах для пяти неизвестных, причем $r \geqslant 3$ и $\mu$ должны быть делителем $n$. А это позволяет перечислить все возможные многообразия Фано с поверхностями — сечениями 1-го и 2-го вида, однако при сделанных упрощающих допущениях.

Случаи: а) $r = 5$, $q = 1$, $k = 2$, $q = 0$, $\mu = 1$; б) $r = 4$, $n = k = 2$, $q = 0$, $\mu = 1$ или $\mu = 2$, в) $r = 4$, $n = 1$, $k = 2$, $q = \mu = 1$ автор исследует подробно.

С. С. Бюшгенс

**4471. Теория пересечений на открытом многообразии. Зобел** (Intersection theory on an open variety. Zobel A.), Ann. mat. pura ed appl., 1958, **46**, 1—17 (англ.)

Автор исследует возможность построения теории пересечений на алгебраическом многообразии $W$, из которого удалено алгебраическое подмногообразие $S$. Исследуются два метода, предложенные Севери (Severi F., Ann. mat., 1940, **19**, 151) и почитавшиеся им эквивалентными. Автор показывает, что они не эквивалентны и что первый из них не приводит к сколько-нибудь удовлетворительной теории пересечений; напротив, второй (который Севери не рассматривал, считая его эквивалентным первому), основанный на преобразовании $W$ посредством дилатации с центром $S$ в смысле Сегре (Segre B., Ann. mat., 1952, **33**, 5) и рассмотрении подмногообразий в преобразованном многообразии, позволяет построить нужную теорию. В качестве примера рассматриваются конус с точечной вершиной и несингулярными гиперплоскостными сечениями (строится базис для $h$-мерных многообразий) и конус с вершиной любой размерности.

В. В. Морозов

**4472. О многообразии, представляющем пары точек двух пространств. Галларати** (Sulla varietà che rappresenta le coppie di punti di due spazi. Gallarati Dionisio), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1958, **25**, № 5, 276—279 (итал.)

Приводится (без доказательств) ряд результатов, относящихся к характеризации многообразия Коррадо Сегре $S_p \times S_q$ по поведению его касательных. Из них наиболее общий следующий: при $p \geqslant 2$ многообразие Сегре $V_{p+q} = S_p \times S_q$ выделяется из всех не конических дважды дифференцируемых многообразий $V_{p+q}$ пространства $S_{pq+p+q}$ теми свойствами, что все его касательные $S_{p+q}$ не пересекают одно и то же $S_{pq+p-1}$ по пространствам $S_p$, но все пересекают $p+2$ пространств $S_q$ (из коих каждые $p+1$ независимы), причем каждое из последних лежит в некотором касательном $S_{p+q}$.

В. В. Морозов

**4473. Дополнения и замечания к одной теореме Бениамино Сегре. Гуггенхеймер** (Complementi e commenti ad un teorema di Beniamino Segre. Guggenheimer Heinrich), Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1958(1959), **25**, № 6, 453—456 (итал.)

Некоторые результаты работы РЖМат, 1959, 5146 обобщаются автором на более широкие классы многообразий посредством методов гомологической алгебры. Пусть $V$ — компактное топологическое пространство, $M$ — его замкнутое подпространство. Предполагая, что числа Бетти $b_r$ для $V$ и $M$ существуют, рассматривая точную гомологическую последовательность

$$\ldots \xleftarrow{p_*} H_r(V) \xleftarrow{i_*} (H_r(M) \xleftarrow{\partial_*} H_{r+1}(V-M) \xleftarrow{p_*} H_{r+1}(V) \xleftarrow{i_*} \ldots$$

и обозначая $s_r = \dim i_* H_r(M)$, автор получает обобщение формулы, данной Серре: $b_{r+1}(V-M) = b_{r+1}(V) + b_r(M) - s_{r+1} - s_r$. Далее, называя преобразованием модификации $T$ преобразование $T: V \to \bar{V}$ пространств $V$ и $\bar{V}$, обладающее тем свойством, что существуют подпространства $M \subset V$, $\bar{M} \subset \bar{V}$ (аналоги исключительных гиперповерхностей), вне которых $T$ однооднозначно и взаимно непрерывно, и предполагая $V$, $\bar{V}$ компактными, а $M$, $\bar{M}$ — замкнутыми, гомологические же их размерности — конечными, автор находит, что

$$b_{r+1}(V) + b_r(M) - s_{r+1} - s_r = b_{r+1}(\bar{V}) + b_r(\bar{M}) - \bar{s}_{r+1} - \bar{s}_r,$$

откуда вытекает, что для всякого преобразования Кремоны исключительные гиперповерхности самого преобразования и обратного к нему имеют совпадающие числа Бетти. В заключение выводятся некоторые результаты, относящиеся к преобразованиям $V$ в себя ($V = \bar{V}$); в частности, оказывается, что если гомологические размерности $m$ и $\bar{m}$ для $M$ и $\bar{M}$ не равны и $\bar{m}$ — 1-нечетное, то $\bar{M}$ не может быть линейным пространством.

В. В. Морозов

**4474. Об абелевых многообразиях. Вейль А.** Сугаку, 1956, 7, № 4, 259—261 (японск.)

**4475. Расширение векторных групп абелевыми многообразиями. Розенликт** (Extensions of vector groups by abelian varieties. Rosenlicht Maxwell), Amer. J. Math., 1958, **80**, № 3, 685—714 (англ.)

Рассматриваются алгебраические группы $G$, $H$, $A$ и т. д. над произвольным полем $k$. Расширением $H$ над $A$ называется алгебраическая группа $G$ совместно с точной последовательностью $0 \to H \to G \to A \to 0$, в которой все гомоморфизмы — сепарабельные рациональные. Два расширения $H$ над $A$ называются эквивалентными, если имеет место коммутативная диаграмма (в которой $\psi$ — рациональный гомоморфизм, а крайние вертикальные отображения — тождества):

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & H & \to & G & \to & A \to 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \psi & & \downarrow \\ 0 & \to & H & \to & G' & \to & A \to 0. \end{array}$$

Изучается множество $\mathrm{Ext}(A, H)$ классов эквивалентности коммутативных расширений абелевой группы $H$ над абелевой группой $A$; в нем вводится закон композиции, в силу которого $\mathrm{Ext}(A, H)$ оказывается коммутативной группой, нулевым элементом которой является тривиальное расширение $A \times H$. Изучаются свойства $\mathrm{Ext}(A, H)$ и устанавливаются некоторые точные последовательности содержащие этот функтор и функтор $\mathrm{Hom}(A, H)$. Основным результатом является теорема о бижективности канонического отображения $\mathrm{Ext}(A, H) \to H^1(A, R)$, где $A$ — абелево многообразие, $H$ — связная коммутативная линейная алгебраическая группа и $R$ — связка (sheaf) источников локально регулярных отображений из $A$ в $H$. Особо изучается аддитивная группа прямой $G_a$ и группа $G_a^n = G_a \times \ldots \times G_a$ и устанавливаются канонические формы гомоморфизмов $G_a^m \to G_a^n$. При этом оказывается, что в противоречии с прежними предположениями автора, на $G_a^n$ ($p \neq 0$, $n > 1$) возможно бесконечное множество структур векторной группы. Рассматриваются расширения $G_a$ посредством абелева многообразия $A$, связанные с таким расширением вопросы рациональности и т. д. Основные результаты: во всех случаях $\dim \mathrm{Ext}(A, G_a) = \dim A$; далее, если $C$ — полная неособенная кривая и $f: C \to I$ — каноническое отображение в ее якобиево многообразие, то бижективно ассоциированное отображение $f^*: H^1(I, O_I) \to H^1(C, O_C)$, где $O$ — связка локальных колец. Из других результатов отметим, что абелево многообразие является образом прямого произведения якобиевых многообразий в сепарабельном рациональном гомоморфизме. В работе доказываются некоторые утверждения, высказанные в РЖМат, 1954, 1096; 1955, 3961; 1958, 2407. Основная цель исследования — подход к теории простых дифференциалов второго рода. В добавлении приведены некоторые, относящиеся сюда результаты.

В. В. Морозов

**4476. Некоторые свойства абелевых многообразий над полем характеристики $p$. Серр** (Quelques propriétés des variétés abéliennes en caractéristique $p$. Serre Jean-Pierre), Amer. J. Math., 1958, **80**, № 3, 715—739 (франц.)

Показывается, что алгебра когомологий $H^*(A) = \sum H^n(A, O_A)$ абелева многообразия $A$ размерности $g$ ($O_A$ — связка его локальных колец) совпадает с внешней алгеброй векторного пространства (размерности $g$) $H^1(A, O_A)$ и что $A$ не имеет гомологического кручения (т. е. операции Бокштейна на $H^*$ — тождественные нули). Строится пример (опровергающий прежнее предположение автора) многообразия $A$, для которого вторая группа когомологии с коэффициентами в векторах Витта на $A$ не является модулем конечного типа.

Изогения $G \to G'$ алгебраических групп называется радикальной, если $K^{p^n} \subset K'$ для достаточно большого $n$, и изогенией высоты 1, если $K' \subset K^p$. Проводится классификация радикальных изогений высоты 1, чем частично воспроизводится один результат Барсотти (РЖМат, 1958, 1549). Даны приложения к теории многообразия Албанезе. Изучается поведение группы $\mathrm{Ext}(A, B)$ (реф. 4475) относительно указанных изогений и дается одна теорема о структуре характеристического полинома эндоморфизма $A$.

В. В. Морозов

**4477. О теореме единственности для некоторых типов бирациональных преобразований. Мюрре** (On a uniqueness theorem for certain kinds of birational transformations. Murre J. P.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1959, **A62**, № 2, 129—134; Indagationes math., 1959, **21**, № 2, 129—134 (англ.)

Доказывается следующая теорема, представляющая алгебраический вариант теоремы Граузра — Реммерта — Эппли (РЖМат, 1958, 9678) о связи модификаций и обобщенного $\sigma$-процесса Хопфа. Пусть $V$ и $V'$ — два $n$-мерных абсолютно неприводимых полных многообразия, $T: V \to V'$ — бирациональное преобразование и $W$ — компонента фундаментального многообразия (fundamental locus) $F$ преобразования $T$ на $V$. Предположим, что каждая точка на $W$ — простая как на $V$, так и на $W$, что $T$ антирегулярно на $W$, что $T(W)$ имеет только одну $(n-1)$-мерную компоненту $W'$ и что каждая точка $W'$ — простая на $V'$. Обозначим через $|W|^*$ точечное множество $|W| - \bigcup_\alpha |W_\alpha|$, где суммирование распространено на все отличные от $W$ компоненты $F$ и будем говорить, что два бирациональных преобразования $T_1: V \to V'$ и $T_2: V \to V''$ бирегулярно эквивалентны, в точке $Q \in V$, если $T_2 T_1^{-1}$ бирегулярно в каждой точке из $T_1(Q)$. Тогда $T$ и моноидальная дилатация многообразия $V$ с центром в $W$ бирегулярно эквивалентны во всех точках $|W|^*$. В случае, если $n = 2$ и $T$ антирегулярно, то $T$ бирегулярно эквивалентно произведению конечного числа моноидальных дилатаций.

В. В. Морозов

**4478. Бирациональные преобразования, связанные с проективитетом на прямой трикомплексной или тридуальной. Бальсимелли** (Trasformazioni birazionali legate alle proiettività dell' $S_1$ tricomplesso e triduale. Balsimelli Pio), Giorn. mat. Battaglini, 1956, 84, № 1, 75—80 (итал.)

Автор исходит из проективитета в $S_1$:

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy \tag{1}$$

и полагает

$$x = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3; \quad x' = x'_1u_1 + x'_2u_2 + x'_3u_3,$$
$$y = x_4u_1 + x_5u_2 + x_6u_3; \quad y' = x'_4u_1 + x'_5u_2 + x'_6u_3,$$
$$a = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3; \quad b = b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3,$$
$$c = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3; \quad d = d_1u_1 + d_2u_2 + d_3u_3.$$

1. Если $u_1$, $u_2$, $u_3$ — единицы трикомплексной алгебры, то указанные подстановки дадут

$$x'_1 = a_1x_1 + b_1x_4, \quad x'_4 = c_1x_1 + d_1x_4,$$
$$x'_2 = a_2x_2 + b_2x_5, \quad x'_5 = c_2x_2 + d_2x_5,$$
$$x'_3 = a_3x_3 + b_3x_6, \quad x'_6 = c_3x_3 + d_3x_6$$

и это будут уравнения проективитета в комплексном $S_5$ как образ проективитета (1). Для $S_3^*$, определяемого в $S_5$ уравнениями $x_5 = x_4$, $x_6 = x_4$, автор получает преобразование:

$$\begin{aligned} x'_1 &= (a_1x_1 + b_1x_4)(c_2x_2 + d_2x_4)(c_3x_3 + d_3x_4), \\ x'_2 &= (a_2x_2 + b_2x_4)(c_1x_1 + d_1x_4)(c_3x_3 + d_3x_4), \\ x'_3 &= (a_3x_3 + b_3x_4)(c_1x_1 + d_1x_4)(c_2x_2 + d_2x_4), \\ x'_4 &= (a_1x_1 + b_1x_4)(c_2x_2 + d_2x_4)(c_3x_3 + d_3x_4), \end{aligned} \tag{4}$$

которое является кубическим бирациональным преобразованием $S_3$; дается исследование линейной системы кубических поверхностей:

$$\lambda_1 f_1(x_j) + \lambda_2 f_2(x_j) + \lambda_3 f_3(x_j) + \lambda_4 f_4(x_j) = 0$$

(здесь $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$ — правые части в уравнениях (4)), связанных с полученным преобразованием; оказывается, что система гомалоидальна.

2. Если к системе (1), (2) применить закон перемножения тридуальных чисел, то аналогично получим

$$x'_1 = a_1x_1 + b_1x_4, \qquad x'_4 = c_1x_2 + d_1x_4,$$
$$x'_2 = a_1x_2 + a_2x_2 + b_1x_5 + b_2x_4, \quad x'_5 = c_1x_2 + c_2x_1 + d_1x_5 + d_2x_4,$$
$$x'_3 = a_1x_3 + a_3x_1 + b_1x_6 + b_3x_4, \quad x'_6 = c_1x_3 + c_3x_1 + d_1x_6 + d_3x_4$$

уравнения проективитета в $S_5$ как образ проективитета (1). Для $S_3^*$, определяемого уравнениями $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, получим преобразование:

$$\begin{aligned} x'_1 &= (a_1x_1 + b_1x_4)(c_1x_1 + d_1x_4), \\ x'_2 &= (a_2x_1 + b_2x_4 + a_1x_2)(c_1x_1 + d_1x_4) - \\ &\quad - (a_1x_1 + b_1x_4)(c_2x_1 + d_2x_4 + c_1x_2), \\ x'_3 &= (a_3x_1 + b_3x_4 + a_1x_3)(c_1x_1 + d_1x_4) - \\ &\quad - (a_1x_1 + b_1x_4)(c_3x_1 + d_3x_4 + c_1x_3), \\ x'_4 &= (c_1x_1 + d_1x_4)^2 \end{aligned} \tag{5}$$

— бирациональное квадратичное, что подтверждается подробным исследованием соответствующей линейной системы поверхностей

$$\lambda_1 f_1(x_j) + \lambda_2 f_2(x_j) + \lambda_3 f_3(x_j) + \lambda_4 f_4(x_j) = 0,$$

где $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$ — правые части уравнений (5).

С. С. Бюшгенс

**4479. Об одном бирациональном преобразовании плоскости и его изображении в гиперпространстве. Трамп он** (Sur une transformation birationnelle du plan et sa représentation hyperspatiale. Trempont Jacques), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1957, 43, № 7, 442—451 (франц.)

В плоскости $\sigma$ рассматривается гомалоидальная система $(A)$ кривых порядка $4n+1$, проходящих $2n$ раз через четыре точки $A_1, A_2, A_3, A_4$ и дважды через $2n$ точек $B_1, B_2, \ldots, B_{2n}$; кривые $A$ предполагаются имеющими переменные касательные в указанных фундаментальных точках, фундаментальными кривыми системы $|A|$ будут четыре кривых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ порядка $2n$ и $2n$ конических сечения $\beta_l$. Отнеся кривые $A$ к прямым $a'$ плоскости $\sigma'$, мы получим бирациональное преобразование $T$ между $\sigma$ и $\sigma'$, прямым $a$ плоскости $\sigma$ будут соответствовать в плоскости $\sigma'$ кривые $A'$ порядка $4n+1$. Гомалоидальная система $|A'|$ аналогична системе $(A)$. Вводятся кривые:

$$H^{2n+1}(A_1^n A_2^n A_3^n A_4^n B_1^1 B_2^1 \ldots B_{2n}^1)$$

порядка $2n+1$, содержащие отмеченные в скобках точки с кратностями, равными их верхним индексам; преобразование $T$ переводит $H$ в аналогичные кривые $H'$. Линейная система $|H|$ будет порядка $2n+1$, жанра $n$ и размерности $r \geqslant n+2$; отнесем проективно кривые $H$ к гиперплоскостям линейного пространства $S_{n+2}$, тогда точкам плоскости $\sigma$ будут соответствовать точки некоторой поверхности $F$ порядка $2n+1$. Аналогичным построением над системой $|H'|$ получим поверхность $F'$ порядка $2n+1$ в пространстве $S_{n+2}$. Поверхности $F$ и $F'$ оказываются проективными и можно считать их совпадающими, в последнем случае $F$ будет изображать не только плоскость $\sigma$ (или $\sigma'$), но и пары соответствующих точек в преобразовании $T$. Прямым $a$ плоскости $\sigma$ и кривым $A'$ плоскости $\sigma'$ на $F$ соответствуют рациональные кривые $C$ порядка $2n+1$, они образуют гомалоидальную систему: аналогично прямым $a'$ на $\sigma'$ и кривым $A$ на $\sigma$ будут соответствовать на $F$ рациональные кривые $C'$ порядка $2n+1$. Точкам, бесконечно близким $A_i$, и гомологичным точкам фундаментальной кривой $\alpha'_i$ на $F$ соответствуют точки рациональной кривой $G_i$; точкам, бесконечно близким $B_i$ и гомологичным точкам конического сечения $\beta'_i$ на $F$ соответствуют точки прямой $K'_i$. На $F$ имеются таким образом четыре рациональных кривых $G_1$, $G_2$, $G_3$, $G_4$ и $2n$ прямых $K_1, K_2, \ldots, K_{2n}$; меняя роли $\sigma$ и $\sigma'$, получим на $F$ четыре рациональных кривых $G'_1, G'_2, G'_3, G'_4$ и $2n$ прямых $K'_1, K'_2, \ldots, K'_{2n}$. Изучаются взаимоотношения тех и других. Далее рассматриваются на $F$ прямые $a_{ij}$, соответствующие прямым полного четырехвершинника $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ и их взаимное расположение; а затем вообще конические сечения $T$, проходящие через эти четыре точки, их соответствующие в $T$ конические сечения $\Gamma'$ и их отображение $\gamma$ на $F$.

Если плоскости $\sigma$ и $\sigma'$ предполагаются совпавшими, то преобразование $T$ будет инволютивным, последнее на $F$ наследует инволютивное соответствие $T'$; доказывается ряд свойств преобразований $T$ и $T'$ в предположении, что первое из этих преобразований переводит всякое коническое сечение $\Gamma$ в себя, в частности дается для инволюции $I$ образованной $T$ изображение ее в

виде нормальной рациональной линейчатой поверхности в $S_n$. С. С. Бюшгенс

**4480. О группах с инвариантной системой инволюторных образующих, в которых имеет место общая теорема о трех отражениях. I, II. Линденберг** (Über Gruppen mit einem invarianten System involutorischer Erzeugender, in dem der allgemeine Satz von den drei Spiegelungen gilt. I. II. Lingenberg Rolf), Math. Ann., 1959, 137, № 1, 26—41; № 2, 83—106 (нем.)

Элемент $\alpha \neq 1$ группы $\Gamma$ называется инволюторным, если $\alpha = \alpha^{-1}$. Пусть группа $\Gamma$ имеет систему $S$ инволюторных образующих. Элементы $\Gamma$ обозначим через $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, а элементы $S$ через $a, b, c, \ldots$. Множество всех произведений $ab$ обозначим через $M$, а центр группы $\Gamma$ через $Z$. Два элемента $\alpha$ и $\beta$ назовем соединимыми, если существует такой элемент $v \in S$, что $\alpha v$ и $\beta v$ инволюторны. Обозначим через $N$ множество всех элементов $M$, соединимых со всеми элементами $M$. Постулируются следующие аксиомы.

Аксиома I. Если для некоторого $\alpha \in M$ элементы $\alpha x$, $\alpha y$, $\alpha z$ инволюторны, то $xyz \in S$.

Аксиома II. Множество $N$ содержит такой неинволюторный элемент $\gamma$ и такой элемент $u$, что $u\gamma u \neq \gamma, \gamma^{-1}$. Если $\alpha \in M$, то множество элементов $s \in S$ таких, что $\alpha s$ инволюторно, называется пучком $G(\alpha)$. Если $\alpha \in N$, то пучок $G(\alpha)$ называется собственным. Рассматривая элементы $S$ как прямые плоскости, а пучки $G(\alpha)$ как точки, мы приводим в соответствие группе $\Gamma$ и системе $S$ групповую плоскость с помощью следующих определений. Прямые $a$ и $b$ называются перпендикулярными, если $ab$ инволюторно. Точка $G(\alpha)$ считается лежащей на прямой $a$, если $a \in G(\alpha)$. Прямая, соединяющая данные две точки, может не существовать, но если она существует, то она единственная. Если $\gamma \in N$, то точка $G(\gamma)$ соединима со всеми другими точками групповой плоскости. Такие точки называются собственными. Из аксиомы II следует, что на групповой плоскости имеются, по крайней мере, три собственные точки, не лежащие на одной прямой. Множеству элементов $x$ пучка $G(\alpha)$ и любому элементу $\beta \in \Gamma$ приводится в соответствие множество элементов $\beta^{-1} x \beta$, которое обозначается через $G(\alpha)^{\beta}$. Доказывается, что $G(\alpha)^{\beta} = G(\beta^{-1}\alpha\beta)$. Отображение $*_\beta$, определяемое условиями $x^* = \beta^{-1} x \beta$ и $G(\alpha)^* = G(\alpha)^{\beta}$ называется движением групповой плоскости. Если $\beta = a \in S$, то соответствующее движение называется отражением в прямой $a$. Доказывается следующая теорема: Результатом последовательных отражений в трех прямых $a, b, c$ групповой плоскости, имеющих общую точку $G$, является отражение в четвертой прямой $d$, проходящей через $G$. В этом заключается общая теорема о трех отражениях. Далее доказывается, что если прямая $g$ не принадлежит центру $Z$ группы $\Gamma$, то все перпендикулярные к $g$ прямые содержатся в одном пучке $G(\alpha)$, который может, кроме того, содержать также прямую $g$. Этот пучок обозначается через $G(g)$ и называется пучком перпендикуляров к $g$. Если $x \in G(g)$, то либо $xg$ инволюторно, либо $x = g$. В том случае, когда существует прямая $g \notin Z$ такая, что $g \notin G(g)$, группа $\Gamma$ называется регулярной. Если же для всех $g \notin Z$ $g \in G(g)$, то группа $\Gamma$ называется нерегулярной. Далее вводится понятие полярного трехсторонника, образуемого прямыми $a, b, c$, удовлетворяющими равенству $abc = 1$, из которого следует, что произведения $bc$, $ca$ и $ab$ инволюторны, так что стороны полярного трехсторонника попарно перпендикулярны.

I. Если $\Gamma$ — конечная регулярная группа и если не существует полярного трехсторонника, то группа $\Gamma$ изоморфна группе евклидовых движений.

II. Если же для конечной регулярной группы $\Gamma$ существует полярный трехсторонник, то группа $\Gamma$ изоморфна группе движений гиперболической проективной плоскости.

III. В том случае, когда центр конечной нерегулярной группы состоит только из единичного элемента, группа изоморфна группе движений в евклидовой плоскости с характеристикой 2.

IV. Если же центр конечной нерегулярной группы содержит элемент, отличный от единицы, то факторгруппа $\Gamma/Z$ изоморфна группе движений гиперболической проективной плоскости с характеристикой 2. В случае I группа $\Gamma$ изоморфна группе собственных ортогональных преобразований $O_3^+(K, f)$ трехмерного векторного пространства $V_3(K)$, построенного над полем $K$, характеристика которого $\neq 2$, причем пространство $V_3(K)$ принадлежит симметрической бинарной форме $f$.

В случае II группа $\Gamma$ изоморфна группе ортогональных преобразований $O_3^+(K, f)$, причем характеристика $K$ не равна 2, а $f$ — тернарная форма. В случае III $\Gamma$ изоморфна группе $O_3(K, Q)$, причем характеристика $K$ равна двум, а $Q$ — бинарная форма. В случае IV $\Gamma/Z$ изоморфна группе $O_3(K, Q)$, где характеристика $K$ равна двум, а $Q$ — тернарная форма. Ю. Л. Рабинович

**4481. Дифференциальные элементы 2-го порядка. Лонго** (Gli elementi differenziali del 2°-ordine di $S_r$. Longo Carmelo), Rend. mat. e applic., 1955, 13, № 3-4, 335—372 (итал.)

Работа содержит решение проблемы представления дифференциальных элементов 2-го порядка проективного пространства $S_r$ для $r > 2$. Для $r = 2$ изучение многообразия $W$ элементов $E_2$ было начато Штуди (Study E., 1901); Герарделли (Gherardelli G., 1941) снова обратился к этой теме, чтобы найти согласно понятию, введенному Севери, минимальную модель многообразия $W$, т. е. такое многообразие, которое среди бирациональных преобразований $W$ имеет наименьший порядок. Такая модель дает эффективное построение системы координат, удобное для представления элемента $E_2$ на плоскости; эта система, кроме координат $x^i$ $(i = 0, 1, 2)$ центра и координат $u_i$ касательной включает еще две координаты $X$ и $U$, в последние, кроме $x$ и $u$, входят еще координаты точки и прямой, выбранные произвольно, но не влияющие на значения $X$ и $U$. В первой части статьи изучается многообразие $M^{0,(1,2;r)}$ элементов $(P, p, \pi)$ точка — прямая — плоскость (инцидентных). Здесь автор использовал идею Мартинелли и его результаты о базе многообразия $M^{(0,1;r)}$ элементов $E_1$ в $S_r$. Необходимые из этих результатов резюмируются автором, однако с некоторым дополнением. Обозначим через $G^{(h;r)}$ грассманиан пространства $S_h$ из $S_r$, принадлежащий пространству $S_{d_h}$ размерности $d_h = \binom{r+1}{h+1} - 1$. Многообразие $M^{(0,1,2;r)}$ есть многообразие, связанное с произведением $V$ пространств $S_r$, $S_{d_1}$, $S_{d_2}$, или, точнее, $W$-произведение $S_r$, $G^{(1;r)}$, $G^{(2;r)}$. Пусть $x^i$, $p^{ik}$, $\pi^{ikl}$ — соответственно однородные координаты точки $P_1$, плюкеровы координаты прямой $p$ и плоскости $\pi$. Полагая

$$(i_s k_s) = \rho_s, \quad (i_t k_t j_t) = \sigma_t \quad (s = 0, 1, \ldots, d_1, \; t = 0, 1, \ldots, d_2),$$

мы определим $V$ уравнениями

$$\xi^{i_1 \ldots i_\lambda ; \rho_1 \ldots \rho_\mu ; \sigma_1 \ldots \sigma_\nu} = x^{i_1} \ldots x^{i_\lambda} p^{\rho_1} \ldots p^{\rho_\mu} \pi^{\sigma_1} \ldots \pi^{\sigma_\nu}$$

или в компактной форме

$$\xi = (x)^\lambda (p)^\mu (\pi)^\nu . \qquad (1)$$

Многообразие $W$ получается присоединением к этим уравнениям квадратичных соотношений:

$$p^{i}\{_{l}\,p^{kl}\} = 0,\quad \pi^{ik}\{_{l}\,\pi^{lm}\}_{k} = 0, \qquad (2)$$

определяющих $G^{(1;\,r)}$ и $G^{(2;\,r)}$. Многообразие $M^{(0,1,2;r)}$ получается присоединением к $W$ уравнений

$$[xp] \equiv x^{\{i}\,p^{ik\}} = 0,\quad [p,\pi] \equiv p^{i\{k}\,\pi^{iln\}} = 0, \qquad (3)$$

выражающих принадлежность точки $x$ прямой $p$ и прямой $p$ плоскости $\pi$. Обозначим через $M^{(0,1,2;\,r)^m} = V^{(m)}$ многообразие элементов $(P, p, \pi)$ из $S_r$ с центром $P$, принадлежащих некоторому заданному $S_m$; доказывается, что $V^{(n)}$ бирационально эквивалентно многообразию $\Pi_{n+2r-3}$ — произведению линейного пространства $S'_m$ (находящегося в проективном соответствии с $S_m$, а потому можно считать совпадающего с $S_m$) и многообразия $M^{(0,1;\,r-1)}_{2r-3}$, представляющего элементы $E_1$ пространства $S_{r-1}$. Отметив, что каждое алгебраическое многообразие на $\Pi$ является образом некоторого соответствия между $S_m$ и $M^{(0,1;\,r-1)}$, автор заключает, что базис размерности $k$ на $\Pi$ представляется образами размерности $k$ алгебраических соответствий. Если бирациональное соответствие между $V^m$ и $\Pi$ без исключений, то знание базиса на $\Pi$ приводит к определению базиса на $V^{(m)}$, но и при наличии исключений это свойство сохраняется. Совокупность исключительных элементов на $V^{(m)}$ образует подмногообразие $V^{(m-1)}$-элементов $(P, p, \pi)$ с центром $P$, принадлежащим $S_{m-1}$. Далее строится базис $\Pi$-размерности $k$, а затем и базис того же порядка для $M^{(0,1,2;\,r)^m}$

Условия инциденции (3) дают на $\xi$ некоторые соотношения

$$\xi^{i_1\ldots i_{\lambda-1}\{i;jk\}\rho_1\ldots\rho_{\mu-1};\sigma_1\ldots\sigma_\nu} = 0, \qquad (4)$$

$$\xi^{i_1\ldots i_\lambda;\rho_1\ldots\rho_{\mu-1},l\{k;jlm\}\sigma_1\ldots\sigma_{\nu-1}} = 0. \qquad (5)$$

Известно, что гиперплоскости (4) независимы. Можно доказать, что и гиперплоскости (5) независимы как между собой, так и от гиперплоскостей (4). Таким образом многообразие $M^{(0,1,2,\,r)}_{\lambda\mu\nu}$ индексов $\lambda\,\mu\,\nu$ получается как пересечение многообразия $V$ с гиперплоскостями (4), (5). Из самих уравнений многообразия следует, что его общее сечение гиперплоскостью представляет собой 1) $\lambda$-многообразий $A$, каждое из которых образовано элементами $(P, p, \pi)$ с центром на данной гиперплоскости $S_{\lambda-1}$, 2) $\mu$-многообразий $B$, каждое из которых образовано элементами $(P, p, \pi)$ с прямой, инцидентной данному $S_{r-2}$, 3) наконец, $\nu$-многообразиями $C$, каждое из которых состоит из элементов $(P, p, \pi)$ с плоскостью $\pi$, инцидентной данному $S_{r-3}$. Координаты элемента $E_2$ в $S_2$ определяются следующим образом. Пусть $x^i = x^i(t)$ — параметрические уравнения регулярной кривой вблизи $t = t_0$, тогда

$$x^i(t) = x^i(t_0) + (t-t_0)\left(\frac{dx^i}{dt}\right)_0 + \frac{(t-t_0)^2}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2x^i}{dt^2}\right)_0 + [3]_{t=t_0},$$

где $[3]_{t=t_0}$ — члены третьего и выше измерения относительно $t - t_0$; регулярная $E_2$ будет объектом, определяемым этим разложением. Центром $E_2$ будет точка $x^i(t_0)$, касательной — прямая с координатами

$$\theta\,u^{ik} = p^{ik} = x^{\{i}\frac{dx^{k\}}}{dt}, \qquad (7)$$

где производные берутся для $t = t_0$. Плоскость $\pi^{ijk}$ определяется координатами

$$\pi^{ikj} = \left| x^i \frac{dx^k}{dt} \frac{d^2x^j}{dt^2} \right| \qquad (8)$$

Из этих соотношений имеем

$$\xi^{j;ik} = u^{ji}\frac{du^{kj}}{dt} - u^{jk}\frac{du^{ij}}{dt}. \qquad (9)$$

Пусть $w^{ik}$ будут координаты произвольной прямой $w$. Положим

$$(w\xi)^{ikj} = w^{ik}\,\xi^{j;ik} + w^{kj}\,\xi^{i;kj} + w^{ji}\,\xi^{k;ji},$$

тогда

$$(w\xi)^{ikj} = \theta'\,w^{\{ik}\,x^{j\}}\,\pi^{ikj}.$$

Обозначая через $x^l$ координаты точки $x$ и $z_{lk}$ координаты произвольного $S_{r-2}$, положим

$$(w,\,x)^{ikj} = w^{\{ik}\,x^{j\}};\ (wz) = w^{ik}z_{lk}.$$

В последнем выражении суммирование по повторным индексам. Введем далее выражения

$$X = \frac{(z,\,p)}{(z,\,u)},\ U^{ikj} = \frac{(w,\,\xi)^{ikj}}{(w,\,x)^{ikj}}. \qquad (10)$$

Из указанных выше соотношений следует, что

$$X = \theta,\ U^{ikj} = \theta'\,\pi^{ikj}.$$

Отсюда получится, что выражение (10) не зависит от произвола прямой $w_n$ $S_{r-2}$. Если элемент $E_2$ в $S_r$ определен системой координат

$$x^i,\ u^{ik},\ X,\ U^{ikj} \qquad (11)$$

при условиях инцидентности точки $x$ прямой $u$ и прямой $u$ плоскости $U^{ikj}$, то указанная группа координат эквивалентна группе

$$\rho\,x^l,\ \sigma\,u^{lk},\ \nu\rho^3\,X,\ \nu\sigma^3\,U^{ikj}, \qquad (12)$$

где $\rho, \sigma, \nu$ — произвольные ненулевые независимые множители. Затем преобразование (12) координат (11) элемента $E_2$ позволяет получить уравнение многообразия $W$. Если воспользоваться ранее введенными компактными обозначениями, то эти уравнения будут

$$\xi = X^\lambda\,(x)^m\,(u)^{n+3\lambda}\,[x,u] = 0,\quad \eta = U^\lambda\,(x)^{m+3\lambda}\,(u)^n,\ [u,U] = 0; \qquad (m\,n\,\lambda \neq 0)$$

минимальная модель получится при $\lambda = m = n = 1$. В заключение автор дает целый ряд свойств многообразия $W$.

С. С. Бюшгенс

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

**4482. Характеристическое свойство поверхностей второго порядка.** Крянгэ (O proprietate caracteristică suprafețelor de ordinul al II-lea. Creangă Ioan), An. ştiinț. Univ., Iaşi. Sec. I, 1955, **1**, № 1-2, 39—42 (рум.; рез. русск., франц.)

Сперри (Sperry P., Amer. J. Math., 1918, **40**, p. 213) рассматривал на поверхности системы кривых, обладающих свойством, что характеристические точки касательных плоскостей вдоль этих кривых в некоторой точке поверхности описывают в касательной плоскости в той точке прямую линию.

Автор ищет поверхности, на которых аксиальная система (реф. 4489) обладает вышеуказанным свойством. Такая система называется тангенциальной.

Показано, что этим свойством обладают поверхности второго порядка и только они. На невырожденной поверхности второго порядка любая аксиальная система является тангенциальной. Оси этих двух систем сопряжены относительно поверхности. Характеристические точки касательных плоскостей вдоль геодезических описывают прямую, сопряженную нормали поверхности.

Н. М. Остиану

**4483. О линейчатых поверхностях с постоянным параметром распределения. Браунер** (Über Strahlflächen von konstantem Drall. Brauner H.), Monatsh. Math., 1959, **63**, № 2, 101—111 (нем.)

Рассматриваются способы получения линейчатых поверхностей с постоянным параметром распределения при помощи изгибаний Миндинга и с использованием так называемого натурального уравнения линейчатой поверхности. Применяемый аналитический аппарат Круппа основан на введении специального подвижного репера $(\mathfrak{e}, \mathfrak{n}, \mathfrak{z})$, где $\mathfrak{e}$ — единичный вектор прямолинейной образующей линейчатой поверхности, $\mathfrak{e} = \dot{e}/|\dot{e}|$ — нормальный вектор и $\mathfrak{z} = (\mathfrak{e} \times \dot{\mathfrak{e}})/|\dot{\mathfrak{e}}|$, где $\dot{e}$ — производная от $\mathfrak{e}$ по скалярному аргументу. Репер зависит от длины дуги $u$ стрикционной линии $s$ линейчатой поверхности. Если через $u_1$ и $u_3$ обозначить длины дуг сферических изображений $\mathfrak{e}(u)$ и соответственно $\mathfrak{z}(u)$, то называют $\varkappa = du_1 : du$ „кривизной" и $\tau = du_3 = du$ „кручением" линейчатой поверхности. Если $\mathfrak{t}(u)$ — вектор касательной к $s$, то называют $\sigma(u) = \measuredangle \mathfrak{et}$ „сжатием". Заданием $\varkappa(u)$, $\tau(u)$, $\sigma(u)$ однозначно с точностью до движения определяется линейчатая поверхность, которая обозначается $\Phi(\varkappa, \tau, \sigma)$ и имеет координатное представление: $\mathfrak{r}(u, v) = \gamma(u) + v\mathfrak{e}(u)$, где вектор $\gamma(u)$ определяет стрикционную линию. Параметр распределения $d = \sin\sigma/\varkappa$.

Изгибанием Миндинга некоторой линейчатой поверхности $\Phi(\varkappa, \tau, \sigma)$ называют $\Phi^*(\varkappa, \tau^*, \sigma)$, где $\tau^*$ — произвольная функция $u$. Приводятся известные теоремы об изгибании $\Phi$, при котором стрикционная линия переходит в асимптотическую линию (Schmieglinie): $\tau^* = \varkappa \operatorname{ctg}\sigma$ или в линию кривизны: $\tau^* = -\varkappa \operatorname{tg}\sigma$, а также об изгибании $\Phi$ в коноидную линейчатую поверхность ($\tau^* = 0$) и в такую, у которой направляющий конус является конусом вращения ($\tau^* : \varkappa = \text{const}$).

Применение этих теорем к поверхностям $\Phi$ с постоянным $d$ приводит к следующим результатам: 1) Если при изгибании $\Phi$ ее стрикционная линия становится линией кривизны, то все соприкасающиеся гиперболоиды оказываются гиперболоидами вращения. 2) $\Phi$ может так изогнуться, что линии кривизны отсекают на образующих конгруэнтные ряды точек. 3) Если в соприкасающейся полосе некоторой кривой постоянного кручения смещать некоторую прямую геодезически параллельно, то она опишет поверхность с постоянным $d$. Изгибанием такой поверхности получают все поверхности постоянного параметра распределения.

Далее ищутся особые $\Phi$ с постоянным $d$, на которых стрикционные линии являются геодезическими. Оказывается, что: 4) такие поверхности $\left(\text{для } \sigma \neq 0, \frac{\pi}{2}\right)$ являются изгибаниями некоторого гиперболоида вращения. 5) Ортоидные линейчатые поверхности являются изгибаниями некоторой спрямляющей поверхности (Wendelfläche). Последняя определяется в натуральных координатах $\Phi^*\left(\varkappa = \text{const}, 0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Каждая линейчатая поверхность может изогнуться в коноидную линейчатую поверхность ($\tau = 0$). Для случая $d = \text{const}$ поверхность строится следующим образом:

В некоторой плоскости $P$ дана кривая $c$, $K$ — ее кривизна и $w$ — длина ее дуги; на $c$, как на основании, строится цилиндр, образующие которого перпендикулярны $P$ и от каждой точки $c$ откладывается по образующей цилиндра отрезок $d\int K dw$. Конец отрезка опишет стрикционную линию некоторого коноида $\Phi$ с постоянным $d$, у которого прямолинейные образующие параллельны касательным кривой $c$.

В частном случае, если $c$ — окружность, то, как известно, $d$ для открытой прямой линейчатой винтовой поверхности равен параметру винта.

Рассматривается образование линейчатой поверхности прямой, жестко связанной с подвижным естественным трехгранником $T$ данной кривой $c$ при движении $T$ по $c$. Пусть $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ — координаты вектора $\mathfrak{e}$ относительно репера $T\{\mathfrak{t}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}\}$. Вектор $\mathfrak{e}$ может быть единичным ($\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$) и изотропным ($\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$). Доказывается одна теорема, дающая изотропную линейчатую поверхность с постоянным $d$, и другая теорема, дающая один частный случай действительной линейчатой поверхности с постоянным $d$. Ищется такая кривая $c$, чтобы прямая, параллельная касательной к $c$ и жестко связанная с $T$, при движении $T$ по $c$ образовала бы линейчатую поверхность с постоянным $d \neq 0$. Кривая $c$ оказывается линией откоса и в трехграннике $T$ будет $\infty^2$ прямых, параллельных $\mathfrak{t}$, образующих линейчатые поверхности с постоянным $d$. Среди них находятся так называемые „обобщенные поверхности откоса", на каждой прямолинейной образующей которых, как на луче, центр последнего отстоит от главной нормали кривой $c$ на отрезок, который направлен параллельно вектору Дарбу $\mathfrak{d} = K(\mathfrak{t}\operatorname{tg}\omega + \mathfrak{b})$ кривой $c$ в текущей точке на ней, в которой взят $T$. Для обобщенной поверхности откоса характерно свойство: коническая кривизна есть величина постоянная: $\tau : \varkappa = \operatorname{tg}\omega = \text{const}$.

Каждая линейчатая поверхность с постоянным $d$ может быть изогнута в некоторую обобщенную поверхность откоса.

В. С. Люкшин

**4484. Соотношения между главными радиусами кривизны и единичной нормалью поверхности. Сакелляриу** (Relation between the principal radii of curvature and the unit normal of a surface. Sakellariou Neilos), Prakt. Akad. Athēnōn 1953, **28**, 392—395 (1954). (греч.)

Если поверхность $S$ в $E^3$ отнесена к линиям кривизны, координатным линиям, то формулы Родрига дают соотношение между единичной нормалью поверхности $S$ и ее главными радиусами кривизны $R_1(u, v)$, $R_2(u, v)$. В данной статье выводятся другие соотношения, среди которых типично следующее: Если $e$, $f$, $g$ — коэффициенты первой основной формы фокальной поверхности конгруэнции нормалей поверхности $S$ (отнесенной к тем же координатам $u_1 u_2$), то

$$e\frac{\partial R_1}{\partial u_2} : \frac{\partial e}{\partial u_2} + g\frac{\partial R_2}{\partial u_1} : \frac{\partial g}{\partial u_1} = 0.$$

H. Busemann

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 2, 186

**4485. Сферические образы разных типов данной поверхности. Сакелляриу** (Spherical images of different types of a given surface. Sakellariou Neilos. Prakt. Akad. Athenon 1954, **29**, 380—382 (1955) (греч.)

Подвижной трехгранник $F$ Френе кривой $C$ в $E^3$ заменяется трехгранником $F_\varphi$, получаемым из $F$ посредством поворота его вокруг касательной линии $C$ на постоянный угол $\varphi$. Единичные векторы из начала координат параллельно осям трехгранника $F_\varphi$ образуют две новые сферические кривые. Исследуется их отношения к $C$.

H. Busemann

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 2, 186.

**4486.** **Замечания по поводу одной статьи К. Эрима.** Арф (Remarques à propos d'un mémoire de K. Erim. Arf C. Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, 1954, **A19**, 45—54) (франц.)

В двух не зависимых друг от друга работах Эрим (Erim K., Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, 1945, **A10**, 1—24) и Биран (Biran L., Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, 1946, **A11**, 41—46) распространили инфинитезимальную характеризацию плоских кривых при помощи расположенных на их эволюте центров кривизны на пространственные кривые двойной кривизны. Они это сделали, вводя дуальные величины. Автор пытается получить те же результаты более прямым и интуитивным путем.

S. B. Jackson

Перевод из Math. Revs., 1955, **16**, № 3, 282.

**4487.** **О кривизне цилиндрической поверхности.** Ито (Itoh Makoto, Кюсю дайгаку когаку сюхо, Technol. Repts Kyushu Univ., 1956, **29**, № 2, 118—126 (японск.)

**4488.** **О последовательностях *F*.** Маркус (Asupra şirurilor *F*. Marcus F.), Bul. Inst. politehn. Iaşi, 1955, **1**, № 1-2, 11—23 (рум.; рез. русск., франц.)

Изучаются последовательности $F$, т. е. последовательности преобразований Лапласа в трехмерном проективном пространстве, конгруэнции которых устанавливают соответствие линий Дарбу на фокальных поверхностях. Находятся условия, при которых сопряженная сеть на поверхности порождает последовательность $F$.

Координаты текущей точки поверхности, отнесенной к сети $R$, удовлетворяют системе уравнений:

$$x_{uv} = \frac{\theta_v}{\theta} x_u + cx, \quad x_{uu} + x_{vv} = 2\frac{\theta_u}{\theta} x_u + rx$$

(Math. Cluj, 1948, **23**, 129—130).

Доказано: 1. Конгруэнции, описанные касательными к сопряженной сети $R$, суть конгруэнции $F$, если $k=\varphi(h)$, $\theta=\theta(h)$, где $h$, $k$ — инварианты уравнения Лапласа, соответствующего сети. Справедливо и обратное утверждение. 2. Если четыре последовательные конгруэнции последовательности Лапласа описывают конгруэнции $F$, то последовательность есть последовательность Фубини и все конгруэнции последовательности — конгруэнции $F$. 3. Поверхность, отнесенная к сети $R$, порождает при помощи последовательных преобразований Лапласа последовательность Фубини, если $k=k(h)$; $\theta=\theta(h)$;

$$h_{uv} = F_1(h); \quad h_u h_v = F_2(h), \qquad (1)$$

где $F_1$, $F_2$ — произвольные функции $(h)$. Автор отмечает, что здесь он приходит к известному результату (Фиников С. П., Теория конгруэнций, Гостехиздат, М., 1950).

При исследовании системы (1) рассматриваются случаи а) $F_2(h)=0$; б) $F_1(h)=0$; $F_2(h)\neq 0$; в) $F_1(h)\cdot F_2(h)\neq 0$. Приведены примеры поверхностей, порождающих последовательности $F$.

Г. Ф. Лаптев

**4489.** **Поверхности, обладающие аксиальными цилиндрическими линиями.** Крянгэ (Suprafeţe cu liniile cilindrice axiale. Creangă Ioan), Rev. Univ. «Al. Cuza» şi Inst. politechn. Iaşi, 1955, **2**, № 1-2, 65—73 (рум.)

Цилиндрическими линиями поверхности называются линии, вдоль которых касательные плоскости поверхности огибают цилиндр. Эти линии были введены К. М. Петерсоном. Системой аксиальных кривых поверхности называются линии, вдоль которых соприкасающиеся плоскости поверхности проходят через некоторую прямую, не лежащую в касательной плоскости и проходящую через точку соприкасания — ось системы.

Автор исследует поверхности трехмерного евклидова пространства, цилиндрические линии которых образуют аксиальную систему. Показано, что этим свойством обладают только поверхности второго порядка. При соответствии, устанавливаемом параллельными касательными плоскостями, соответствующие аксиальные системы образованы цилиндрическими линиями тогда и только тогда, когда обе поверхности второго порядка. Только на сфере цилиндрические линии совпадают с геодезическими.

Н. М. Остиану

**4490.** **Соответствие между двумя поверхностями, установленное пучками параллельных касательных.** Дрэджилэ (Correspondance entre deux surfaces par des faisceaux de tangentes parallèles. Drăgilă P.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 3, 366—368 (франц.)

Автор продолжает рассматривать пары поверхностей с соответствием, установленным параллелизмом касательных плоскостей. Отправляясь от уравнений $\bar{y}_u=\lambda\bar{x}_u$, $\bar{y}_v=\mu\bar{x}_v$, он ставит задачу найти системы линий $s$, $t$ такие, чтобы $\bar{y}_s$ было параллельно $\bar{x}_t$, а $\bar{y}_t$ параллельно $\bar{x}_s$. Задача имеет решения при условии $\lambda+\mu=0$ (сети с равными инвариантами. *Реф.*). Для данной сети этого типа $s$, $t$ должны быть связаны с параметрами сети $u$, $v$ уравнением $\frac{\partial u}{\partial s}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial v}{\partial s}=0$, т. е. произвол решения — одна функция двух переменных.

Примечание референта. Автор трактует соответствие параллельных касательных весьма расширительно. В примере, приведенном в работе, получается не множество различных систем линий $s$, $t$, а лишь разные параметризации одной системы.

В. В. Рыжков

**4491.** **О соответствиях между поверхностями по инцидентности или параллелизму касательных плоскостей.** Серге (Sui riferimenti fra superficie per incidenza o parallelismo di piani tangenti. Segre Beniamino), Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1958 (1959), **25**, № 6, 381—388 (итал.)

В вещественном проективном $S_n$ $(n\geqslant 3)$ две поверхности $X$, $Y$ приведены в такое взаимно однозначное соответствие $\mathfrak{T}$, что касательные плоскости в любых двух соответственных точках $x$, $y$ пересекаются по прямой $r$, не проходящей ни через $x$, ни через $y$. Тем самым устанавливается проективное соответствие между пучками касательных прямых в точках $x$, $y$, а потому и проективное преобразование $\pi$ прямой $r$ в себя. Исследуются свойства конгруэнции прямых $xy$ в зависимости от вида преобразования $\pi$.

В зависимости от числа двойных точек преобразования $\pi$ различаются „тождественный случай", „параболический", „гиперболический" и, в частности, „инволюторный". „Эллиптический случай" исключен из рассмотрения. Наконец, предполагается, что на всех прямых $r$, т. е. для любой пары соответственных точек $x$, $y$, имеет место один и тот же случай. В параболическом случае на каждой из поверхностей $X$, $Y$ имеется семейство, а в гиперболическом случае — сеть линий, называемых „характеристиками соответствия $\mathfrak{T}$". Характеристика определяется тем, что касательная в любой ее точке пересекает прямую $r$ в двойной точке проективного соответствия $\pi$.

Тождественный случай имеет место тогда и только тогда, когда все прямые конгруэнции $xy$ проходят через одну и ту же точку $O$. Если, кроме того, все прямые $r$ лежат в одной и той же $S_{n-1}$, соответствие $\mathfrak{T}$ индуцируется гомологией в $S_n$ с центром $O$ и фундаментальной гиперплоскостью $S_{n-1}$.

В гиперболическом случае все лучи конгруэнции $xy$ гиперболические, в параболическом случае — все лучи параболические. В том и в другом случае всякая развертывающаяся поверхность конгруэнции пересекает поверхности $X$, $Y$ по двум соответственным характеристикам. В параболическом случае, если фокальная поверхность конгруэнции не вырождается в линию, ребра возврата развертывающихся поверхностей конгруэнции являются асимптотическими линиями фокальной поверхно-

сти. $\mathfrak{X}$ становится соответствием по параллелизму касательных плоскостей, если все прямые $r$ находятся в одной и той же $S_{n-1}$; тогда эта $S_{n-1}$ рассматривается как не собственная гиперплоскость, а $S_n$ — как аффинное пространство. Если, в частности, $n=3$, то $\pi=\xi\eta$, где $\xi$ — инволюция сопряженных касательных к $X$ в точке $x$, а $\eta$ — инволюция сопряженных касательных к $Y$ в соответствующей точке $y$. При любом $n$ в гиперболическом случае сети характеристик на $X$ и $Y$ оказываются сопряженными, в параболическом случае характеристики на $X$ и $Y$ оказываются асимптотическими линиями. Инволюторный случай имеет место тогда и только тогда, когда всякая пара $x$, $y$ соответственных точек гармонически разделяет пару фокусов прямой $xy$. $\infty^1$ поверхностей, каждая из которых описана точкой z прямой $xy$ так, что простое отношение трех точек $x$, $y$, z остается неизменным, имеют в точках одной и той же прямой $xy$ параллельные касательные плоскости.

Указан алгоритм для нахождения (с помощью одной квадратуры) поверхности $Y$, находящейся вместе с заданной поверхностью $X$, на которой существует семейство криволинейных асимптотических, в соответствии по параллелизму касательных плоскостей параболического типа.

А. М. Комиссарук

**4492. О группах преобразований, связанных с параболическими линейными конгруэнциями. Семянистый В. И.**, Уч. зап. Чечено-Ингушск. гос. пед. ин-та, 1958, № 8, 42—56

1. Уравнения прямой параболической линейной конгруэнции $(2n+1)$-мерного проективного пространства $P_{2n+1}$ при подходяще выбранной системе координат имеют вид:

$$x^{2i}=y^{2i}+\lambda y^{2i+1},\quad x^{2i+1}=y^{2i+1}$$
$$(i=0,1,\ldots,n),$$

где $y$ — текущая, а $x$ — фиксированная точка этой прямой. Пусть эта прямая преобразуется с помощью коллинеации

$$'x^k=a_l^k x^l\ (k,l=0,1,\ldots,2n+1). \qquad (1)$$

Преобразованная прямая будет принадлежать той же параболической линейной конгруэнции тогда и только тогда, когда матрица этих коллинеаций $(a_l^k)$ удовлетворяет соотношениям:

$$a_{2j+1}^{2i+1}=\sigma a_{2j}^{2i}\quad a_{2j}^{2i+1}=0\quad(\sigma\neq 0). \qquad (2)$$

Эти коллинеации, переводящие в себя параболическую линейную конгруэнцию, перестановочные со сдвигом вдоль прямых этой конгруэнции, автор назвал дуальными коллинеациями 1-го рода. Для того чтобы коллинеации (1) были бы дуальными 1-го рода, необходимо и достаточно, чтобы матрицы удовлетворяли условиям (2) при $\sigma=1$.

Дуальные коллинеации 1-го рода образуют группу. Коллинеации, переводящие в себя параболическую линейную конгруэнцию, произведение которых на сдвиг вдоль прямых этой конгруэнции слева равно их произведению на обратный сдвиг справа, названы дуальными коллинеациями второго рода.

Коллинеация тогда и только тогда является дуальной второго рода, если ее матрица удовлетворяет условиям (2) при $\sigma=-1$. Совокупность дуальных коллинеаций 2-го рода и дуальных коллинеаций 1-го рода образуют группу. Эта группа при нечетном $n$ состоит из 4 связных компонент, при $n$ четном — из двух.

Далее рассматриваются движения неевклидовых пространств $^{2n+2}S_{4n+3}$ размерности $4n+3$ индекса $2n+2$, являющиеся дуальными коллинеациями 1-го или 2-го рода. Они составляют группу, называемую дуальными движениями. Найдены аналитические условия того, что движение пространства $^{2n+2}S_{4n+3}$ является дуальным.

Особенно подробно рассматриваются дуальные движения и их инварианты для пространства $^2S_3$.

Р. М. Гейдельман

**4493. Параболические линейные конгруэнции и дуальные числа. Семянистый В. И.**, Уч. зап. Чечено-Ингушск. гос. пед. ин-та, № 8, 57—64

Строится унитарное неевклидово пространство над дуальными числами $a+b\varepsilon$ $(\varepsilon^2=0)$ и выясняется связь его с параболическими линейными конгруэнциями $(2n+1)$-мерных вещественных проективных пространств $P_{2n+1}$ (реф. 4492).

Пусть $x^i$ $(i=0,1,\ldots,n)$ — дуальные проективные координаты точки $P_n(\varepsilon)$ $n$-мерного проективного пространства над дуальными числами.

Преобразования $'x^i=a_j^i x^j$; $'x^i=a_j^i\bar{x}^j$, где $a_j^i$ — дуальные числа, определенные с точностью до общего дуального множителя, причем $\mathrm{Det}|a_j^i|$ не является нулем или делителем нуля, называются коллинеациями первого и второго рода. Доказано, что точки пространства $P_n(\varepsilon)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с прямыми параболической линейной конгруэнции пространства $P_{2n+1}$.

Группа коллинеаций пространства $P_n(\varepsilon)$ изоморфна фактор-группе группы дуальных коллинеаций пространства $P_{2n+1}$ по ее подгруппе сдвигов вдоль прямых этой конгруэнции.

Таким образом, параболическая линейная конгруэнция в пространстве $P_{2n+1}$ является моделью пространства $P_n(\varepsilon)$. Этот результат завершает работы Б. А. Розенфельда о интерпретациях линейных конгруэнций прямых в пространствах $P_{2n+1}$ (РЖМат, 1956, 8247 К, стр. 602 оригинала). Пользуясь схемой Б. А. Розенфельда, автор называет $(2n+1)$-мерным унитарным неевклидовым пространством над дуальными числами $K_{2n+1}(\varepsilon)$ пространство $P_{2n+1}(\varepsilon)$, фундаментальной группой которого является подгруппа коллинеаций, переводящая в себя некоторую эрмитову гиперквадрику (абсолют).

При надлежащем выборе системы координат уравнение этой гиперквадрики может быть приведено к виду:

$\sum_{i=0}^{n}(x^{2i}\bar{x}^{2i+1}-x^{2i+1}\bar{x}^{2i})=0$. С помощью этого абсолюта вводится метрика — инвариант двух точек $\omega$.

Найдены аналитические условия, выделяющие из всех коллинеаций группу движений пространства $K_{n+1}(\varepsilon)$ (фундаментальную группу). Доказана теорема: пространство $K_{2n+1}(\varepsilon)$ изометрично параболической паратактической конгруэнции пространства $^{2n+2}S_{4n+3}$, а группа движений $K_{2n+1}(\varepsilon)$ изоморфна фактор-группе группы дуальных движений $^{2n+2}S_{4n+3}$ по ее подгруппе параболических паратактических сдвигов.

Таким образом, параболическая паратактическая конгруэнция неевклидова пространства $^{2n+2}S_{4n+3}$ является моделью унитарного неевклидова пространства над дуальными числами $K_{2n+1}(\varepsilon)$.

Р. М. Гейдельман

**4494. Двусторонне расслояемые пары конгруэнций в пространстве Лобачевского. Березина Л. Я.**, Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 3, 23—25

Две конгруэнции прямых $(r_1)$ и $(r_2)$ образуют двусторонне расслояемую пару, если между лучами $r_1$ и $r_2$ обеих конгруэнций установлено взаимно однозначное соответствие и к каждой из конгруэнций можно присоединить однопараметрическое семейство поверхностей $(\Sigma_1)$ и $(\Sigma_2)$ так, что касательные плоскости к каждой из поверхностей семейства в точке пересечения с лучами $r_1$ и $r_2$ проходят через соответствующие лучи другой конгруэнции.

Рассматривая двусторонне расслояемую пару конгруэнций прямых в трехмерном пространстве Лобачевского, автор находит систему квадратичных внешних уравнений, определяющих двусторонне расслояемую пару. Найдено соотношение, связывающее эксцентриситет и асимметрию конгруэнций общих перпендикуляров соответствующих прямых двусторонне расслояемой пары конгруэнций, и

соотношения, связывающие метрические инварианты этой пары. Полученные уравнения и соотношения аналогичны уравнениям, полученным С. В. Бахваловым и С. П. Фиников при исследовании конгруэнции общих перпендикуляров двусторонне расслояемой пары конгруэнций прямых в евклидовом пространстве.

Р. М. Гейдельман

**4495. Об одном обобщении геометрии окружностей Мёбиуса. Тамаши** (A Möbius-féle körgeometria egy általánosításáról. Tamássy Lajos), Acta Univ. debrecen., 1955, 2, 137—143 (венг.; рез. нем.)

Рассматривается обобщение геометрии окружностей на плоскости Мёбиуса. В первых трех параграфах говорится о тех взаимно однозначных, с сохранением инцидентности отображениях плоскости $\varepsilon$, которые совокупность $\mathfrak{A}$ известного множества $\mathfrak{H}_1$ гипербол и множества $\mathfrak{H}_2$ прямых переводят в себя и точки плоскости $\varepsilon$ в точки той же плоскости. Элементами множества $\mathfrak{H}_1$ являются равнобочные гиперболы с параллельными осями евклидовой плоскости, расширенной идеальными (бесконечно удаленными) элементами, исходящими из проективной геометрии. $\mathfrak{H}_2$ — множество прямых евклидовой плоскости, кроме асимптот названных гипербол, пополненной единственной общей идеальной (бесконечно удаленной). Следовательно, $\varepsilon$ будет евклидовой плоскостью, пополненной введенной идеальной точкой.

Исследование введенных преобразований идет параллельно геометрии окружно тей Мёбиуса и приводит в основном к аналогичным результатам. Из этой геометрии, например из геометрии окружностей Мёбиуса, можно переносом, параллельным осям, получить геометрии, построенные на других семействах конических сечений. Однако та геометрия, которая исходит из равнобочных гипербол, не может быть получена из геометрии Мёбиуса общим проективным преобразованием, во-первых, потому, что нельзя одним проективным преобразованием перевести все окружности плоскости в гиперболы, во-вторых, потому, что плоскость $\varepsilon$ и плоскость Мёбиуса различны относительно бесконечно удаленных точек. Среди всех этих геометрий геометрия Мёбиуса выделяется конформностью.

Из резюме автора

**4496. Шестеричный ковариант четырех точек и квадрики Фосса пучка. Мармьон** (Covariant sextique de quatre points et quadriques de Voss d'un faisceau. Marmion A.), Mathesis, 1957, **66**, № 7-9, 319—321 (франц.)

Четыре точки $A, B, C, D$ определяют три инволюции $(AB, CD)$, $(AC, BD)$, $(AD, BC)$. Совокупность трех пар двойных точек $M_i, N_i$ $(i = 1, 2, 3)$ этих инволюций называется шестеричным ковариантом точек $A, B, C, D$. (В сноске указывается, что если точки $A, B, C, D$ обращают в нуль бинарную форму $P(x, y)$ четвертого порядка, то $M_i, N_i$ обращают в нуль якобиан, составленный для $P$ и ее гессиана). Квадрикам некоторого пучка можно сопоставить точки прямой. Если четырем конусам этого пучка с вершинами $A, B, C, D$ соответствуют точки $a, b, c, d$ прямой, то парам противолежащих сторон $AB$ и $CD$,..., ... тетраэдра $ABCD$ можно сопоставить пары квадрик $Q_1$ и $Q_2$,..., ..., которым соответствуют пары шестеричного ковариантa точек $a, b, c, d$. Эти квадрики Серве назвал квадриками Фосса пучка (Servais C., Sur les biquadratiques gauches de 1-re espèce, Annaes Porto, 1913, § 14). Автор приводит, ссылаясь на сочинение Серве, некоторые свойства этих квадрик, например: точки пересечения прямой $AB$ с квадриками $Q_1$ и $Q_2$ образуют вместе с точками $A$ и $B$ шестеричный ковариант четырех точек пересечения прямой $AB$ с конусами $(C)$ и $(D)$.

Ю. Г. Лумисте

**4497. О некоторых метрических свойствах кривых и поверхностей, инвариантных при аффинном преобразовании. Костинеску** (Asupra unor proprietăți metrice ale curbelor și suprafețelor, invariante la o transformare afină. Costinescu Olga) Gaz. mat. și fiz., 1958, **A10**, № 7, 412—415 (рум.; рез. франц., русск.)

Рассматривается аффинное преобразование, сводимое к канонической форме $(T_1): x_i = m_i a_i$, $i = 1, 2, 3$. Находятся кривые, элемент дуги которых сохраняется при указанном преобразовании (с определенными $m_i$). Утверждается, что для этих кривых остается инвариантной логарифмическая производная по параметру от произведения кручения на квадрат кривизны. Далее рассматриваются поверхности, для которых $(T_1)$ сохраняет а) элемент дуги, б) площадь, в) полную кривизну, г) линии кривизны. В первом случае получаются некоторые плоскости, во втором и третьем — развертывающиеся поверхности. Указаны также примеры поверхностей для четвертой постановки задачи. Отмечается, что сходные результаты можно получить и для аффинных преобразований с иными каноническими формами.

В. В. Рыжков

**4498. О геометрии поверхностей в аффинных пространствах. Либер А. Е.**, Научн. ежегодник за 1954 г. Саратовск. ун-т. Саратов, 1954, 669—671

При некоторых допущениях строится объект аффинной связности, инвариантно присоединенный к поверхности в аффинном (или центрально аффинном) пространстве. Определяемое этим объектом ковариантное дифференцирование дает возможность получить инвариантное оснащение поверхности при условии, что на ней задан отличный от нуля относительный инвариант некоторого (определенного) связующего аффинора.

П. И. Швейкин

**4499. По поводу обобщенной проблемы В. Бляшке. Сораче** (Intorno ad un problema di W. Blaschke generalizzato. Sorace Orazio), Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1958(1959), **25**, № 6, 465—469 (итал.)

Пусть $F$ — поверхность в проективном пространстве $S_{2r+2}$, неоднородные координаты точек которой $z^i = z^i(u, v)$ $(i = 1, 2..., 2r + 2)$ удовлетворяют уравнению Лапласа

$$z_{uv} = Pz_v + Qz_u; \qquad (1)$$

$z_{u^h v^k}$ означает $\dfrac{\partial^{h+k} z}{\partial u^h \partial v^k}$. Пространство, имеющее с $F$ соприкосновение порядка $r$ содержит линейно независимые точки $z, z_u, z_v, z_{u^2}, z_{v^2}, \ldots, z_{u^r}, z_{v^r}$ и потому является пространством $S_{2r}$. Смешанные производные из-за (1) в счет не идут. Пространство $S_3$, принадлежащее $S_{2r+2}$, называется пространством Бляшке для поверхности $F$, если пересекается с $S_{2r}$ по лучу конгруэнции $W$ с различными и невырождающимися фокальными поверхностями (РЖМат, 1956, 5469; 8299). Пусть $z^0, z^1, z^2, \ldots, z^{2r+2}$ — однородные координаты точки в $S_{2r+2}$ и пусть $S_3^{1234}$ — пространство в $S_{2r+2}$, определяемое уравнениями $z^0 = z^5 = z^6 = \ldots = z^{2r+2} = 0$. Автор ищет необходимое и достаточное условие того, чтобы $S_3^{1234}$ было для $F$ пространством $S_3$ Бляшке. Автор берет точку $x$ (линейную комбинацию точек $z_u, z_v, z_{u^2}, z_{v^2}, z_{u^r-1}, z_{v^r-1}, z_{u^r}$). Можно так подобрать множители при $z_u, z_v, \ldots, z_{u^r}$, что первые четыре неоднородные координаты точки $x$ будут отличны от нуля, а остальные обратятся в нуль. Это отмечается записью $x = \left[z_u, z_v, z_{u^2}, z_{v^2}, \ldots, z_{u^r-1}, z_{v^r-1}, z_{u^r}\right]$, где справа подразумевается один из определителей порядка $2r - 1$ с номерами строк $i, 5, 6 \ldots 2r + 2$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Берется еще точка $y = \left[z_u, z_v, z_{u^2}, z_{v^2}, \ldots, z_{u^r-1}, z_{v^r-1}, z_{v^r}\right]$. Пространства $S_{2r}$ и $S_3^{1234}$ пересекаются по прямой $xy$. Точки $x, y, x_v$ лежат на одной прямой, а точки $x, y, x_u, x_v$ на

одной плоскости; аналогично обстоит с точками $x, y, y_v$ и $x, y, y_u, y_v$. Следовательно, точки $x, y$—фокусы луча конгруэнции. Обнаруживается, что определитель четвертого порядка $[x, x_u, x_v, x_{uv}] = 0$; также $[y, y_u, y_v, y_{uv}] = 0$. Определители $[x, x_u, x_v, x_{uu}]$ и $[y, y_u, y_v, y_{uu}]$ должны быть пропорциональны определителям $[x, x_u, x_v, x_{vv}]$ и $[y, y_u, y_v, y_{vv}]$. Пользуясь свойствами определителей, автор приходит к искомому условию. Попутно отмечаются условия невырождаемости фокальных полостей. Автор находит несколько записей своего необходимого и достаточного условия. В частности, он заменяет другой гиперплоскость $z^0 = 0$ и варьирует пространство $S_3$. В порядке обобщения своего прежнего результата автор дает пример поверхности $F$, допускающей пространства $S_3$ Бляшке. К. Н. Тихоцкий

**4500. Геометрия дифференциальных элементов. Бомпьяни** (Geometria degli elementi differenziali. Bompiani E.), Leonhard Euler 250. Geburtstag. Berlin, Akad. Verl., 1959, 49—77 (итал.; рез. русск.)

Начало геометрии дифференциальных элементов положила теорема Эйлера о кривизне нормальных сечений в точке поверхности в трехмерном евклидовом пространстве. В настоящей статье дан обзор результатов, полученных автором и его непосредственными сотрудниками. Содержание статьи таково: 1. Теорема Эйлера и начало геометрии дифференциальных элементов. 2. Проективные обобщения теорем Эйлера и Менье. 3. Топологические обобщения теорем Эйлера и Менье. 4. Представление дифференциальных элементов. 5. Неголономные дифференциальные элементы. 6. Приложения предыдущих результатов: а) проективно-дифференциальная геометрия поверхностей; б) дифференциальные элементы в исследовании алгебраических кривых и многообразий; в) дифференциальные уравнения; г) точечные преобразования и неголономные многообразия. 7. Представление дифференциальных элементов в проективной плоскости.

Резюме автора

**4501. Об аффинной кинематике. Бляшке** (Über affine Kinematik. Blaschke Wilhelm), Leonhard Euler 250. Geburtstag. Berlin, Akad. Verl., 1959, 42—48 (нем.; рез. русск.)

Многочисленные теоремы классической плоской кинематики распространяются на аффинную плоскость; при этом автор ограничивается однопараметрическими семействами эквиаффинных преобразований плоскости. Выкладки весьма упрощаются благодаря введению нормированной системы отнесения и нормированного параметра (нормированного времени). Для нормированной системы отнесения мгновенный полюс (точка с нулевой ведущей скоростью) принимается за начало, а проходящие через него направления прямых, самих себе соответствующих, — за координатные направления. Для этих однопараметрических семейств эквиаффинных преобразований и их обратных преобразований выводятся уравнения поворотных конических сечений, а также дальнейшие уравнения, которым должны удовлетворять точки ходовой системы с соприкасающейся касательной (четырехточечное касание). Эти точки соответствуют, таким образом, точкам Болла классической кинематики. В заключение рассматриваются преобразования, для которых поворотное коническое сечение в ходовой системе неподвижно, и, значит, точки его в покоящейся системе описывают прямолинейные траектории. При этом получается аффинная характеристика конического сечения. Резюме автора

## ГЕОМЕТРИЯ $n$-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

**4502. Векторное и тензорное исчисление. Лира** (Vektor- und Tensorrechnung. Lyra G.), Naturforsch. und Med. Deutschland 1939—1946(1953), **3**, 263—268 (нем.)

**4503. Об инвариантных кососимметрических тензорах. Костант** (On invariant skew- tensors. Kostant Bertram), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1956, **42**, № 3, 148—151 (англ.)

Пусть $V$ — $n$-мерное векторное пространство со скалярным произведением $(u, v)$, $\wedge^p V$ пространство контравариантных кососимметрических тензоров над $V$ степени $p$. В $\wedge^p V$ скалярное произведение определяется по формуле $(u_1 \wedge \ldots \wedge u_p,\ v_1 \wedge \ldots \wedge v_p) = \frac{1}{p!} \det (u_i, v_j)$.

Пусть $k$ — алгебра Ли компактной группы, представление $k$ на $V$ обозначается тройкой $(\sigma, k, V)$; если $X \in k$, то $\sigma(X)$ — кососимметрический оператор на $V$. $(\sigma^p, k, \wedge^p V)$ будет обозначать представление на $\wedge^p V$, определенное по формуле $\sigma^p(X)\, v_1 \wedge \ldots \wedge v_p = \sum_{i=1}^{p} v_1 \wedge \ldots \wedge \sigma(x) v_i \wedge \ldots \wedge v_p$. если $W_p = \{s \in \wedge^p V \mid \sigma^p(X)\, s = 0,\ X \in k\}$ и $d_p$— размерность $W_p$, то $\sum_{p=0}^{n} d_p t^p$ называется полиномом Пуанкаре $(\sigma, k, V)$. Рассматривается специальный класс представлений, связанных с компактными однородными римановыми симметрическими многообразиями. Пусть $M = G/K$ — такое многообразие, $G$ — компонента связности единицы группы всех движений $M$. Тогда алгебра Ли $k$ группы $K$ очевидным образом действует на $V$ касательном пространстве многообразия $M$. Соответствующее представление называется симметрическим представлением. Все такие представления точны и описаны Э. Картаном. Неприводимые симметрические представления простых алгебр Ли называются $T$-представлениями. $T$-представления бывают двух типов: $T_1$ — присоединенные представления простых алгебр Ли и $T_2$ — неприсоединенные представления. Любое $T_2$-представление является представлением, связанным с одним из следующих однородных римановых симметрических многообразий: а) $SU(m)/SO(m)$, $m = 3, 5 \ldots$; б) $SU(2m)/Sp(m)$, $m = 3 \ldots$; в) $SO(m+1)/SO(m)$, $m = 1, 2, 5 \ldots$; г) $F_4/\mathrm{spin}(9)$; д) $E_6/F_4(f)\, E_6/\widetilde{Sp}(4)$; е) $E_7/\widetilde{SU}(8)$; ж) $E_8/\mathrm{spin}(16)$. Представления, соответствующие $SO(n+1)/SO(n)$, называются полными, для них $k$ изоморфна алгебре Ли всех кососимметрических операторов на $V$. Все полные представления суть симметрические представления и, исключая $n = 3, 4$, $T_2$-представления; при $n = 4$ оно не $T$-представление. Полное представление называется тривиальным представлением при $n = 1$ и круговым представлением при $n = 2$. Следующая теорема выделяет $T$-представления из всех представлений. Пусть $(\sigma, k, V)$ — любое точное неприводимое представление; $d_4 = 0$ тогда и только тогда, когда $(\sigma, k, V)$ есть $T$-представление; $d_4 = d_3 = 0$ тогда и только тогда, когда оно есть $T_2$-представление, $d_4 = d_2 = 0$ тогда и только тогда, когда оно не круговое, $d_4 = d_1 = 0$ тогда и только тогда, когда оно не тривиальное. Пусть полином Пуанкаре $P_\sigma(t)$ точного представления $(\sigma, k, V)$ есть $1 + t^n$ (где $n = \dim V$). Тогда либо $(\sigma, k, V)$ полное, либо соответствует многообразию $SU(3)/SO(3)$. На основе этих теорем исследуются представления, связанные с некоторыми конкретными римановыми многообразиями.

В. И. Кузьминов

**4504. Пропорциональность метрик $N$ переменных. Пайл** (Proportional metrics in $N$ variables. Pyle H. Randolph), Math. Mag., 1959, **32**, № 5, 261—263 (англ.)

Пусть даны две метрики от $n$ переменных $x^i$ и $y^i$, $ds^2 = a_{ij} dx^i dx^j$ и $ds'^2 = b_{ij} dy^i dy^j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ и пусть между переменными обеих метрик установлено соответствие с помощью равенств $y^i = \varphi^i(x^i)$. Обозна-

чим $\varphi^{ik} = \frac{\partial y^i}{\partial x^k} = \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^k}$. Для того чтобы эти две метрики находились в конформном соответствии (то есть, чтобы $ds'^2 = \lambda^2 ds^2$, необходимо, чтобы выполнялись соотношения:

$$a_{kj}\,\overline{\varphi}^{ik} = \frac{J}{\lambda^2}\,b_{ik}\varphi^{kj},$$

где $J = \mathrm{Det}\,|\,\varphi^{ij}\,|$, а $\overline{\varphi}^{ik}$ — алгебраические дополнения элементов $\varphi^{ik}$ в $J$. Если $J \neq 0$; $\mathrm{Det}\,|\,a_{ik}\,| \neq 0$, $\mathrm{Def}\,|\,b_{ik}\,| \neq 0$, то эти условия будут и достаточными. Подробно рассмотрен частный случай, когда $n = 2$.

Р. М. Гейдельман

**4505. О нескольких инвариантах трехмерных пространств аффинной связности. Хаймович** (Sur quelques invariants dans les espaces à connexion affine à trois dimensions. Haimovici A.), Ann. polon. math., 1957, 3, № 2, 300—303 (франц.) (Asupra unor invarianți în spații cu conecsiune afină. Haimovici A.), Lucrările consfăt. geom. diferenț. 1955. Timișoara Acad. RPR., 1956, 129—154 (рум.)

Краткое изложение другой работы автора (см. реф. 4506).

**4506. О нескольких инвариантах трехмерных пространств аффинной связности. Хаймович** (Su alcuni invarianti negli spazi tridimensionali a connessione affine. Haimovici Adolf), Rend. mat. e applic., 1956, 15, № 3-4, 385—452 (итал.)

Пусть $A_3$ — трехмерное пространство аффинной связности с коэффициентами связности $\Gamma^i_{jk}$ и $X^i, Y^i$ — компоненты системы векторов, касательных к $A_3$ в точке $P$. Смещая эти векторы параллельно вдоль замкнутого контура, имеем векторы $X'^i, Y'^i, \ldots$, которые получаются из $X^i, Y^i, \ldots$ преобразованием однородной группы голономии пространства $A_3$.

Автор ищет функции $f(P, X^i, Y^i, \ldots)$, инвариантные относительно инфинитезимальной группы голономии, и изучает пространства $A_3$, обладающие такими инвариантами с минимальным числом векторов $X^i, Y^i, \ldots$.

Классифицируя однородные инфинитезимальные группы голономии $A_3$, автор приходит к следующим результатам: $A_3$ допускает по крайней мере два инварианта, образованных четырьмя направлениями $X^i, Y^i, U^i, V^i$, если группа голономии $A_3$ — шестипараметрическая.

В этом случае: либо (I) $\Gamma^3_{1i} = \Gamma^3_{2i} = 0$ в точке $P$ и инвариантами будут

$$\frac{(XZU)}{(YZU)} : \frac{X^3}{Y^3}, \quad \frac{(XYU)}{(YZU)} : \frac{X^3}{Z^3},$$

где $(XYZ)$ — объем параллелепипеда, построенного на векторах $X, Y, Z$; либо (II) $\Gamma^3_{1i} = \Gamma^2_{1i} = 0$ и инвариантами будут

$$\frac{(XZU)}{(YZU)} : \frac{U^3X^2 - U^2X^3}{U^3Y^2 - U^2Y^3}, \quad \frac{XZU}{YZU} : \frac{Z^3X^2 - Z^2X^3}{Z^3Y^2 - Z^2Y^3}.$$

Если группа голономии пятипараметрическая, то в точке $P$ (III) $\Gamma^k_{1i} = \Gamma^3_{2i} = 0$ и инвариант, образованный тремя векторами $X, Y, Z$ будет

$$\frac{X^2Z^3 - X^3Z^2}{Y^2Z^3 - Y^3Z^2} : \frac{X^3}{Y^3}.$$

Если группа голономии — четырехпараметрическая, то может быть: а) $\Gamma^2_{1i} = \Gamma^3_{1i} = \Gamma^2_{3i} = \Gamma^3_{2i} = 0$ и два инварианта

$$\frac{X^2}{X^3} : \frac{Z^2}{Z^3}, \quad \frac{Y^2}{Y^3} : \frac{Z^2}{Z^3}.$$

б) $\Gamma^1_{3i} = \Gamma^2_{3i} = \Gamma^2_{1i} = \Gamma^3_{1i} = 0$ и инварианты

$$\frac{X^2Z^1 - X^1Z^2}{Y^2Z^1 - Y^1Z^2} : \frac{X^2}{Y^2}, \quad \frac{X^2Z^3 - X^3Z^2}{Y^2Z^3 - Y^3Z^2} : \frac{X^2}{Y^2}.$$

в) $\Gamma^3_{1i} = \Gamma^3_{2i} = \Gamma^2_{1i} = 0$ и инварианты

$$\frac{XYZ}{X^3(Y^2Z^3 - Y^3Z^2)}, \quad \frac{X^2Z^3 - X^3Z^2}{Y^2Z^3 - Y^3Z^2} : \frac{X^3}{Y^3}.$$

г) Те же условия для Γ и инварианты

$$\frac{(XYZ)\,Z^3}{(Y^2Z^3 - Y^3Z^2)\,(X^2Z^3 - X^3Z^2)}, \quad \frac{X^2Z^3 - X^3Z^2}{Y^2Z^3 - Y^3Z^2} : \frac{X^3}{Y^3}.$$

Из классификации группы голономии автор получает аналогичные результаты для инвариантов, образованных четырьмя, тремя или двумя векторами $A_3$. Эти инварианты принадлежат группе, образованной группой голономии и группой гомотетий.

С. Teleman

**4507. Аффинная классификация гиперквадрик. Срб** (Afinní klasifikace nadkvadrik. Srb J.), Acta Fac. rerum. natur. Univ. Comenianae Math., 1956, 1, № 1, 29—40 (чешск.; рез. русск.)

Доказаны некоторые теоремы об автополярных симплексах относительно гиперквадрики $n$-мерного проективного пространства и дана аффинная классификация гиперквадрик.

В. А. Маневич

**4508. К аффинной теории двумерных поверхностей. Измайлов В. Д.**, Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та, 1957, 108, 219—259

На двумерной поверхности в эквиаффинном пространстве $E_n$ различными для различных $n$ способами строятся некоторые тензоры, в частности симметричный тензор $g_{ij}$ $(i, j, \ldots = 1, 2,)$. Построения теряют смысл, если равна нулю некоторая (определенная) скалярная плотность, однако ее отличие от нуля в частных случаях проверено. В случаях $n = 6$ и $n = \frac{1}{2}(m-1)(m+2)$, где $m$ — натуральное число, построено инвариантное оснащение поверхности.

П. И. Швейкин

**4509. О векторах в однородных пространствах. Курита** (On the vector in homogeneous spaces. Kurita Minoru), Nagoya Math. J., 1953, 5, February, 1—33 (англ.)

Пусть $\mathfrak{H}$ — группа преобразований Ли и пусть $\mathfrak{L}$ — подгруппа, которая оставляет неподвижной некоторую точку пространства. Тогда однородное пространство определяется как фактор-пространство $\mathfrak{H}/\mathfrak{L}$. Пусть относительные компоненты группы $\mathfrak{H}$, определяемые пфаффовыми формами $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots \omega_r$ с самого начала выбраны так, чтобы первые $\omega_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ являлись главными относительными компонентами однородного пространства, в то время как $\omega_\alpha$ $(\alpha = n+1, \ldots, r)$ являются вторичными относительными компонентами. Векторы касательного пространства в одной точке обладают законом преобразования, который определяется подгруппой линейной сопряженной группы, соответствующей подгруппе $\mathfrak{L}$. Отсюда следует, что $w_i$ будут контравариантными компонентами инфинитезимального вектора. Если $c_{KMN}$ $(K, M, N = 1, 2, \ldots, n, \ldots, r)$ являются структурными постоянными, то ковариантный дифференциал вектора $v_i$ определяется по формуле $Dv_i = dv_i - \sum_{\alpha, k} c_{\alpha k i}\omega_\alpha v_k$. Автор доказывает, что $Dv_i$ будет вектором тогда и только тогда, когда $c_{\alpha i \beta} = 0$.

Теорема эта уже была доказана Картаном (Cartan E., Ann. Math., 1937, 38, 1—3), но он дал только эскиз доказательства. Образование ковариантных дифференциалов неоднозначно, так как оно зависит от определенного выбора $w_i$. Автор доказывает необходимые и достаточные условия для однозначности этой операции. При ограничениях на пространства, в которых ковариантный дифференциал относит вектору некоторый вектор, автор исследует те пространства, которые допускают так называемый абсолютный параллелизм, не зависящий от пути. В качестве необходимого и достаточного условия автор находит, что $\mathfrak{H}/\mathfrak{L}$ должна порождаться подгруппой $\mathfrak{L}$ и $n$-параметрической инвариантной подгруппой, которая является просто транзитивной относительно точек пространства. Если пространство симметрично, то из требования абсолютного параллелизма следует, что пространство является аффинным. Его фундаментальная группа содержит группу всех переносов, в то время как группа вращений не будет являться целой линейной группой. Автор доказывает, что геодезические линии пространства, которые определяются как автопараллельные кривые, порождаются однопараметрической подгруппой заданной группы. Далее показывается, что геодезические линии являются экстремалями интегрального инварианта $\int f(w)$. При этом $f(w)$ является таким инвариантом подгруппы $\mathfrak{H}/\mathfrak{L}$, который является линейным и однородным относительно $w_1, \ldots, w_n$ и удовлетворяет условию $\sum_{j,l} c_{jk}^{l} w_j \partial f/\partial w_l = 0$. Если пространство допускает риманову метрику, которая является инвариантом относительно заданной группы, то имеется две возможности для построения ковариантного дифференциала и, следовательно, два вида параллельного перенесения. Автор показывает, что эти параллельные перенесения для некоторого однородного пространства совпадают тогда и только тогда, когда оно является симметричным. Наконец, автор рассматривает общие пространства, обладающие связностью, данной пфаффовыми формами. Касательные пространства этих пространств можно разрастить вдоль кривых на однородные пространства. Исходя из определения тензора кривизны и вектора кручения, автор показывает, что рассматриваемые пространства являются однородными, если тензор кривизны и вектор кручения равны нулю. O. Varga

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 5, 469.

**4510. Векторные пространства и однородные пространства. Папи** (Espaces vectoriels et espaces homogènes. Papy Georges), Bull. Soc. math. Belgique, 1954 (1955), 7, № 1, 106—114 (франц.)

**4511. Построение внутренней геометрии поверхностей многомерного аффинного пространства. Атанасян В. А.**, Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та, 1957, 108, 177—217

Дается развернутое изложение ранее опубликованных (РЖМат, 1955, 5276) результатов; указываются некоторые свойства инвариантного оснащения гиперповерхности. П. И. Швейкин

**4512. Об одном классе сферических поверхностей в пространстве постоянной кривизны. Свобода** (Sur une classe de surfaces sphériques dans un espace à courbure constante. Svoboda Karel), Чехосл. матем. ж., 1958, 8, № 3, 399—447 (франц., рез. русск.)

В пространстве $S_{n+1}$ постоянной кривизны рассматривается поверхность $M$ с $m-1$ локально сферическими окружностями нормальной кривизны, обладающая таким свойством: индикатриса нормальной кривизны $k$-го порядка является окружностью, центром которой служит точка пересечения прямой, проходящей через $M$ перпендикулярно плоскости окружности, с этой окружностью и отстоящая от $M$ на расстояние, отличное от нуля (если $k = 1, 2, \ldots, r$) или равное нулю (если $k = r+1, r+2, \ldots, m-1$). Указано необходимое и достаточное условие и произвол существования такой поверхности, рассмотрены специальные классы. П. И. Швейкин

**4513. Некоторые замечания об инвариантных формах пучка сфер со связностью. Такидзава** (Some remarks on invariant forms of a sphere bundle with connexion. Takizawa Seizi), Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, 1955, A. Math., 29, № 3, 193—198 (англ.)

Для пучка сфер $\mathfrak{B}^{n-1}(M, S^{n-1}, O_n^+)$ над многообразием $M$ с группой $O_n^+$ (собственных ортогональных преобразований) рассматриваются ассоциированные произведения $\mathfrak{B}^q(M, Y^q, O_n^+)$ со слоем $Y^q = O_n^+/O_q^+$ (многообразие Штифеля). При этом главное произведение $\mathfrak{B}^0(M, O_n^+)$ можно рассматривать как главное произведение $\mathfrak{B}^0(\mathfrak{B}^q, O_q^+)$ над $\mathfrak{B}^q$ с группой $O_q^+$. Предполагается, что в $\mathfrak{B}^0(M, O_n^+)$ задана инфинитезимальная связность посредством формы $\omega$, принимающей значения в алгебре Ли группы $O_n^+$ (см., например, РЖМат, 1955, 2876). С помощью этой формы удобно записывается соотношение между связностью и кривизной $\Omega$, а также тождество Бианки: $d\Omega = [\Omega, \omega]$. Используя связность $\omega^{(q)}$, индуцируемую в $\mathfrak{B}^0(\mathfrak{B}^q, O_q^+)$ с помощью $\omega$, автор получает простое выражение формул своей предыдущей работы (реф. 4492, 4493).

Пусть $\varphi$ и $\psi$ — внешние дифференциальные формы на многообразии со значениями во внешней алгебре $\wedge(V)$ некоторого векторного пространства $V$ (при этом $\wedge(V) = \sum_k \wedge^k(V)$, где $\wedge^k(V)$ — пространство поливекторов ранга $k$). Вводится естественное внешнее умножение таких форм, причем если $\varphi$ — $p$-форма со значениями в $\wedge^k(V)$, а $\psi$ — $q$-форма со значениями в $\wedge^l(V)$, то $\varphi \wedge \psi$ является $(p+q)$-формой со значениями в $\wedge^{k+l}(V)$. Обозначим $(\wedge\varphi)^m = \underbrace{\varphi \wedge \varphi \wedge \ldots \wedge \varphi}_{m}$.

Рассмотрим форму кривизны $\Omega^{(q)}$ (второго порядка) соответствующую связности $\omega^{(q)}$ в произведении $\mathfrak{B}^0(\mathfrak{B}^q, O_q^+)$ и обозначим: $\Theta^q = [(-1)^{q/2} 2^{-q} \pi^{-q/2}/(q/2)!] \times (\wedge\Omega^{(q)})^{q/2}$ при $q$ четном;

для нечетного $q$ положим $\Theta^q = 0$. Устанавливается, что $\Theta^q$ можно рассматривать как форму на $\mathfrak{B}^q$, принимающую действительные значения. Эта форма является замкнутой, и ее класс когомологий (по теореме Вейля) не зависит от выбора исходной связности. Оказывается, что форма $\Theta^q$ реализует характеристический класс Уитнея для данного пучка сфер. Построена также в явном виде форма, определяющая различающую цепь секущих поверхностей пучка $\mathfrak{B}^{q-1}$. И. З. Розенкноп

**4514. Геометризация линейных однородных уравнений в частных производных. Миродан** (Geometrizarea ecuaţiilor cu derivate parţiale liniare şi omogene. Mirodan R.), An. Univ. «C. I. Parhon». Ser. ştiinţ. natur., 1957, № 14, 35—39 (рум.; рез. русск., франц.)

Крамлет показал (Cramlet C. M., Ann. Math., II Series, 1930, 31, 134), что к заданному невырожденному ковариантному или контравариантному тензору порядка $q$ присоединяется конечное число связностей. Автор показывает, как можно применить тот результат к уравнениям в частных производных, в частности к уравнению

$$a^{ijk}\frac{\partial^2 z}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} + a^{ij}\frac{\partial^2 z}{\partial x^i \partial x^j} + a^i \frac{\partial z}{\partial x^i} + az = 0,$$

где $a^{ijk}$ — невырожденный тензор. Показано также, как можно получить связность, не зависящую от коэффициента пропорциональности, на который можно умножить уравнение. G. Vrănceanu

**4515. Изометрическое соответствие римановых пространств категории $n-1$.** Хуан Чжэн-чжун (Hwang Cheng-chung), Шусюэ цзинь чжань, 1958, 4, № 1, 123—124 (кит.; рез. англ.)

$n$-мерное риманово пространство с положительно определенной метрикой относят к классу $n-1$, если в этом пространстве существует $n-1$ и только $n-1$ функционально независимых скалярных инвариантных функций. Автор получил необходимое и достаточное условие, чтобы два римановых пространства $R_n$ и $R_n^*$ категории $n-1$ с инвариантами одинаковой структуры изометрично соответствовали друг другу, и доказал теорему: Пусть линейные элементы такой пары римановых пространств приведены соответственно к стандартной форме $ds^2 = p_{\alpha\beta}(y^1, \ldots, y^{n-1})\, dy^\alpha\, dy^\beta$, $ds^{*2} = p_{\alpha\beta}(y^{*1}, \ldots, y^{*n-1}) \times dy^{*\alpha}\, dy^{*\beta}$; между ними будет изометрическое соответствие $y^i = y^{*i}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ тогда и только тогда, когда

(I) $p^*_{nn}/p_{nn} = \text{const}\ c^2$, (II) $p^{ij} = p^{*ij}$,

(III) $p_{nn}^{-1}(p_{ij}p_{nn} - p_{in}p_{jn})(p^{in} - cp^{*in})\, dy^j$ будет полным дифференциалом и окончательно

$$p_{nn}(p^{nn} - p^{*nn}c^2) = (p^{in} + cp^{*in})(p^{jn} - p^{*jn}c) \times \times (p_{ij}p_{nn} - p_{in}p_{jn}).$$

Автор указывает также, что условие, полученное прежде Суном (Sun J. T., Duke Math. J., 1949, **16**, 571—573) неточно. Su Buchin

**4516. Пространство с доминирующей аффинной связностью.** Итидзё (On the space with dominant affine connection. Ichijo Yoshiiro), J. Gakugei, Tokushima Univ. Natur. Sci. Math., 1956, **7**, Dec., 37—46 (англ.)

На многообразии $V_n$ устанавливается доминирующая аффинная связность. Для этого к каждой точке $x$ многообразия $V_n$ присоединяется касательный репер $R_m$, образованный $m > n$ векторами $\mathbf{X}_\alpha$, начало которого совпадает с точкой $x$. Перемещения репера определяются формами $d\mathbf{X}_\alpha = \Gamma^\lambda_{\alpha i}\mathbf{X}_\lambda\, dx^i$ и $dx = \mathbf{X}_i dx^i$, где $x^i$ — координаты $x$, а $\mathbf{X}_i$ — $n$ независимых векторов (греческие и латинские индексы пробегают значения от 1 до $m$ и от 1 до $n$ соответственно). Если преобразовывать совместно координаты $x^i$ и векторы $\mathbf{X}_\alpha$ по формулам $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^{\dot{1}}, x^{\dot{i}}, \ldots, x^{\dot{n}})$ и $\mathbf{X}_\alpha = A^\lambda_\alpha \mathbf{X}_\lambda$, то коэффициенты связности преобразуются следующим образом:

$$\bar{\Gamma}^k_{\lambda l} = A^k_\rho \frac{\partial x^i}{\partial x^j}\left(A^\sigma_\lambda \Gamma^\rho_{\sigma i} + A^\rho_{\lambda i}\right).$$

Определяются некоторые вспомогательные величины и их закон преобразования и показывается, что при помощи этих величин можно построить коэффициенты $\Gamma^k_{\lambda l}$ и компоненты кривизны $R^\alpha_{\beta ij}$. Определяются необходимые и достаточные условия того, чтобы пространство $V_n$ с доминирующей связностью было подпространством пространства $V_m$ аффинной связности.

W. Ślebodziński

**4517. Об измеримых группах $G_r$ в пространстве $R_n$.** Стока (Asupra grupurilor $G_r$ măsurabile dintrun spațiu $R_n$. Stoka Marius I.), Comun. Acad. RPR, 1957, 7, № 6, 581—585 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть $R_n$ — евклидово пространство $n$ измерений и $G_r$ — $r$-параметрическая группа Ли преобразований пространства в себя. Автор называет измеримыми группами $G_r$ группы, допускающие единственный интегральный инвариант, определенный с точностью до постоянного множителя. В настоящей работе автор возвращается к некоторым более ранним исследованиям и устанавливает необходимые и достаточные условия того, чтобы группа $G_r$ была измеримой. Эти условия состоят в следующем: $G_r$ должна быть транзитивной, коэффициент $\xi^i_h$ инфинитезимального преобразования и структурные константы $c^l_{hv}$ групп должны удовлетворять уравнениям

$$c^l_{uv}\xi^i_h\, \xi^w_l \bar{\xi}^u_w \bar{\xi}^v_i = c^l_{uh}\, \xi^w_l \bar{\xi}^u_w \quad \begin{pmatrix} i, j, u, v, w = 1, 2, \ldots, n \\ h, l = 1, 2, \ldots, r \end{pmatrix},$$

$$c^l_{uv}\left[\frac{\partial}{\partial y^i}\left(\xi^w_l \bar{\xi}^u_w \bar{\xi}^v_j\right) - \frac{\partial}{\partial y^j}\left(\xi^w_l \bar{\xi}^u_w \bar{\xi}^v_i\right)\right] = 0,$$

где $\bar{\xi}^u_v$ — элементы, обратные элементам $\xi^u_v$ определителя матрицы $\|\xi^i_u\|$, а $y = f(x, a)$ — преобразования группы. R. Miron

**4518. Неголономные подпространства.** Мишра (Sous-espaces non holonomes. Mishra R. S.), Bull. sci. math., 1957, **81**, № 1, 17—21 (франц.)

Рассматривается дифференцируемое многообразие $L_m$ класса не ниже 4 и его подпространство $L_n$, в которых при помощи соответствующего числа линейно независимых форм Пфаффа заданы неголономные системы отнесения — системы $(N-H)$. Изучается, как преобразуются компоненты вектора, метрического тензора и коэффициенты параллельного перенесения при переходе от системы $(N-H)$ подпространства $L_n$ к системе $(N-H)$ объемлющего пространства $L_m$. Полученные формулы вполне аналогичны соответствующим формулам преобразования для голономных систем координат.

М. А. Акивис

**4519. Некоторые свойства групп инфинитезимальных преобразований риманова многообразия.** Лелон-Ферран (Quelques propriétés des groupes de transformations infinitésimales d'une variété riemanienne. Lelong-Ferrand Jacqueline), Bull. Soc. math. Belg., 1956, **8**, № 1, 15—30 (франц.)

Пусть $V^n$ — связное и ориентированное риманово многообразие класса $C^p$ $(p \geqslant 2)$, у которого край $\delta V^n$ — $(n-1)$-мерное риманово многообразие. Пусть $\xi$ — векторное поле, заданное на замыкании $\bar{V}^n$, и $X$ — производная Ли относительно $\xi$. Автор вводит оператор $\bar{X}$, присоединенный к $X$ и определяемый формулой $\bar{X}\varphi_p \equiv (-1)^{np-p+1} * X * \varphi_p$, где $\varphi_p$ — внешняя дифференциальная форма порядка $p$ и $*\psi_p$ — форма, присоединенная к $\psi_q$. Край $\delta V^n$ называется инвариантным относительно производной $X$, если он касается вектора $\xi$ в каждой своей точке. Вводятся аналогичные определения для $p$-мерного риманова многообразия $K^p$, регулярно погруженного в $V^n$, и для $\delta K^p$.

Цель работы — изучение конформных и изометрических инфинитезимальных преобразований с помощью операторов $X$ и $\bar{X}$ и приложений к келеровым и эрмитовым многообразиям и к гармоническим формам. Для этого доказывается много свойств операторов $X$ и $\bar{X}$, из которых мы приводим следующие: 1) Чтобы $\int_{V^n} x\varphi_n = 0$ при любом $\varphi_n$, необходимо и достаточно, чтобы $\delta V^n$ был инвариантом. 2) Чтобы $\int_{K^p} x\varphi_0 = 0$ для любого $\varphi_p$, необходимо и достаточно, чтобы $K^p$ и $\delta K^p$ были инвариантами. 3) Чтобы $X + \bar{X} = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\xi$ был вектором Киллинга. Затем устанавливаются некоторые случаи, когда гармоническая форма $\varphi$ будет инвариантна, если $X$ — инфинитезимальная изометрия. Другие предложения относятся к норме $\|x_\varphi\|$, где $\varphi$ — сильно дифференцируемая форма, и к

инфинитезимальным конформным преобразованиям келе-ова многообразия. Приведем еще следующую теорему: Всякая дифференциальная форма, сильно дифференци-уемая в смысле К. О. Фридриха и инвариантная отно-сительно $X$, будет разложением в ряд Фурье инвариант-ого решения $\Delta\varphi = \lambda\varphi$. W. Ślebodziński

4520. **О движениях в полуприводимых римановых пространствах. Кручкович Г. И.**, Успехи матем. наук, 1957, 12, № 6, 149—156

Риманово пространство $V_n$ называется полуприводимым, если в некоторой системе координат его метрика имеет следующий вид:

$$ds^2 = ds_0^2 + \sigma ds_1^2,$$

где $ds_0^2 = g_{ij}(x^k)\,dx^i dx^j$ и $ds_1^2 = a_{\alpha\beta}(x^\gamma)\,dx^\alpha dx^\beta$ $(i, j, k = 1, 2, \ldots, q;\ \alpha, \beta, \gamma, = q+1, \ldots, n)$ — самостоятельные метрики, зависящие каждая от своих переменных $x^k$, $x^l$ соответственно, причем функция $\sigma$ зависит только от координат из $ds_0^2$.

1) Группа движений полуприводимого $V_n$, не перемешивающая переменные $x^i, x^\alpha$, либо совпадает с прямым произведением группы движений в $ds_0^2$, действующей на поверхности $\sigma = A$ и группы движений в $ds_1^2$, либо имеет порядок на единицу больший за счет добавления движений в $ds_0^2$, переводящих $\sigma = A$ в $\sigma = CA$ в комбинации с подобиями в $ds_1^2$ с коэффициентом подобия $\frac{1}{\sqrt{C}}$.

2) Линейный элемент полуприводимого $V_n$, допускающего перемешивающие движения, всегда можно привести к каноническому виду

$$ds^2 = ds_0^2(x^1, \ldots, x^m) + \Psi(x^1, \ldots, x^m)\left[d\tau_0^2(x^{m+1}, \ldots, x^p) + \varphi(x^{m+1}, \ldots, x^p)\,ds_2^2(x^{p+1}, \ldots, x^n)\right],$$

где $d\tau_0^2$ имеет постоянную кривизну $K$, $d\tau_0^2 + \varphi ds_2^2$ — такое пространство, что метрика $d\tau_0^2 + \varphi dy_1^2$ в переменных $x^{m+1}, \ldots, x^p, y_1$ постоянной кривизны $K$, причем метрика $d\tau_0^2$ имеет максимальную размерность, т. е. ее нельзя увеличить за счет метрик $ds_0^2$, $ds_2^2$ так, чтобы разложение сохраняло указанные свойства. Для канонического разложения все движения являются не перемещивающими относительно всех трех метрик $ds_0^2$, $d\tau_0^2$, $ds_2^2$.
И. П. Егоров

4521. **Модули на замкнутых римановых поверхностях. Цудзи** (On the moduli of closed Riemann surfaces. Tsuji Nasatsugu), Comment. math. Univ. St. Pauli, 1956, 5, № 1, 25—28 (англ.)

Если две римановы поверхности $F$ и $F'$ конформно эквивалентны, тогда $F$ и $F'$ назовем принадлежащими одному классу. Классы замкнутых римановых поверхностей некоторого рода $p \geqslant 1$ образуют многообразие $M$, так что классы и точки $M$ поставлены во взаимно однозначное соответствие. Пусть $\mu$ — размерность $M$ в обычном смысле, тогда $M$ зависит от $\mu$ действительных параметров, которые называются модулями замкнутой римановой поверхности рода $p \geqslant 1$. Обозначая единичную окружность через $C$, прямую через $L$, полупрямую $L_0$, произведение $C \times \ldots \times C$ ($p$ — кратное) через $C^p$, автор доказывает следующее: Если $p = 1$, то $\mu = 2$ и $M = C \times L_0$. Если $p \geqslant 2$, то $\mu = 6p - 6$ и, кроме того, если $\mathfrak{W} = C^p \times L_0^p \times L^{4p-6}$, тогда $\mathfrak{W}$ подразбивается подмногообразиями особенностей в счетное число связных многообразий $\mathfrak{W}_i$, каждое из которых можно принять за $M$. K. Noshiro

Перевод из Math. Revs, 1958, 19, № 4, 401.

4522. **О римановых многообразиях разложимой кривизны. Сато** (On Riemannian manifolds of separated curvature. Sato Isuke), Tohoku Math. J., 1958, 10, № 2, 130—134 (англ.)

Риманово многообразие называется многообразием разложимой кривизны и обозначается через $M_n$, если его тензор кривизны имеет вид

$$R_{ijkl} = \sigma S_{ij} S_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы ранг системы внешних форм $\Omega_{ij} = R_{ijkl}\,dx^k \wedge dx^l$ был равен 2. Из результатов Чжэня (S. S. Chern) и Кёйпер (H. Kuiper) выводятся следующие следствия: Многообразие $M_n$ нельзя изометрически погрузить в $(2n-3)$-мерное евклидово пространство. Поле $(n-2)$-мерных подпространств, определяемых уравнениями $R_{ijkl}\,dx^l = 0$ (space of nullity), определяет локальное расслоение многообразия $M_n$ на семейство локально плоских $(n-2)$-мерных подмногообразий. Из результатов Яно (K. Yano) и Сасаки (S. Sasaki) следует, что многообразие $M_n$, группа голономии которого сохраняет комплексную структуру, допускает однопараметрическую группу голономии. Оказывается также, что характеристика Эйлера — Пуанкаре компактного ориентируемого $M_n$ равна нулю. Если через $K(T)$ обозначить кривизну многообразия $M_n$ в двумерном направлении, определяемом простым бивектором $T_{ij}$, то

$$K(T) = \frac{1}{2} R \cos^2\theta, \tag{2}$$

где $R$ — скалярная кривизна, а $\theta$ определяется из соотношения $S_{ij}T^{ij} = ST\cos\theta$. Следовательно, полное односвязное многообразие $M_n$ с отрицательной скалярной кривизной гомеоморфно евклидову пространству ( Картан Э., Геометрия римановых пространств, М. — Л., 1936, стр. 234). Соотношение (2) позволяет к многообразиям $M_n$ с знакопостоянной скалярной кривизной применить также теоремы Бохнера (РЖМат, 1957, 8927, стр. 35 — 38 оригинала). В конце статьи рассматривается случай, когда $M_n$ является, кроме того, многообразием рекуррентной кривизны, т. е. когда, кроме (1), удовлетворяется еще условие $(S_{ij}S_{kl})_m = S_{ij}S_{kl} \cdot 2\theta_m$. Ю. Г. Лумисте

4523. **Характеризация финслеровых пространств, в которых существует абсолютный параллелизм линейных элементов. Варга** (Olyan finsler-terek jellemzése, amelyekben létezik a vonalelemek abszolút párhuzamossága. Varga Ottó), Acta Univ. Debrecen, 1954, 1, 105—108 (венг.)

Если $g_{\alpha\beta}(x, v)$ — метрический тензор финслерова пространства, то соприкасающимся римановым пространством вдоль векторного поля $r^\alpha(x)$ называется риманово пространство с метрикой

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x, r(x)), \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n$$

Те финслеровы пространства с картановской связностью, в которых существует абсолютный параллелизм линейных элементов, обладают интересными геометрическими свойствами. Например, соприкасающееся риманово пространство вдоль векторного поля обладает группой трансляций, траектории которой являются экстремалями поля. Найдена тензорная характеристика таких пространств. В. И. Близникас

4524. **Новое определение нормальных координат в финслеровых пространствах. Рапчак** (A normálkoordináták egy új értelmezése a finsler térben.

Rapcsák András), Acta Univ. debrecen., 1954, 1, 109—116 (венг.)

Пусть $F_n$ — финслерово пространство с основным метрическим тензором

$$g_{ij}(x, v) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L^2(x, v)}{\partial v^i \partial v^j} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

и картановским объектом связности $\Gamma^i_{jk}$, $C^i_{jk}$ (Cartan E., Les espaces de Finsler, 1934), а $l^i$ — единичный вектор, имеющий направление линейного элемента $(x, v)$. Рассмотрим в $F_n$ вектор $\underset{(0)}{\xi^i} = \underset{(0)}{\xi^i}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})$ с опорным линейным элементом $(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})$. Квазигеодезической кривой (в смысле Варга), проходящей через точку $(\underset{(0)}{x^i})$ в направлении вектора $\underset{(0)}{\xi^i}$, называется такая кривая, касательные векторы $\frac{dx^i}{ds}$ которой образуют последовательность параллельных векторов относительно непрерывной последовательности линейных элементов, полученной параллельным перенесением начального линейного элемента вдоль этой же кривой. Если $\frac{dx^i}{ds} = l^i$, то кривая геодезическая. Квазигеодезические кривые пространства $F_n$ определяются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^{*i}_{kp}(x, l)\frac{dx^k}{ds}\cdot\frac{dx^p}{ds} = 0,$$

$$\frac{dl^i}{ds} + \Gamma^{*i}_{0p}(x, l)\frac{dx^p}{ds} = 0,$$

с начальными условиями

$$x^i(s_0) = \underset{(0)}{x^i}, \quad \frac{dx^i(s_0)}{ds} = \underset{(0)}{\xi^i}, \quad l^i(s_0) = \underset{(0)}{l^i},$$

где

$$\Gamma^{*i}_{kp} = \Gamma^i_{kp} - C^i_{kq}\Gamma^q_{sp}v^s, \qquad \Gamma^{*i}_{0p} = l^k\Gamma^{*i}_{kp}.$$

Регулярные решения этой системы можно определить в виде сходящихся рядов

$$x^i(s) = \underset{(0)}{x^i} + \overline{x}^i - \sum_{p=2}^{\infty}\frac{1}{p!}\Gamma^*_{k_1\ldots k_p}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})\,\overline{x}^{k_1}\ldots\overline{x}^{kp},$$

$$l^i(s) = \underset{(0)}{l^i} - \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p!}\Gamma^*_{0k_1\ldots k_p}\overline{x}^{k_1}\ldots x^{kp},$$

где $\overline{x}^i = \underset{(0)}{\xi^i}(s - s_0)$, а $\Gamma^*_{k_1\ldots k_p}$, $\Gamma^*_{0k_1\ldots k_p}$ — выражения, образованные из коэффициентов объекта связности и их частных производных по переменным $x^i$ и $v^i$. Величины $\overline{x}^i$ называются нормальными координатами пространства $F_n$ относительно начального линейного элемента $(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})$ и координат $x^i$. Если $\underset{(0)}{\xi^i}$ меняется, то через линейный элемент $(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})$ проходит семейство квазигеодезических кривых, которые покрывают достаточно малую окрестность точки $(x^i_0)$. Определим функцию $\Omega$ следующим образом:

$$\Omega = \frac{1}{2}(s_1 - s_0)^2, \quad s_0 = s(t_0), \quad s_1 = s(t_1),$$

где $s$ — длина квазигеодезической, а $t$ — любой парамет
Автор доказывает, что $\Omega = \Omega(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})$ и что функция
обладает частными производными $\frac{\partial\Omega}{\partial\underset{(0)}{x^i}}$ и $\frac{\partial\Omega}{\partial\underset{(0)}{x^i}}$. При п
мощи частных производных $\frac{\partial\Omega}{\partial\underset{(0)}{x^i}}$ автор дает геометрич
скую интерпретацию нормальных координат $\overline{x}^i$ прос
ранства $F_n$, которая состоит в том, что

$$\overline{x}^i = -g^{ik}\frac{\partial\Omega}{\partial\underset{(0)}{x^i}}, \qquad g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j.$$

В. И. Близник

**4525. Двумерные пучки геометрических объектов в X**
**Пензов Ю. Е.**, Матем. сб., 1958, **46**, № 3, 291—31
Путем отыскания замкнутых подгрупп полной диффе
ренциальной группы $\mathfrak{D}^{(v-1)}$ порядка $v$ классифицирую
ся двумерные транзитивные пучки геометрических объе
тов постоянного типа над одномерным дифференциру
мым многообразием $X_1$. Для каждого пучка указывает
слой и группа с ее представлением в виде гомеоморфи
мов слоя. Классификацию одномерных пучков автор да
раньше (РЖМат, 1956, 8316; 1957, 6634).

П. И. Швейки

**4526. Об инвариантном оснащении поверхности в пр**
**странстве аффинной связности. Лаптев Г. Ф.**, Докл
АН СССР, 1959, **126**, № 3, 490—493
Методом продолжений и охватов (РЖМат, 1953, 43
строится инвариантное оснащение невырожденной $n$-ме
ной поверхности в пространстве аффинной связност
размерность которого не превосходит $\frac{1}{2}n(n+3)$.

П. И. Швейк

**4527. Теоретико-групповой метод дифференциальн**
**геометрических исследований. Лаптев Г. Ф.**, Т
3-го Всес. матем. съезда, 1956. **3**. М., АН СССР, 195
409—418
Дается развернутое изложение доклада, сделанного
Третьем всесоюзном математическом съезде в 1956
Краткое резюме этого доклада• публиковалось раньш
(РЖМат, 1957, 6642). П. И. Швейк

**4528. Некоторые свойства разложения дифференциал**
**ных систем. Хаймович** (Alcune proprietà delle d
composizioni dei sistemi differenziali. Haimovic
Mendel), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fi
mat. e natur., 1958, **24**, № 6, 646—452 (итал.)
Вводится следующая классификация интегральны
элементов $E_h$ системы внешних дифференциальных ура
нений: $E_h$ называется полурегулярным, если он не я
ляется особым в обычном смысле (Фиников С. П., М
тод внешних форм Картана, ГИТТЛ, М., 1948, 303
$E_h$ называется регулярным слева (справа), если он д
стижим регулярной цепью элементов $E_i$, $i < h$ ($i > h$
$E_h$ называется регулярным, если он регулярен слева
справа; $E_h$ называется особым 1-го рода, если он
полурегулярен, $E_h$ называется особым 2-го рода (3-е
рода), если он полурегулярен, но не регулярен слев
(справа); $E_h$ называется характеристическим, если
особый и принадлежит общему интегральному элемент
$E_p$, где $p$ — жанр системы. Рассматривается разложе
ние системы $S$ жанра $p$ на подсистемы $S^{(1)}$ жанра $r$
$S^{(2)}$, введенное автором ранее (РЖМат, 1959, 7429). Д
казываются теоремы: 1) Если интегральный элемент $E$
полурегулярен в системе $S^{(1)}$ и $f_\gamma > 0$, то всякий эл
мент $E_{\gamma+1} \supset E_\gamma$, регулярный в $S$, является характе
тическим в $S^{(1)}$ (особенность 1-го или 3-его рода); 2) ес

$E_\gamma$ полурегулярен в $S$ и регулярен справа в $S^{(1)}$, а всякий элемент $E_{\gamma+1} \supset E_\gamma$, регулярный в $S$, является особым 1-го или 3-его рода в $S^{(1)}$, то $f_\gamma > 0$, $f_{\gamma+1} > 0$. Здесь $f_\gamma$ означает число линейных уравнений, общих для двух систем, которым удовлетворяет линейный элемент, принадлежащий общему интегральному элементу $E_\gamma$ системы $S^{(1)}$, если он находится в инволюции с общим интегральным элементом $E_\gamma$ системы $S$ в силу системы $S^{(1)}$ или системы $S$. Р. Н. Щербаков

**4529. Обобщенная риманова геометрия I. Такасу** (Generalized Riemannian geometry. I. Takasu Tsurusaburo), Yokohama Math. J., 1957, **5**, № 2, 115—169 (англ.)

**4530 К. Основы тензорного исчисления и римановой геометрии. Хатипов А. Э.-А.** Самарканд, Узб. ун-т, 1956, 211 стр., илл.

**4531 Д. Зеркальные симметрии римановых пространств. Сабинин Л. В.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1959

**4532 Д. Пространство опорных элементов. Лаптев Б. Л.** Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., МГУ, М., 1959

## ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

**4533. Парадокс часов. Мак-Даффи** (The clock paradox. MacDuffee C. C.), Science, 1959, **129**, № 3359, 1359 (англ.)

Автор рассматривает двумерное пространство Минковского с метрикой $ds^2 = dt^2 - dx^2$. С помощью вариационного принципа показывается, что длина кривой, соединяющей две пространственно подобные точки, больше длины прямой, соединяющей эти точки. Отсюда делается вывод о том, что путешественник, движение которого описывается этой кривой, т. е. движущийся с ускорением, по прибытии во вторую точку, окажется моложе того, для которого мировой линией является прямая. Это хорошо известный факт. М. М. Вороновицкий

**4534. О движении наэлектризованной релятивистской частицы в электромагнитном поле, которое распространяется плоскими волнами. Цеули** (Sul moto di una particella elettrizzata, di energia relativistica, in un campo elettromagnetico che si propaga per onde piane. Zeuli Tino), Boll. Unione mat. ital., 1959, **14**, № 1, 1—5 (итал.)

Показано, что система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{y}) = \frac{e\mu}{c}\varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{d\beta},$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{z}) = -\frac{e\mu}{c}j\varphi(\zeta),$$

где $\zeta = z - v_0 t$, $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$, $\varphi$ — произвольная функция, интегрируется в квадратурах. Эта система описывает движение релятивистской частицы в электромагнитном поле, которое распространяется через плоские волны. О. С. Парасюк

**4535. Физические аспекты единой теории. Корбен** (Aspetti fisici delle teorie unitarie. Corben H. C., Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 1952(1953), **23**, 152—163) (итал.)

Дается обзор попыток развивать единую теорию гравитации и электромагнетизма. Даны некоторые подробности этих теорий, основанных на понятии пятимерного континуума. Показывается, что формальный успех этих теорий может быть обязан удаче и что необходимо иметь новый физический принцип для того, чтобы дальнейшие попытки в этом направлении могли быть плодотворными. Такой принцип может относиться к понятию заряженного наблюдателя, однако пока мы не знаем точно природу электрического заряда, трудно формулировать такую теорию. Из резюме автора

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 4, 409.

**4536. Взаимоотношения квантовой гипотезы и теории относительности. Шкарич** (Odnos kvantne hipoteze i teorije relativnosti. Škarić Srdan), Naučna misao, 1955, № 3-4, 39—50 (сербо-хорв.; рез. нем.)

**4537. Релятивистская инвариантность уравнений квантовой механики. Уигнер** (Relativistic invariance of quantummechanical equations. Wigner E.), Helv. phys. acta, 1956, Suppl. № 4, 210—226 (англ.)

**4538. Пространства Эйнштейна, допускающие однопараметрическую группу конформных преобразований. Яно, Нагано** (Einstein spaces admitting a one-parameter group of conformal transformations. Yano Kentaro, Nagano Tadashi), Ann. Math., 1959, **69**, № 2, 451—461 (англ.)

Рассматривается вполне связное пространство Эйнштейна $V_n$ с $n > 2$ и определенно-положительной метрикой $ds^2 = g_{ij}(\xi)\, d\xi^i\, d\xi^j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, которое допускает вектор $V^h(\xi)$, определяющий оператор однопараметрической группы негомотетичных конформных преобразований: $\nabla_j v_i + \nabla_i v_j = 2\varphi g_{ij} \equiv L g_{ij}$, где $\varphi$ — непостоянный скаляр и $L$ — производная Ли, а $\nabla_j$ — означает ковариантное дифференцирование, отвечающее символам Кристоффеля $\left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\}$, и, следовательно, $L_v \left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\} = \varphi_j A_i^n + \varphi_i A_j^h - g_{ij}\varphi^h$ и $L_v K_{kji}^h = -A_k^h \nabla_j \varphi_i + A_j^n \nabla_k \varphi_i - (\nabla_k \varphi^h) g_{ji} + (\nabla_j \varphi^n) g_{ki}$, где $\varphi_j = \nabla_j \varphi$, $\varphi^h = g^{hi}\varphi_i$ и $K_{nij}^k$ — тензор кривизны пространства Эйнштейна. Доказывается теорема: При этих условиях пространство Эйнштейна изометрично полусвязному пространству положительной постоянной кривизны. В частности, оно гомеоморфно сфере $S_n$. Доказательство этой теоремы осуществляется при помощи предварительного доказательства 12 вспомогательных предложений.

Так как тензор Риччи $K_{ji} = (-K/n) g_{ji}$, то из уравнения $L K_{hij}^k = 0$ следует, что $\nabla_j \varphi_i = k \varphi g_{ji}$, где $k = \dfrac{K}{n(n-1)} = \text{const}$, и доказательство теоремы приводит к рассмотрению двух случаев $k = 0$ и $k \neq 0$. Первый из них не представляет затруднения, а второй требует, если придерживаться схемы рассуждений авторов, указанной выше цепочки лемм. Все рассуждения ведутся в классе $C^\infty$ функций. А. З. Петров

**4539. Ковариантные законы сохранения в общей теории относительности. Комар** (Covariant conservation laws in general relativity. Komar Arthur), Phys. Rev., 1958, **113**, № 3, 934—936 (англ.)

Методом, предложенным Бергманом (РЖФиз, 1959, 12149), получены законы сохранения, соответствующие произвольным инфинитезимальным преобразованиям, относительно которых инвариантны уравнения тяготения. Особо рассматривается вопрос о законах сохранения энергии. Отождествление полученных сохраняющихся величин с энергией и моментом количества движения, несмотря на ковариантность полученных законов сохранения, зависит от конкретного выбора координатной системы. Л. А. Х.

**4540. Уравнения Киллинга и законы сохранения.** **Траутман А.** Бюл. Польской АН, 1956, отд. 3, **4**, № 10, 671—674

Так как свойства пространственно-временного континуума органически входят в законы сохранения, $T^{\beta}_{\alpha;\beta}=0$, то автор ставит вопрос о выяснении соотношений между структурой пространства-времени и законами сохранения. Если рассмотреть лагранжиан поля $L=L(g_{\mu\nu}, \psi_A, \psi_{A,\nu})$, то можно рассматривать поведение плотности $L$ относительно групп преобразований: a) независимых переменных $x^{\nu}\to x^{\nu'}$, b) метрического тензора $g_{\mu\nu}\to g'_{\mu\nu}$ и c) калибровочных преобразований переменных поля $\psi_A\to\psi'_A$. Для преобразований b) доказывается теорема: Необходимым и достаточным условием того, чтобы уравнения поля, выведенные из некоторой плотности лагранжиана $L$, были конформно-инвариантными, является уравнение $T^{\alpha}_{\alpha}=0$. В частности, это условие справедливо для электромагнитного поля. Если $V_4$ допускает движение, определяемое вектором Киллинга $\delta\xi^{\nu}$, удовлетворяющим уравнениям Киллинга $\delta\xi^{(\alpha,\beta)}=0$, то законы сохранения можно искать, исходя из вариационной задачи, отвечающей каждому из возможных векторов Киллинга $\delta\xi^{\nu}_i$ ($i=1, 2,\ldots,k\leqslant 10$), и они будут иметь вид $\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\psi_{A,\nu}}\delta^{*}_i\psi_A+\mathfrak{L}\delta_i\xi^{\nu}\right)_{,\nu}=0$ ($i=1,\ldots,k$). Этот результат применяется к частным случаям a) плоского пространства ($k=10$), когда существуют 4 закона сохранения энергии-импульса и 6 законов сохранения момента количества движения, в) к стационарным пространствам $k=1$ и c) к пространствам постоянной кривизны $k=10$. Если $V_4$ допускает конформные бесконечно малые преобразования: $\delta\xi^{(\alpha,\beta)}=\delta\chi g^{\alpha\beta}$, то законы сохранения будут иметь вид $\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\psi_{A,\nu}}\delta^{*}_i\psi_A+\mathfrak{L}\delta_i\xi^{\nu}\right)_{,\nu}=-\mathfrak{L}\delta_i\chi$. А. З. Петров

**4541. О симметрии между отражениями пространства и отражениями времени в спинорном формализме.** **Мера** (Sur la symétrie entre le retournement d'espace et le retournement du temps dans le formalisme spinoriel. Merat Parviz), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 25, 3036—3038 (франц.)

Отмечается, что в теории, основанной на четырехмерном релятивистском уравнении Дирака для электрона, имеется асимметрия между пространством и временем, связанная с тем, что при отражении пространства волновая функция преобразуется линейно, а при отражении времени — антилинейно (т. е. с переходом к комплексно-сопряженным значениям компонент). Для получения линейных преобразований при отражениях времени и достижения полной симметрии между пространством и временем предлагается еще раз (как при переходе от двухкомпонентного к четырехкомпонентному релятивистскому уравнению) удвоить число компонент и применять восьмикомпонентные спиноры.

Примечание референта. При другом законе преобразования четырехкомпонентный спинор будет преобразовываться линейно как при пространственных, так и при временных отражениях. Г. А. Зайцев

## ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

**4542. О характеристических классах Штифеля риманова многообразия.** **Такидзава** (On the Stiefel characteristic classes of a Riemannian manofold. Takizawa S. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser., 1953, A28, № 1, 1—10 (англ.)

В связи с идеей формулы Гаусса — Бонне автор дает интегральную формулу для классов Штифеля риманова многообразия. Дифференциальные формулы интегралов принадлежат соответственным образом присоединенным пучкам, а не бази ному пространству. S. Chern

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 7, 646

**4543. О различающей на римановом многообразии.** **Такидзава** (On the primary difference of two frame functions in a Riemannian manifold. Takizawa Seizi), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto., 1953, A28, № 1, 11—14 (англ.)

**4544. О характеристических циклах подмногообразия.** **Такидзава** (On the characteristic classes of a submanifold. Takizawa Seizi), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1954, A28, № 3, 241—251 (англ.)

Работа примыкает к двум предыдущим работам того же автора (реф. 4492, 4493). Введенные им ранее дифференциальные формы, с помощью которых им изучались характеристические классы римановых многообразий, применяются здесь к изучению характеристических классов касательных и нормальных пучков подмногообразия. В. В. Рыжков

**4545. О характеристических классах пучков сфер.** **Такидзава**, Сугаку, 1957, **8**, № 4, 229—245 (японск.)

**4546. О слоистой структуре компактных локально аффинных пространств.** **Ауслендер** (On the sheeted structure of compact locally affine spaces. Auslander Louis), Michigan Math. J., 1958, **5**, № 2, 163—168 (англ.)

Пусть $M^n$ — компактное, локально аффинное пространство $n$ измерений. Пусть $\Gamma$ — фундаментальная группа $M^n$, а $T$ — подгруппа $\Gamma$, образованная всеми чистыми трансляциями. Тогда $T$ — свободная абелева группа с конечным числом образующих. При этом $h=\Gamma/T$ называется группой голономии группы $\Gamma$. В работе доказываются следующие три теоремы:

Теорема 1. Пусть $T$ — свободная абелева группа с $s$ образующими ($s\geqslant 1$). Предположим также, что $h$ не содержит элементов конечного порядка. Тогда $M^n$ является расслоенной связкой на компактном локально аффинном пространстве $X$ с $s$-мерным тором как слоем. Далее, фундаментальная группа $X$ изоморфна $h$.

Теорема 2. Если $T$ — свободная абелева группа с $s$ образующими, то существует отображение $p: M^n\to X$, где $X$ — компактное пространство (не обязательно многообразие) со следующими свойствами: 1) Для всех $x\in X$, $p^{-1}(x)$ — компактное $s$-мерное многообразие, которое может быть снабжено римановой метрикой с нулевой кривизной и кручением. 2) Отображение $p$ удовлетворяет предположениям, необходимым для применения спектральной последовательности Фари (РЖМат, 1957, 2150).

Теорема 3. Предположим, что $\Gamma$ имеет нетривиальный радикал (т. е. максимальную разрешимую нормальную подгруппу). Тогда существует отображение $p: M^n\to X$, где $X$ — компактное пространство (не обязательно многообразие), и прообразы каждой точки $X$ при $p$ образуют компактное многообразие с тором как накрывающим пространством. В статье дан пример $M^n$, удовлетворяющего условиям теоремы 2, но не удовлетворяющего условиям теоремы 1. Н. С. Синюков

**4547. Приложение методов Гильберта к изучению инфинитезимальных преобразований дифференцируемого многообразия.** **Лелон-Ферран** (Application des méthodes de Hilbert à l'étude des transformations infinitésimales d'une variété différentiable. Lelong-Ferrand Jacqueline), Bull. Soc. math. France, 1958, **86**, № 1, 1—26 (франц.)

Работа посвящена исследованию векторных полей $\xi$ на дифференцируемом, вообще говоря, некомпактном многообразии с точки зрения условий, при которых

операторы $X_\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ порождают глобальную группу преобразований, подчиняемую тому или иному условию, а также связанным с такими полями ортогональным разложениям пространства функций с интегрируемым квадратом. Работа продолжает предыдущие исследования того же автора; по поводу них, см. РЖМат, 1958, 5147; 1959, 8489; там же приведены определения и обозначения, употребляемые здесь. Пусть $V^n$ — многообразие класса $C_1^1$ с заданным на нем элементом объема $d\tau = \gamma dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$; в случае риманова многообразия $\gamma = \sqrt{g}$; $\gamma$, рассматриваемые векторные поля, функции и т. д. предполагаются класса $C_1^0$; дивергенция поля определяется соотношением $\delta\xi = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial x^i}(\gamma\xi^i)$. Рассматривается гильбертово пространство функций с интегрируемым квадратом, скалярное умножение в нем определяется формулой $\langle f, g\rangle = \int_V f\bar{g}\, d\tau$. Это пространство обозначается через $H$, аналогично определяются пространства $H_p^q$ тензоров типов $(p, q)$. К функциям, формам и тензорам прилагаются операторы $X_\xi$, $\widetilde{X}_\xi$ (РЖМат, 1958, 5147). Из рассмотрения интегральных соотношений получается условие, при котором поле $\xi$ определяет глобальную группу преобразований на замыкании $\overline{V^n}$ конечного многообразия $V^n$ класса $C_1^1$ с регулярной границей и элементом объема $d\tau$. Оно состоит в сопряженности замыканий $X_\xi^c$ и $\widetilde{X}_\xi^c$ операторов $X_\xi$ и $\widetilde{X}_\xi$ (или, что то же в совпадении сильного и слабого расширений $X_\xi$: $X_\xi^c = X_\xi^w$. Эта форма условия, отличная от ранее введенных автором, имеет то преимущество, что сохраняет силу и для бесконечных многообразий при условии ограниченности дивергенции поля. В случае риманова многообразия и поля с дивергенцией, равной нулю, это приводит к условию самосопряженности оператора $iX_\xi^c$, при этом соответствующая группа преобразований сохраняет объемы. Если эта группа — группа изометрий, то оператор $iX_\xi^c$ самосопряжен на каждом из пространств $H_p^q$. Обратно, если оператор $iX_\xi^c$ самосопряжен на некотором $H_p^q$ с $p - q \neq \frac{n}{2}$, то группа, определяемая полем $\xi$, будет группой изометрий. Случай самосопряженности $iX_\xi^c$ на $H_p^q$, $p - q = \frac{n}{2}$ дает группы конформных преобразований. Налагая требование, чтобы группа была однопараметрической компактной группой изометрий, автор получает условие, состоящее в ограниченности оператора $X_\xi^{-1}$ на пространстве $H''(\xi)$, где $H''(\xi)$ — ортогональное дополнение в $H$ пространства $H'(\xi)$ слабо инвариантных функций, т. е. удовлетворяющих условию $\langle f, \widetilde{X}^c g\rangle = 0$ для $g$ принадлежащих области определения $\widetilde{X}^c$; результаты, относящиеся к компактности группы, получаются в связи с вопросом о замкнутости ее траекторий. Далее изучается ортогональное разложение $H = H'(\xi) \otimes H''(\xi)$, определяемое данным полем. Приведем формулировку одной из относящихся сюда теорем. Пусть $X_\xi$ — инфинитезимальное преобразование, сохраняющее элемент объема $d\tau$ на многообразии класса $C_1^1$. Для того чтобы каждый элемент $f$ из $H$ допускал разложение вида $f = h + X_g^w$, где $h \in H'(\xi)$ и $g$ принадлежит области определения $X_w$, необходимо и достаточно, чтобы оператор $X_\xi$ соответствовал глобальной однопараметрической группе преобразований $V^n$, чтобы траектории группы $G$ в $V^n$ были замкнуты, а соответствующие периоды равномерно ограничены.

В. В. Рыжков

**4548. Геометрические аспекты потоков и распределений. Илс** (Geometric aspects of currents and distributions. Eells James, Jr.), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1955, **41**, № 7, 493—496 (англ.)

Автор бегло излагает чисто геометрическую конструкцию, на которой может базироваться теория потоков на $C^\infty$-гладком многообразии. От $C_r(M)$, линейного пространства $C^\infty$-гладких сингулярных $r$-цепей на $M$, автор переходит к пространству $\mathfrak{C}_r(M)$, полученному прямым пределом системы пространств, образуемых замыканием $C_r(M)$ относительно некоторой последовательности норм. Пусть $\mathfrak{C}^r(M)$ — обратный предел соответствующих сопряженных пространств. Первая теорема утверждает, что для $x \in \mathfrak{C}^r(M)$ существует единственная $C^\infty$-гладкая $r$-форма $\zeta$, чьи производные удовлетворяют некоторым граничным условиям, и такая, что на любом $r$-мерном симплексе на $M$, $X \cdot \sigma = \int_\sigma \zeta$. Вторая теорема дает для фиксированного $A \in \mathfrak{C}_r(M)$ и произвольного $X \in \mathfrak{C}^r(M)$ представление $X \cdot A$ как интеграла над $M$, от выражения, в которое входит конечная серия суммируемых векторных полей и $r$-мерные векторные поля, зависящие только от $A$. В $\mathfrak{C}^r$, $\mathfrak{C}^r$ могут быть определены произведение Колмогорова — Александера и произведение Уитни; они соответствуют, в силу вышеизложенных теорем, внешним и внутренним произведениям $r$-форм и $s$-векторных полей на $M$. Используемые методы целиком опираются на методы, используемые Уитни в книге Geometric integration theory (РЖМат, 1958, 1942 К).

P. A. Smith

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 4, 404.

**4549. Проективное погружение группового многообразия. Шевалле**, Сугаку, 1956, **7**, № 4, 211—213 (японск.)

**4550. Простые почти кольца дифференцируемых преобразований. Блэкетт** (Simple near-rings of differentiable transformations. Blackett D. W.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 4, 599—606 (англ.)

Если $V$ является действительным $n$-мерным пространством, то любое отображение $T$ пространства $V$ в $V$ имеет вид $(x_1, \ldots, x_n)\, T = XT = (f^1(X), \ldots, f^n(X))$, $X \in V$. В настоящей работе исследуются почти кольца $N$ всех отображений $V$ в $V$ таких, что $OT = 0$ и $T$ является дифференцируемым в окрестности точки $O$. Соответствие $T \to (f_r^s(0))$, где $f_r^s = \partial f^s / \partial x_r$, является гомоморфизмом почти кольца $N$ в кольцо действительных $n \times n$ матриц с ядром, образованным из всех $T$, имеющих нулевой полный дифференциал в точке $O$. Доказывается, что кольцо всех линейных преобразований пространства $V$ является максимальным простым почти кольцом в $N$. Классифицируются другие простые почти кольца в $N$.

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 11, 1226.

R. E. Johnson

**4551. Потоки и их инвариантные производные. I, II, III, IV. Схоутен** (On currents and their invariant derivatives. I, II, III, IV, Schouten J. A.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1956, **A59**, № 4, 371—385; 1957, **A60**, № 1, 1—11; № 3, 233—241; Indagationes math., 1956, **18**, № 4, 371—385; 1957, **19**, № 1, 1—11; № 3, 233—241 (англ.)

Потоки в смысле Рама суть линейные функционалы на дифференциальных формах (или $W$-формах) некоторого многообразия $M$ с некоторыми свойствами непрерывности. С одной стороны, это обобщенные дифференциальные формы, так как если $\omega$ есть некоторая $p$-форма

и $\alpha$ — фиксированная $(n-p)$-форма, то $T[\omega]=\int_M \alpha\wedge\omega$ определяет поток. (Конечно, надо сделать некоторые предположения в роде того, что, например: а) $M$ ориентируемо, $\alpha$ или $\omega$ будет $W$-формой, б) $M$ компактно, $\alpha$ или $\omega$ имеет компактный носитель, или что-либо подобное). С другой стороны, потоки являются обобщением дифференцируемых цепей, потому что если $c^p$ будет $p$-цепь, то $T[\omega]=\int_{c^p}\omega$ будет потоком.

Автор рассматривает также потоки типа $T=(c^{p+q}, \alpha_q)$ или $T=(c^{p-q}, \beta_q)$, где

$$(c^{p+q}, \alpha_q)[\omega_p]=\int_{c^{p+q}}\alpha_q\wedge\omega_p,$$

$$(c^{p-q}, \beta^q)[\omega_p]=\int_{c^{p-q}}\beta^q\cdot\omega_p\ (q\leqq p),$$

где

$$\beta^q\omega_p=\beta^{\lambda_1\dots\lambda_q}\,\omega_{\lambda_1\dots\lambda_p}\,dx^{\lambda_{q+1}}\wedge\dots\wedge dx^{\lambda_p}.$$

Наконец, в самом общем случае рассматривается

$$(c^{p-q+r}, \beta_r^q)[\omega_p]=\int_{c^{p-q+r}}\beta_r^q\cdot\omega_p\ (q\leqq p),$$

где

$$\beta_r^q\cdot\omega_p=$$
$$=\beta^{\lambda_1\dots\lambda_q}_{\mu_1\dots\mu_r}\,\omega_{\lambda_1\dots\lambda_p}dx^{\mu_1}\wedge\dots\wedge dx^{\mu_r}\wedge dx^{\lambda_{q+1}}\wedge\dots\wedge dx^{\lambda_p}.$$

Подобно внешнему дифференцированию $d\omega$ дифференциальной формы $\omega$ оператор $\underset{\beta}{\mathcal{L}}r^{q-1}\omega_p$ определяется следующим образом:

$$(\underset{\beta}{\mathcal{L}}r^{q-1}\omega_p)\,\lambda_1\dots\lambda_{r+p-q+1}=$$
$$=q\beta^{x_1\dots x_q}_{[\lambda_1\dots\lambda_r}\partial_{|x_1}\omega_{x_2\dots x_q|\lambda_{r+1}\dots\lambda_{r+p-q+1}]}+$$
$$+(-1)^{q+1}(p-q+1)\,\omega_{x_1\dots x_q[\lambda_{r+2}\dots\lambda_{r+p-q+1}}\partial_{\lambda_{r+1}]}\beta^{x_1\dots x_q}_{\lambda_1\dots\lambda_r}].$$

Оператор $\underset{\beta}{\mathcal{L}}^0_1$ есть внешнее дифференцирование $d$; $\underset{v}{\mathcal{L}}^0_0$ есть производная Ли по отношению к векторному полю $v=v^1_0$; $\underset{L^0_p}{\mathcal{L}}\omega$ — то же самое, что и $[L, \omega]$ (с точностью до числового множителя) в работе Фрёлиха и Нейхауза (РЖМат, 1958, 7146).

Для случая $T=(M, \alpha)$ имеем $dT[\omega_p]=(-1)^{n-p}T[d\omega_p]$ и это по определению распространяется на другие потоки. Тогда из этого следует, что

$$d(c^{n-q}, \alpha_p)=(-1)^{q-1}(bc^{n-q}, \alpha_p)+(-1)^q(c^{n-q}, d\alpha_p),$$
$$(n-p)\,d(c^{n-q}, \beta^{q-p})=(-1)^{q-1}(n-q)(bc^{n-q}, \beta^{q-p})+$$
$$+(-1)^{p+1}(c^{n-q}, \underset{\beta}{\mathcal{L}}^{q-p-1}),$$

где $b$-оператор границы. В самом общем случае

$$(n-p+q-r)\,d(c^{n-q}, \beta^{q-p}_{r-q})=$$
$$=(-1)^{r+1}(n-r)(bc^{n-q}, \beta^{q-p}_{r-q})+$$
$$+(-1)^{p-q+r+1}(c^{n-q}, \underset{\beta}{\mathcal{L}}^{q-p-1}_{r-q}).$$

Оператор $\underset{\beta}{\mathcal{L}}$ тоже можно определить для потоков, если заметить, что он получается в случае $T=(M, \alpha)$. Если для $\beta=v$-векторного поля имеет место $\mathcal{L}T[\omega]=-T[\mathcal{L}\omega]$, то формула для $\underset{\beta}{\mathcal{L}}^{k-1}_lT$ на потоках порождает новый употребительный символ $\underset{\beta}{\mathcal{L}}^{k-1}_lT[\omega]=-T[\underset{\beta}{\$}^{k-1}_l\omega]$, где $\underset{\beta}{\$}$ — сумма $\underset{\gamma}{\mathcal{L}}$'s с различными $\gamma$'s, получаемыми из $\beta$ свертыванием с подходящими коэффициентами. Если $\beta$ и $\gamma$ чисто контравариантны, то коммутатор $\underset{\gamma}{\mathcal{L}}^q\underset{\beta}{\mathcal{L}}^p+(-1)^{pq}\underset{\gamma}{\mathcal{L}}^q\underset{\beta}{\mathcal{L}}^p$, с точностью до числового множителя, будет равен $\underset{[\beta,\gamma]}{\mathcal{L}}^{p+q}$, где $[\beta, \gamma]$ — схаутеновский дифференциальный конкомитант (Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1940, **43**, 449—452).

Для упрощения выкладок автор вводит понятия „числа валентности", которое приводит к существенному уменьшению числа индексов, которые надо записывать. Пользуясь этим методом, он сумел получить формулу для $\underset{\beta}{\mathcal{L}}^{k-1}_l(\omega\wedge\pi)$.

Третья часть работы посвящена дальнейшему развитию метода „числа валентности", введенного выше, и фиксированию подходящих констант в алгоритме альтернации (ковариантных и контравариантных) тензоров, так чтобы упростить алгоритм. Предполагаются две серии констант: те, которые возникают из стандартного чередования формул исчисления Риччи, развитых автором в его трудах, и те, которые порождаются обобщением метода Картана. Приложения к оригинальным проблемам этой серии статей — к операциям на потоках — откладываются до следующей части. Если $P^h_m, Q^k_q$ будут чередующиеся тензоры с $h$ (или $k$) контравариантным и соответственно $m$ (или $q$) ковариантными индексами, то автор определяет $[P^{h,\,s}_m, Q^k_q]$ как совокупность компонент, которая охватывает компоненты $P, Q$ и их первые частные производные. Это чередование $h+k-s$ верхних и $q+m-s+1$ нижних индексов. Вообще, это не тензор, но для четырех специальных серий значений $h, k, q, m, s$ он им является: I. $h=k=s=1$, тогда $P$ и $Q$ — векторные формы в смысле Фрёлиха и Нейхауза (РЖМат, 1958, 7146) и $[P^{1s}_m, Q^1_q]$ будет в точности их дифференциальный конкомитант $[P, Q]$, который также будет векторной формой. II. $s=h=1$, $m=0$, тогда $[P^{1s}_m, Q^1_q]$ будет производной Ли тензорного поля $Q$ относительно векторного поля $P$. III. $s=1$, $q=m=0$; тогда $[P^{h1}, Q^k]$ будет схаутеновским дифференциальным конкомитантом чередующихся контравариантных тензорных полей $P$ и $Q$ (Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1940, **43**, 449—452). IV. $h=s$, $k=0$; тогда $[P^{ss}_m, Q_q]$ сводится к форме $P\wedge_s dQ+(-1)^{m+s+1}d(P\wedge_s Q)$, где $\wedge_s$ есть алгебраический оператор, обобщающий символ $\wedge$ внешнего произведения для дифференциальных форм и операцию $\overline{\wedge}$ для векторных полей.

Часть четвертая. Если $P^h_p$ и $Q^l_q$ — чередующиеся тензоры и $s\leqq h, q$, то $P\wedge_s Q$ будет тензором с компонентами

$$\gamma P^{x_1\dots x_s\,[x_{s+1}\dots x_h}_{[\mu_1\dots\mu_p}Q^{\lambda_1\dots\lambda_l]}_{|x_1\dots x_s|\,\nu_{s+1}\dots\nu_q]},$$

где $\gamma$ выбрано подходящим образом (в одном из двух смыслов, указанных в части III). Тогда в этих обозначениях

$$\underset{P}{\mathcal{L}}\omega=[P^h_p, \omega_q]=P\wedge_h d\omega+(-1)^{p+h+1}d(P\wedge_h\omega).$$

Символ $|s$ обозначает, что $P^h_{p|s}$ имеет компоненты

$\gamma P^{\lambda_1 \dots \lambda_s \lambda_{s+1} \dots \lambda_h}_{\lambda_1 \dots \lambda_s \mu_{s+1} \dots \mu_p}$ с подходящим $\gamma$. Получены фундаментальные тождества для $\wedge_{s,|s}$ и $\mathcal{L}$, такие как закон ассоциативности для $\wedge_s$, закон дистрибутивности для $\wedge_s$ и $_{|s}$, правило перемножения для $\mathop{\mathcal{L}}_{P}(\varphi \wedge \psi)$. Оригинальная проблема — операции над потоками — вновь рассматривается, определяются и изучаются операции, подобные $P^r_q \wedge_r T_p$, $\mathop{\mathcal{L}}_{P} T$, где $T$ — поток. Этот символический метод оказывается более эффективным, чем прямой только компонентный метод частей I и II, и позволяет теперь явно выразить $\mathop{\mathcal{L}}_{P} T[\varphi] = \sum_{u=0}^{k} (-1)^a T[\mathop{\mathcal{L}}_{P|u} \varphi]$, где $a$ — полином относительно $u$ степеней $P = P^k_l$, $\varphi = \varphi_p$, и размерности пространства. A. Nijenhuis

Перевод из Math. Revs, 1958, 19, № 1, 59—60.

## МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

**4552. О конечной геометрии и о работах Жюэля. Монтель** (Sur la géométrie finie et les travaux de M. C. Juel. Montel Paul), Colloq. quest. réalité géom. Liège, 1955. Liège—Paris, 1956, 9—26 (франц.)

**Начала «конечной геометрии». Монтель** (Les débuts de la géometrie finie. Montel Paul), Colloq. quest. réalité géom. Liège, 1955. Liège—Paris, 1956, 27—37 (франц.)

В этих двух статьях содержится обзор работ, начатых датским математиком Жюэлем и посвященных исследованию таких свойств непрерывных кривых, обладающих непрерывно вращающейся касательной, которые могут быть выведены лишь из знания максимального числа точек пересечения такой кривой с произвольной прямой плоскости. Эти свойства выводятся с помощью чисто геометрических рассмотрений, не привлекающих методов анализа бесконечно малых (отсюда и название этой области геометрии).

Надлежащим развитием методов, предложенных для решения задач плоской геометрии, явилось возможным изучить целый ряд задач конечной геометрии, связанных с теорией поверхностей, и получить, в частности, интересные результаты о числе прямых линий, располагающихся на поверхности, пересекаемой всякой прямой лишь в трех точках. Заслуживает внимания и исследование плоских сечений поверхностей, образованных вращением выпуклых овалов.

В конце первой статьи дана библиография предмета 26 назв. Л. Н. Сретенский

**4553. Замечания о специальных анти-фановых плоскостях. Цаддах** (Bemerkungen über spezielle Anti-Fano—Ebenen. Zaddach Arno), Arch. Math., 1957, 7, № 6, 425—429 (нем.)

Как известно, для конечных плоскостей аксиома $7_3$ (диагональные точки любого полного четырехвершинника коллинеарны) влечет альтернативность плоскости (РЖМат, 1957, 6200). Вопрос о том, будет ли эта теорема справедлива и в случае бесконечных плоскостей, остается открытым, даже если предположить, что плоскость веблен-веддербарнова. Автор доказывает, что веблен-веддербарнова плоскость альтернативна, если в ней проективно выполняется аксиома $7_3$, а в одном из ее натуральных веблен-веддербарновых тел справедливо соотношение $a((bc)b) = ((ab)c)b$. Л. А. Скорняков

**4554. О полноте дуг в конечных проективных плоскостях. I. Ше** (Sulla completezza degli archi nei piani proiettivi finiti. I. Sce Michele), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1958, **25**, № 1-2, 43—51 (итал.)

Рассматривается конечная проективная плоскость, в которой каждая прямая содержит $q+1$ точку. $k_q$-дугой называется совокупность $k$ точек, из которых никакие три не коллинеарны. $k_q$-дуга называется полной, если она не содержится в $(k+1)_q$-дуге. Минимум числа секущих, которые можно прозести из произвольной точки плоскости к $k_q$-дуге, называется ее индексом. Показывается, что для полной дуги $d = (k-1)(k-2)/2 - hq \geqslant 0$. Устанавливается, что $k_q$-дуга не будет полной, если выполняется одно из следующих условий: при четном $k$: 1) $k > 2(h^2 - h + 1)$, $d = 0$, $h > 1$, 2) $k > 6$, $d = h = 1$ 3) $k > 2h(h+1)$, $d = 1$, $h > 1$, при нечетном $k$: 1) $d \leqslant \frac{\sqrt{3}-1}{2} k - \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} h + \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$, 2) $k > \lambda(\lambda+3)(\lambda^2+\lambda+1)$, $d = (\lambda+1)(\lambda+2)/2$, $\lambda = q-k$, 3) $k < 2(h+1) + \sqrt{2h+1}$, $d = (k-2h-1)/2$ Показывается, что если $q$ четное большее, чем $(\lambda+1)(\lambda+2)/2+1$, то $h \leqslant (q-2\lambda-2)/2$, если же $q$ нечетное, большее, чем $(\lambda+1)(\lambda+2)+1$, то $h \leqslant (q-2\lambda-3)/2$. Дуги, для которых в соотношении для $h$ достигается равенство, называются дугами максимального индекса. Устанавливаются некоторые свойства таких дуг. В. В. Морозов

**4555. Геометрия расстояний метрических дуг. Эйбел, Блументал** (Distance geometry of metric arcs. Abel William R., Blumenthal Leonard M.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 8, Part 2, 1—10 (англ.)

Рассматриваются метрические дуги, которые имеют в каждой точке конечную кривизну Менгера. Основной идеей здесь будет концепция решетки и однородной цепи. Автор устанавливает теорему, что для метрической дуги с конечной кривизной Менгера в каждой точке существует положительное целое число $N$ такое, что для $n > N$ дуга содержит точно одну $n$-решетку. Отдельный параграф посвящен изучению метрических дуг с нулевой кривизной Менже. Окончательный результат установлен относительно метрического птолемеева пространства, а именно, что каждая геодезическая дуга есть метрический сегмент. S. Goląb

**4556. Геометрия расстояний метрической дуги. II. Эйбел, Блументал** (Distance geometry of metric arcs II. Abel William R., Blumenthal Leonard M.), Arch. Math., 1958, **8**, № 6, 451—463 (англ.)

Часть I см. реф. 4555. Если $r, s, t$ — три различные точки метрического пространства $M$, то углами трехточечника $(r, s, t)$ называют углы евклидова треугольника, стороны которого равны расстояниям между точками $r, s, t$. Автор вводит два понятия $T$ и $T^*$, которые являются основой этих исследований: $M$ обладает свойством $T$ ($T^*$) в точке $P$, если существует число $\delta_p > 0$ (два числа $\delta_p > 0$ и $0 < \alpha_p \leqslant \frac{\pi}{2}$) такое (такие), что всякий трехточечник, образованный тремя различными точками, для которых расстояние от $p$ меньше $\delta_p$, содержит угол больше $\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_p\right)$. Метрический континуум обладает свойством $T$ ($T^*$), если все его точки обладают этим свойством. Вот два основных результата работы: 1) Метрический континуум, обладающий свойством $T^*$, есть спрямляемая кривая, гомеоморфная отрезку $[0, 1]$ или окружности; 2) Метрический континуум, обладающий свойством $T^*$ в точке $p_0$, есть спрямляемая линия в окрестности $p_0$. Из этих теорем следует: если менгерова кривизна метрического континуума $K$ равна нулю в точке $p_0$, то $K$ будет спрямляемой дугой в окрестности $p_0$. Отметим еще следующий результат: Если метрическая дуга $A$, соединяющая точки $a$ и $b$, обладает свойством $T$, то существует натуральное число $N$

такое, что для всех $n > N$ эта дуга содержит одну и только одну упорядоченную последовательность точек $a = p_0, p_1, \ldots, p_n = b$, которые удовлетворяют равенствам $p_0p_1 = p_1p_2 = \ldots = p_{n-1}p_n$. W. Ślebodziński

**4557. О проблеме соизмеримости между внутренними углами прямоугольного треугольника. Лоу Чжиюань,** Шусюэ тунбао, Shuxue tongbao, 1958, № 8, 11—12, 9 (кит.)

Устанавливается несколько теорем об отношениях соизмеримости между углами прямоугольного треугольника. Основной результат следующий:

Теорема 1. Пусть чебышевский полином будет $T(x) = \cos(n \arccos x)$ и $\cos\theta = a$, тогда, чтобы $\theta$ и $\frac{\pi}{2}$ были соизмеримы, необходимо и достаточно, чтобы $a$ было корнем уравнения $T_n(x) = 0$ или $T_n(x) \pm 1 = 0$.

Теорема 2. Ни одно рациональное число, кроме $0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}$ не может быть корнем $T_n(x) = 0$ или $T_n(x) \pm 1 = 0$. Исходя из соотношения $\cos(k+1)\theta = 2\cos\theta\cos k\theta - \cos(k-1)\theta$ и используя метод математической индукции, легко показать: если $\cos\theta \neq 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$, то для всех целых $n$ выражение $\cos n\theta$ не принимает значений 0 или $\pm 1$.

Теорема 3. Чтобы внутренние углы прямоугольного треугольника были соизмеримы друг другу, необходимо и достаточно, чтобы отношение одного катета к гипотенузе было корнем уравнения $T_n(x) = 0$ или $T_n(x) \pm 1 = 0$.

Следствие I. Если стороны прямоугольного треугольника соизмеримы друг другу, то внутренние углы несоизмеримы друг другу (поэтому внутренние углы египетского треугольника соизмеримы).

Следствие II. Прямоугольный треугольник с внутренними углами $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ единственный случай, когда отношение одного катета к гипотенузе будет рациональным числом и углы соизмеримы друг другу.

Резюме автора

**4558. Дуализируемые кривые в $R^3$. Кюннет** (Dualisierbare Kurven im $R^3$. Künneth Hermann), J. reine und an gew. Math., 1959, 201, № 1-2, 84—99 (нем.)

Работа посвящена изучению особенностей дуализируемой пространственной кривой. Рассматриваются кривые проективного пространства с установленной в нем эллиптической инволюторной корреляцией (поляритетом). Существенную роль играют следующие условия: F1, кривая есть непрерывный ряд точек $p(t)$; F2, в каждом месте $t_0$ существуют полукасательные с общей несущей прямой $T_0 = \lim_{t \to t_0} p_0 \vee p$; F3, в каждом месте кривой $t_0$ существуют соприкасающиеся полуплоскости с общей несущей плоскостью $\sigma_0 = \lim_{t \to t_0} T_0 \vee p$. Здесь подразумевается, что для каждого $t_0$ существует окрестность, в которой $p_0 \vee p$ и $T_0 \vee p$ не становятся неопределенными. Далее, под условиями дуализируемости понимаются следующие требования: D1: для кривой должны быть справедливы все предложения, получаемые из верных предложений о точечном ряде $p(t)$ взаимной заменой $p$ и $\sigma$, $\vee$ и $\wedge$ и размерностей 0 и 2; точечный ряд $p(t)$ и ряд касательных $T(t)$ должны получаться из ряда $\sigma(t)$ соприкасающихся плоскостей двойственным образом по отношению к образованию $\sigma(t)$ и $T(t)$ из $p(t)$. D2: Должны сохраняться все предложения о $p(t)$ (соответственно о $\sigma(t)$) при замене $p(t)$ через $T(t)$ (соответственно $\sigma(t)$ через $T(t)$); ряды $p(t)$ и $\sigma(t)$ должны надлежащим образом получаться из ряда $T(t)$. Применение условий D1 и D2 к F1, F2, F3 дает соответственно условия F1*, F2*, F3* и F1**, F2**, F3**. Кривая называется дуализируемой, если она удовлетворяет всем девяти условиям I. При выполнении тех или иных из числа условий F устанавливаются предложения об отсутствии особенностей того или иного типа или о том, что множество таких особенностей нигде не плотно. Например, при выполнении требований F1, F2, F1** множество точек возврата нигде не плотно. Изучая след касательных в какой-либо плоскости автор получает теорему: Всякая дуализируемая кривая в $R_3$ является замкнутой суммой счетного множества монотонных дуг. Дальнейшие результаты относятся к трехграннику Френе, к сильно особым точкам (т. е. таким, что хотя бы в одной из полуокрестностей точки кривая не монотонна, сколь бы ни была мала эта полуокрестность), и к классификации особенностей.

В. В. Рыжков

**4559. Площадь обобщенного круга как функция его радиуса. I, II. Фаст Г.,** Fundam. math., 1959, 47, № 2, 137—146; 147—163

Пусть $M$ — плоское точечное множество и $r > 0$. Обобщенным кругом $M_r$ радиуса $r$ с центром $M$ автор называет множество точек $p$ плоскости, для которых $d(p, M) \leqslant r$. Для $M_r$ употребляются также наименования „$r$-раздутие" или „$r$-окрестность" множества $M$.

Множество $M_r$ замкнуто и измеримо по Жордану, его мера Жордана обозначается $mM_r$. Изучается функция $\varphi_M(r)$, определяемая равенством $\varphi_M(r) = mM_r - \pi r^2$. Как показал Минковский, функция $\varphi_M(r)$ для выпуклого множества $M$ линейна. Автор показывает (II, теорема 5), что справедливо и обратное.

Основная теорема I гласит: Если $M$ — плоский континуум, то функция $\varphi_M(r)$ выпукла вверх.

В II вводится понятие радиуса внешней достижимости множества $M$. Пусть, при фиксированном $r > 0$, множество $B$ обладает свойством $B_r \subset CM$, а множество $B^{(r, M)}$ определено как замыкание суммы всех таких множеств $B$. Тогда $B^{(r, M)} \subset \overline{CM}$. Если для некоторого $r$ имеем $B^{(r, M)} \subset \overline{CM}$, то это равенство справедливо для всех $r' < r$. Поэтому равенство $B^{(r, M)} = \overline{CM}$ определяет сечение во множестве действительных чисел. Число, определенное этим сечением, обозначаем $P(M)$ и называем радиусом внешней достижимости множества $M$. Если $B^{(r, M)} = \overline{CM}$ для всех $r > 0$, то полагаем $P(M) = \infty$.

Кроме упомянутой выше теоремы, доказываются

Теорема 1. Пусть $M$ — односвязный континуум $0 < P(M) \leqslant \infty$. Тогда $\varphi_M(r)$ линейна для $0 < r < P(M)$.

Теорема 2. Если $M$ — односвязный континуум $P(M) < \infty$, то $\varphi_M(r)$ строго выпукла вверх при $r > P(M)$.

Справедлива также теорема 6. Пусть $M$ — произвольный континуум и $\widetilde{M}$ — его выпуклая оболочка. График $\varphi_M(r)$ имеет при $r \to \infty$ асимптотой прямую, являющуюся графиком $\varphi_{\widetilde{M}}(r)$.

Р. Гутер

**4560 Д. Некоторые вопросы геометрической теории преобразований Каратеодори в вариационном исчислении Кабанов Н. Н.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Саратовск. ун-т, Саратов, 1959

## ВЫПУКЛЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

**4561. О наиболее коротких путях на замкнутых поверхностях. Штейнгауз** (On shortest paths on closed surfaces. Steinhaus H.), Bull. Acad. polon.

sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, 6, № 5, 303—308, XXIII (англ.; рез. русск.)

Доказывается следующая теорема: Пусть $S$ — гомеоморфная сфере регулярная поверхность, $P$ — произвольная точка на ней и и $\overline{P}$ — точка поверхности, наиболее удаленная от $P$ (в смысле расстояний на поверхности). Тогда точки $P$ и $\overline{P}$ можно соединить по крайней мере двумя кратчайшими на поверхности $S$.

А. В. Погорелов

**4562. Об одном полном семействе экстремальных выпуклых тел вращения. Хадвигер** (Über eine vollständige Schar extremaler konvexer Rotationskörper. Hadwiger Hugo), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1956, 59, № 1, 1. Abt., 7—12 (нем.)

Пусть $A$ означает выпуклое тело вращения в евклидовом $k$-мерном пространстве. Таким образом пересечения тела $A$ с $(k-1)$-мерными подпространствами, нормальными к его оси вращения, будут $(k-1)$-мерные сферы. Пусть $a$ означает их наибольший радиус, $W_\lambda$ — порядка $\lambda$ общий объем тела $A$ с единичной $k$-сферой и положим $W_\lambda = (W_\lambda / \omega)^{1/(k-\lambda)}$, где $\omega$ — объем единичной $k$-сферы ($\lambda = 0, 1, \ldots, k-1$). Индексы $\nu$ и $\mu$ фиксированы; $0 \leqslant \nu < \mu < k$. Посредством $\alpha = a/w_\mu$, $\beta = w_\nu / w_\mu$ класс всех тел $A$ с заданным $a$ отображается на множество $\mathfrak{R}$ точек $(\alpha, \beta)$ на плоскости. Автор сообщает результаты, которые вполне определяют $\mathfrak{R}$. Они эквивалентны необходимым и достаточным условиям для существования тела $A$ с заданными $a$, $W_\nu$ и $W_\mu$. Множество $\mathfrak{R}$ ограничено, замкнуто и связно. Оно выпукло в $\beta$-направлении. Граница множества $\mathfrak{R}$ состоит из точек — образов некоторых элементарных $A$. Для дальнейших подробностей читатель отсылается к оригинальной статье.

P. Scherk

Перевод из Math. Revs., 1957, 18, № 3, 228.

**4563. Риманова метрика, ассоциированная с выпуклыми телами и нормированными пространствами. Лаугвиц, Лорх** (Riemann metrics associated with convex bodies and normed spaces. Laugwitz Detlef, Lorch Edgar R.), Amer. J. Math., 1956, 78, № 4, 889—894 (англ.)

Пусть $\mathfrak{B}^1$ — гильбертово пространство и $b$-выпуклое тело в этом пространстве, содержащее начало системы координат как внутреннюю точку. Пусть определяемая метрика Минковского задана через $F(x)$ и пусть производные Фреше от $^1/_2 F^2(x)$ обозначаются через $g_i(x)$, $g_{ik}(x)$, ... и т. д. Авторы рассматривают в этой статье риманову метрику, определяемую при помощи величин $g_{ik}(x)$. Они показывают, что тензор кривизны, введенный Лаугвицом

$$R^l_{ijk} = \frac{1}{4} g^{lr} g^{ms} (g_{mi} g_{rsk} - g_{mk} g_{rsi}),$$

в двумерном случае тождественно исчезает. Показывается также, что эта кривизна в случае пространства постоянной кривизны исчезает.

Если выпуклое тело $b$ рассматривается как индикатрикса, принадлежащая локальной метрике Минковского некоторого финслерова пространства, тогда в так получаемом финслеровом пространстве тензор кривизны Картана $S_{ijkl}$ тождественно исчезает.

Наконец, авторы доказывают, что геодезические линии введенного риманова пространства являются прямыми тогда и только тогда, когда $b$ — эллипсоид с центром $O$.

A. Rapcsák

**4564. О теореме Эрдёша. Флориан** (Zu einem Satz von P. Erdös. Florian A.), Elem. Math., 1958, 13, № 3, 55—58 (нем.)

В небольшой заметке дается доказательство обобщенного неравенства Эрдёша. Если через $R_1$, $R_2$, $R_3$ и $r_1$, $r_2$, $r_3$ обозначить расстояния вершин, соответственно сторон треугольника от некоторой его внутренней точки $O$, то Эрдёшем установлено следующее неравенство: $R_1 + R_2 + R_3 \geqslant 2(r_1 + r_2 + r_3)$, причем случай равенства имеет место для правильного треугольника, для которого точка $O$ служит центром.

Автор настоящей заметки устанавливает следующие неравенства:

$$R_1^k + R_2^k + R_3^k \geqslant 2^k \left(r_1^k + r_2^k + r_3^k\right), \text{ для } 0 < k \leqslant 1$$

и

$$R_1^k + R_2^k + R_3^k \geqslant 2\left(r_1^k + r_2^k + r_3^k\right) \text{ для } k > 1.$$

Кроме того, высказывается предложение, являющееся распространением неравенства Эрдёша на случай выпуклого $n$-угольника:

$$R_1 + R_2 + \ldots + R_n \geqslant \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}} (r_1 + r_2 + \ldots r_3),$$

где по-прежнему $R_i$ — расстояния произвольной внутренней точки $O$ многоугольника от вершин, а $r_i$ — ее расстояния от сторон. Рассмотрены два частных случая: 1) $n = 3$ и 2) $n = 4$. Доказательства общего случая автором не дано.

В. А. Яблоков

**4565. Неравенства Минковского и невыпуклые тела вращения. Хадвигер** (Minkowskis Ungleichungen und nichtkonvexe Rotationskörper. Hadwiger Hugo), Math. Nachr., 1955 (1956), 14, № 4-6, 377—383 (нем.)

Точное обобщение так называемого „Quermassintegrale" для невыпуклого тела $A$ в $E^n$ дается формулой

$$W_i = c_{in}^{-1} \int \chi(A \cap E_i)\, dE_i \quad (0 \leqslant i \leqslant n),$$

где $E_i$ пробегает множество $i$-мерных плоскостей в $E^n$, $dE_i$ — интегрально-геометрическая плоскость этого множества и $\chi(A \cap E_i)$ — эйлерова характеристика для $A \cap E_i$. Предполагается, что $\chi(A \cap E_i)$ определено для всех $E_i$ и этот интеграл как интеграл Римана существует. Константы $c_{in}$ определяются посредством формул

$$c_{0n} = 1, \; c_{in} = \binom{n}{i} (k_{n-1} \ldots k_{n-i}) (k_1 \ldots k_i)^{-1}$$

для $i \geqslant 1$, где $k_i$ — объем $i$-мерного единичного шара. Для выпуклого $A$ $W_i$ удовлетворяют неравенствам

$$(W_k/k_n)^{1/(n-k)} \geqslant (W_i/k_n)^{1/n-i}, \quad 0 \leqslant i < k \leqslant n-1.$$

Равенства имеют место только для сфер. Известно, что эти неравенства в общем случае не всегда справедливы, но, как здесь показывают, они сохраняют силу для невыпуклых тел вращения, если каждая гиперплоскость, перпендикулярная к оси вращения, пересекает тело по множеству точек, гомеоморфному $(n-1)$-мерному шару.

H. Busemann

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 7, 595.

**4566. О $(n \pm 1)$-угольнике в $E_n$ с максимальным объемом выпуклой оболочки. Мишек** (O $(n \pm 1)$-úhelníku v $E_n$ s maximálním objemem konvexního obalu. Míšek Bohuslav), Časop. pěstov. mat., 1959, 84, № 1, 99—104 (чешск.; рез. русск., англ.)

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ — различные точки в $E_n$. Изучаются $(n+1)$-угольники (т. е. системы отрезков $A_1A_2 \ldots \ldots, A_{n+1}A_1$), которые имеют при данном периметре выпуклую оболочку максимального объема. В таком случае $\overline{A_1A_2} = \ldots \overline{A_{n+1}A_1} = a$ и для угла $\alpha$ произвольных двух сторон многоугольника имеем $\cos\alpha = \frac{1}{n}$. Затем изуча-

ются углы, образованные диагоналями и сторонами. Для объема выпуклой оболочки дана формула

$$V_n = \frac{a^n}{n!}\sqrt{\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}}$$

Z. Nádeník

**4567. Правильные политопы серии куба (PC) и декагексаэдра (PD). Мачинский** (Polytopes réguliers des séries du cube (PC) et du décahexaèdre (PD). Exemples de polytopes: a. contenant un espace «euclidien» fermé et b. correspondant à un espace à courbure constante non fermé. Matschinski Matthias), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 6, 717—720 (франц.)

Автор строит в шестимерном евклидовом пространстве правильный политоп (аналог правильного многогранника), трехмерными гранями которого являются кубы (64 куба), а также другие политопы, и изучает некоторые их свойства. Конструкции автора аналогичны конструкциям, примененным им для построения в четырехмерном пространстве правильного шестнадцатигранника, грани которого — квадраты (РЖМат, 1957, 4357). Отметим, что указанный политоп, как и ранее построенный автором шестнадцатигранник, топологически эквивалентны тору соответствующей размерности. Э. Г. Позняк

**4568. Октаэдры, вписанные в куб. Бакош** (Octahedra inscribed in a cube. Bakos T.), Math. Gaz., 1959, **43**, № 343, 17—20 (англ.)

Дается решение задачи, предложенной Дорманом Льюком (РЖМат, 1961, 873): 1). В куб вписать правильный октаэдр так, чтобы вершины последнего лежали по одной на каждом из шести ребер куба. 2) Показав, что таких октаэдров можно вписать четыре, изучить тело, ограниченное 32 гранями и являющееся общей частью этих четырех октаэдров. 3) Сколько кубов можно описать указанным образом около данного октаэдра? 4) Изучить многогранник, образованный вершинами всех этих кубов. При решении отчасти используются средства координатной геометрии. Ю. М. Гайдук

**4569 Д. Об изгибании выпуклых многогранников с границей. Шор Л. А.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Харьковск. ун-т, Харьков, 1959

---

**См. также:** 3934, 4014, 4418.

## ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Редактор *В. К. Саульев*

**4570. О сходимости разностных схем в классе разрывных коэффициентов. Тихонов А. Н., Самарский А. А.**, Докл. АН СССР, 1959, **124**, № 3, 529—532

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$Lu \equiv \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{p(x)}\frac{du}{dx}\right) = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad (1)$$

где $0 < m \leqslant p(x) \leqslant M$, и разностная схема

$$L_h y_i \equiv \frac{1}{h^2}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{B_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{A_i}\right)$$

на сетке $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$; $Nh = 1$; $y_i = y(x_i)$; $A_i = A(\bar{p}(s))$, $B_i = B(\bar{p}(s))$ при $\bar{p}(s) = p(x_i + sh)$, $-1 < s < 1$; $A$ и $B$ — линейные функционалы, подчиненные некоторым ограничениям. Разностная схема называется квазиконсервативной, если $B_i = A_{i+1}$ в классе непрерывных $p(x)$, и консервативной, если $B_i = A_{i+1}$ в классе $Q$ кусочно-непрерывных $p(x)$. Основные результаты: 1) для сходимости однородной (РЖМат, 1959, 9482) разностной схемы $L_h$ в классе $Q$ необходимо, чтобы

$$\frac{B_n B_{n+1}}{p(\xi+0)} - \frac{A_n A_{n+1}}{p(\xi-0)} \to 0$$

при $h \to 0$, где $\xi$ — точка разрыва функции $p(x)$, лежащая на интервале $(x_n, x_{n+1})$; 2) если разностная схема $L_h$ сходится в классе $Q$, то она квазиконсервативная и существует эквивалентная ей в смысле сходимости консервативная схема. А. Ф. Филиппов

**4571. Применение одного функционального ряда для вывода формул различных численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Гольцов Н. А.**, Электроэнергетика, вып. 1, 1959, 120—126

Для вывода формул численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривается следующий функциональный ряд

$$y(x_h + h) = \sum_{k=0}^{p}\sum_{i=1}^{m_k} h^k C_{ki} y^{(k)}(x_n + \alpha_{ki} h), \qquad (1)$$

$$m_k = m_0, m_1, \ldots, m_p,$$

где $p$ — величина порядка наивысшей производной искомой функции, участвующей в расчетах; $m_k$ — число производных одинакового порядка, участвующих в расчетах. Для определения коэффициентов $C_{ki}$, $\alpha_{ki}$ ряда (1) применяется метод неопределенных коэффициентов. В качестве приложения составлена система уравнений для определения $C_{ki}$, $\alpha_{ki}$ при $m_0 = m_1 = m_2 = 4$ и приводится таблица, в которой, наряду с ранее известными формулами, приведены новые. М. А. Алексидзе

**4572. Практический метод решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Сидаровский** (Eine praktische Methode zur Lösung von linearen Differentialgleichungen mit nicht konstanten Koeffizienten. Szidarovszky J.), Acta techn. Acad. scient. hung., 1959, **24**, № 1-2, 85—94 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Излагается приближенный метод решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений $n$-го порядка с переменными коэффициентами, который дает достаточную для инженерных расчетов точность.

Идея этого метода заключается в том, что для заданного дифференциального уравнения $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = b(x)$ рассматриваемый отрезок изменения независимой переменной $x$ $(x_0 \leqslant x \leqslant x_m)$ разбивается на $m$ отрезков так, чтобы в пределах каждого отрезка коэффициенты при производных и член $b(x)$, стоящий в правой части уравнения, могли считаться постоянными. Общее решение таким образом полученного замещающего дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами $y^{(n)} + \bar{a}_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + \bar{a}_0 y = \bar{b}_n$ находится как сумма частного решения данного неоднородного уравнения с общим решением соответствующего однородного уравнения $y = A_1 g_1(x) + A_2 g_2(x) + \ldots + A_n g_n(x) + g_0(x)$

и содержит $n$ независимых произвольных постоянных $(A_1, \ldots, A_n)$, подбор которых производится в соответствии с начальными условиями задачи.

Частные решения $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)$ и $g_0(x)$ определяются при переходе с отрезка на отрезок последовательно. Для этого каждое из частных решений записывается в виде общего решения замещающего уравнения на данном отрезке; при этом существенно используется условие совпадения частных решений на границах соседних отрезков. Приводится решение указанным методом линейного неоднородного уравнения 2-го порядка с переменными коэффициентами. И. Ф. Шелихова

**4573. Метод численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Столлер, Моррисон** (A method for the numerical integration of ordinary differential equations. Stoller L., Morrison D.), Math. Tables and other Aids Comput., 1958, **12**, № 64, 269—272 (англ.)

Решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$ в точке $x_0 + h$ можно представить в виде $y(x_0 + h) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f[x, y(x)]\,dx$. Заменяя интеграл квадратурной формулой и вычисляя значения $y$ в промежуточных точках каким-нибудь методом, получаем приближенное значение $y$ в точке $x_0 + h$. В работе предлагается следующая формула:

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + \frac{h}{2}[W_0 y'(x_0) + W_q y'(x_q) + W_p y'(x_p)],$$

где

$$W_0 = \frac{2}{9}, \quad W_p = \left(\frac{8}{9} - \frac{\sqrt{6}}{18}\right), \quad x_p = x_0 + h\left(\frac{3}{5} + \frac{\sqrt{6}}{10}\right),$$

$$W_q = \left(\frac{8}{9} + \frac{\sqrt{6}}{18}\right), \quad x_q = x_0 + h\left(\frac{3}{5} - \frac{\sqrt{6}}{10}\right),$$

а для вычисления значений $y(x_q)$, $y(x_p)$—воспользоваться методом Рунге—Кутта. Приводятся числовые примеры. М. А. Алексидзе

**4574. Об одном методе приближенного решения дифференциального уравнения. Петшиковский** (O pewnej metodzie przybliżonego rozwiązywania układów równań różniczkowych. Pietrzykowski T.), Biul. zakł. apar. mat. PAN, 1958, **P1**, № 4, 50—55 (польск.; рез. англ.)

Рассматривается некоторый метод приближенного построения решения линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для ряда равноотстоящих значений независимой переменной. С. М. Лозинский

**4575. Замечание об интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге — Кутта. Уилер** (Note on Runge — Kutta method of integrating ordinary differential equations. Wheeler D. J.), Comput. J., 1959, **2**, № 1, 23 (англ.)

На практике часто встречаются задачи, в которых интегрирование происходит до тех пор, пока зависимое переменное не достигнет определенной заданной величины. Поэтому процесс приходится повторять 3—4 раза, пока полученное значение зависимого переменного не совпадает с желаемой точностью с заданным значением. Автор предлагает с помощью дополнительной подпрограммы так изменять независимое переменное, чтобы заданное значение функции достигалось при первом же интегрировании. М. А. Алексидзе

**4576. К вопросу о решении методом сеток осесимметрической задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Давиденко Д. Ф.**, Докл. АН СССР, 1959, **126**, № 3, 471—473

В работе автора (РЖМат, 1957, 5931) был предложен метод построения разностных уравнений для решения осесимметрической задачи Дирихле для уравнения Лапласа. В той же работе были выведены 9-точечные конечноразностные соотношения для случая квадратной сетки с шагом $h$, остаточные члены которых имеют порядки: $h^6$ для узлов, лежащих на оси симметрии, и $h^8$ для остальных. При этом некоторые из коэффициентов этих уравнений оказались отрицательными. В настоящей работе выводятся 9-точечные конечноразностные соотношения с положительными коэффициентами и остаточным членом порядка $h^8$. Приводится числовой пример. М. А. Алексидзе

**4577. К вопросу о численном определении функции тока Стокса. Давиденко Д. Ф.**, Докл. АН СССР, 1959, **126**, № 4, 699—702

Предложенный автором (РЖМат, 1957, 5931) метод построения конечноразностных уравнений для решения осесимметрической задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом сеток применяется для решения аналогичной задачи для уравнения

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0,$$

где $r$ — радиальная координата, $z$ — координата, направленная вдоль оси симметрии. Для квадратной сетки даются 5-точечные и 9-точечные сетчатые аппроксимации оператора $L$, остаточные члены которых имеют соответственно четвертый и шестой порядок малости относительно шага сетки. Приводится числовой пример. М. А. Алексидзе

**4578. О конечноразностном аналоге задачи Неймана. Лебедев В. И.**, Докл. АН СССР, 1959, **126**, № 3, 494—497

Автор строит разностный аналог задачи Неймана, исходя из требования удовлетворения граничному условию в слабом смысле, что дает возможность правильно учитывать сильно осциллирующие на границе области функции. Устанавливается необходимое и достаточное условие для разрешимости системы разностных уравнений. Известно, что для плоской односвязной области задача Неймана сводится к задаче Дирихле. Пользуясь этим, автор рассматривает разностную схему, итерационный процесс для которой будет сходиться с той же скоростью, что и для разностной задачи Дирихле. В пространственном случае при составлении разностных уравнений используется метод ортогональных проекций. М. А. Алексидзе

**4579. Метод сеток при второй краевой задаче для уравнения Пуассона. Лебедев В. И.**, Докл. АН СССР, 1959, **127**, № 4, 742—745

Излагается метод приближенного решения двумерной задачи Неймана для уравнения Пуассона. Идея этого метода заключается в том, что методом сеток решается задача Дирихле для сопряженной функции с простым переносом граничных значений в граничные узлы сетки и затем по приближенным значениям сопряженной функции строится приближенное решение задачи Неймана; при этом в граничных узлах сетки применяется линейная и квадратичная интерполяция граничных значений сопряженной функции, что дает большую точность за счет некоторого усложнения вида приграничных разностных операторов. В заключение приводятся краткие замечания относительно разностной аппроксимации третьей краевой задачи. И. Ф. Шелихова

**4580. О погрешности при численном решении задачи Неймана для прямоугольника. Гиз** (On the truncation error in a numerical solution of the Neumann problem for a rectangle. Giese John H.), J. Math. and Phys., 1958, **37**, № 2, 169—177 (англ.)

Оценивается погрешность, возникающая при численном решении задачи

$$\Delta u = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = f, \qquad (1)$$

$$u = u(x, y);\ 0 \leqslant x \leqslant L,\ 0 \leqslant y \leqslant W \qquad (2)$$

методом конечных разностей. Предполагается, что заданная функция $f$ дважды непрерывно диффегенцируема на каждой стороне прямоугольника (2). Уравнение Лапласа аппроксимируется на сетке простейшим способом (5 точек), граничные условия аппроксимируются так:

$$\frac{u(x, h) - u(x, -h)}{2h} = f^*, \quad 0 \leqslant x \leqslant L,$$

и т. д., где $f^* = f - C_0$, постоянная $C_0$ подбирается так, чтобы обеспечить выполнение условия разрешимости задачи Неймана для разностного уравнения: $\sum f^* = 0$ (сумма по граничным точкам сетки). Тогда разность между решениями дифференциального и разностного уравнений не превосходит $C_1 h^2 \mid \ln h \mid$, где $h$ — шаг сетки, $C_1$ — постоянная, оцениваемая через $L$, $W$ и максимумы модулей производных (до 2-го порядка) от заданной функции $f$. А. Ф. Филиппов

**4581. Неявные методы переменных направлений. Биркгоф, Варга** (Implicit alternating direction methods. Birkhoff Garrett, Varga Richard S.), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **92**, № 1, 13—24 (англ.)

В работе (РЖМат, 1959, 3239) исследована сходимость и устойчивость итерационного метода „переменных направлений"

$$\Delta_x^2 u_{i,j}^{(2n+1)} + \Delta_y^2 u_{i,j}^{(2n)} = 0,$$

$$\Delta_x^2 u_{i,j}^{(2n+1)} + \Delta_y^2 u_{i,j}^{(2n+2)} = 0,$$

$$(\Delta_x^2 u_{i,j} = u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j},$$

$$\Delta_y^2 u_{i,j} = u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1})$$

или короче:

$$Au^{(2n+1)} + Bu^{(2n)} = 0,$$

$$Au^{(2n+1)} + Bu^{(2n+2)} = 0$$

для решения системы разностных гармонических уравнений

$$\Delta_x^2 u_{i,j} + \Delta_y^2 u_{i,j} = 0.$$

При этом существенно использована коммутативность матриц $A$ и $B$.

В данной работе авторы для более общего дифференциального уравнения $\nabla^2 U + aU = f$ доказывают, что коммутативность соответствующих матриц метода „переменных направлений" (рассмотрены три его модификации), за исключением случая $a = \text{const}$ и прямоугольной области, не имеет места. В. К. Саульев

**4582. О сходимости некоторых разностных схем для уравнения теплопроводности. Юань Чжао-дин,** Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физ., химии, 1958, № 2, 9—14

Краевой задачи

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad U(0, x) = f(x), \quad U(t, 0) = U(t, 1) = 0 \qquad (1)$$

сопоставляются два хорошо известных разностных уравнения:

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{l} = \frac{u_{i-1,k} - 2u_{i,k} + u_{i+1,k}}{h^2}, \qquad (2)$$

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k-1}}{2l} = \frac{u_{i-1,k} - 2u_{i,k} + u_{i+1,k}}{h^2} \qquad (3)$$

и показывается, что если начальную функцию $f(x)$ выбрать некоторым специальным образом, то решение системы разностных уравнений (2) при $h \to 0$ будет сходиться к решению задачи (1), если $h = rl$, $r = \text{const}$. Аналогичная сходимость имеет место в случае (3), если задать специальным образом значения $u_{i,k}$ на первых двух слоях, т. е. при $k = 0$ и $k = 1$. В. К. Саульев

**4583. Применение анализа устойчивости при численном решении квазилинейных параболических дифференциальных уравнений. Дуглас** (The application of stability analysis in the numerical solution of quasi-linear parabolic differential equations. Douglas Jim, Jr), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, **89**, № 2, 484—518 (англ.)

Основываясь на идеях, развитых ранее (РЖМат, 1957, 4379; 1958, 7187), и используя принцип минимакса Куранта для оценки собственных значений, автор подробно исследовал сходимость и устойчивость неявных (в частности, уравнения Кранка — Николсона и уравнений повышенной точности) разностных уравнений, соответствующих квазилинейному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x, t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x, t, u) = r(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (1)$$

Рассмотрено неявное разностное уравнение, аппроксимирующее уравнение (1), которое требует на каждом слое решения системы линейных алгебраических уравнений. Результаты обобщаются на многомерный случай.

В. К. Саульев

**4584. Приближенное решение задачи Коши гиперболического уравнения 2-го порядка. Артемов Г. А.,** Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 4, 16—20

Показывается, что построенные С. Н. Слугиным (РЖМат, 1957, 8253) двусторонние приближения к решению операторного уравнения вида $x = V(x)$ применимы к решению задачи Коши для уравнений в частных производных 2-го порядка гиперболического типа.

Пусть требуется найти решение $u(x_1, x_2)$ уравнения $u^{(1,2)} = f(x_1, x_2, u, u^{(1)}, u^{(2)}) \equiv f[u]$, где

$$u^{(1)} = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad u^{(2)} = \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad u^{(1,2)} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$$

в прямоугольнике $R$:

$$0 \leqslant x_1^0 \leqslant x_1 \leqslant x_1^0 + \alpha, \quad 0 \leqslant x_2^0 \leqslant x_2 \leqslant x_2^0 + \beta$$

при начальном условии $u(x_1^0, x_2) = u(x_1, x_2^0) = 0$. Последовательные приближения к решению указанной задачи определяются формулой

$$u_{n+1}(x_1, x_2) = u_n(x_1, x_2) - \int_{x_1^0}^{x_1}\int_{x_2^0}^{x_2} g(x_1, x_2, \xi, \eta) \times$$

$$\times [u_n^{(1,2)}(\xi, \eta) - f[u_n]]\, d\xi\, d\eta,$$

где $g(x_1, x_2, \xi, \eta)$ — соответствующая функция Римана, причем для осуществления процесса достаточно знать одну из начальных функций $u_0(x_1, x_2)$ или $\overline{u}_0(x_1, x_2)$.

В качестве примера решено уравнение

$$u^{(1,2)} = -\frac{u^{(1)} u^{(2)}}{100^2} + \frac{u^2}{2 \cdot 100^2} + 10{,}75$$

при условии $u(0, x_2) = u(x_1, 0) = 0$.

Отмечается, что изложенное построение применимо для решения нехарактеристической задачи Коши при обычных предположениях относительно кривой, на которой заданы начальные условия. И. Ф. Шелихова

**4585. О точности неявных разностных аппроксимаций уравнения теплопроводности. Вазов** (On the accuracy of implicit difference approximations to the equation of heat flow. Wasow Wolfgang), Math. Tables and Other Aids Comput., 1958, **12**, № 61, 43—55 (англ.)

Для системы разностных уравнений

$$\frac{u_{i,k+1}-u_{i,k}}{l}=s\frac{u_{i-1,k+1}-2u_{i,k+1}+u_{i+1,k+1}}{h^2}+$$

$$+(1-s)\frac{u_{i-1,k}-2u_{i,k}+u_{i+1,k}}{h^2}, \qquad (1)$$

соответствующей простейшей краевой задаче для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\ U(x,0)=f(x),\ U(0,)=u(\pi,t)=0, \qquad (2)$$

доказано следующее.

1) Если коэффициенты Фурье $b_k$ в разложении $f(x)$ по синусам удовлетворяют соотношению $\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|<\infty$, если $h$ и $l$ стремятся к нулю так, что $2(1-2s)l-h^2\leqslant 0$, то

$$\lim_{h,l\to 0} u(x,t)=U(x,t),$$

где $U(x,t)$ — решение задачи (2), а $u(x,t)$ — решение системы (1).

2) Пусть $^1/_2\leqslant s<1$, $h/l\geqslant p>0$, $l\leqslant t\leqslant T$, $h\leqslant h_1<p/2$ и $f(x)$ обладает абсолютно интегрируемой ограниченной третьей производной и $f(0)=f(\pi)=0$. Тогда $|U(x,t)-u(x,t)|\leqslant ct^{-1}(h^2+l^2)$, где $\alpha=1$ для $s\neq{}^1/_2$ и $\alpha=2$ для $s={}^1/_2$, $c=M\sup(|f''|+|f'''|)$, $M$ — постоянная, зависящая только от $s$, $p$ и $T$.

3) Если $f(0)=f(\pi)=0$ и $|f|\leqslant\overline{f}$ в $0\leqslant x\leqslant\pi$ и если $2(1-2s)l-h^2\leqslant 0$ $(0\leqslant s\leqslant 1)$, то $|u_{i,k}|\leqslant C\overline{f}\ln 1/h$ $(0<i<\pi/h,\ 0<k)$, постоянная $C$ зависит только от $h_1$.

В. К. Саульев

**4586. Критерии устойчивости для разностных схем. Хан** (Stability criteria for difference schemes. Hahn Susan G.), Communs Pure and Appl. Math., 1958, **11**, № 2, 243—255 (англ.)

Рассматривается гиперболическая система (в векторной записи)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{k=1}^{l}A_k\frac{\partial u}{\partial x_k}, \qquad (1)$$

где $x=(x_1,\ldots,x_l)$, $u=(u_1,\ldots,u_p)$; $A_k$ — симметрические матрицы, и система разностных уравнений

$$u(x,t+\Delta t)=\sum_{j=1}^{m}C_j u(x+\Delta t r_j,\ t), \qquad (2)$$

где $r_j=(r_{j1},\ldots,r_{jl})$ — векторы, $C_j$ — симметрические матрицы (не зависящие от $\Delta t$). Система (2) аппроксимирует систему (1), если

$$\sum_j C_j=I,\quad \sum_j C_j r_{jk}=A_k\quad (k=1,\ldots,l),$$

где $I$ — единичная матрица.

Показывается, что в случае, когда $m=l+1$ и векторы $r_1,\ldots,r_m$ не лежат ни в какой $(l-1)$-мерной гиперплоскости, следующие три критерия равносильны: 1) необходимый критерий Неймана устойчивости разностного уравнения (2) (собственные значения матрицы $\sum_j C_j e^{ir_j z}$ по модулю не превосходят 1 при любом вещественном векторе $z$); 2) критерий Фридрихса, достаточный для устойчивости уравнения (2), когда его коэффициенты удовлетворяют условию Липшица по $x$ (матрицы $C_j$ неотрицательны, т. е. все их собственные значения неотрицательны); 3) критерий Куранта, Фридрихса, Леви, необходимый для сходимости решения разностного уравнения к решению дифференциального при $\Delta t\to 0$ (область зависимости для дифференциального уравнения содержится в выпуклой оболочке области зависимости для разностного уравнения).

На частном примере показывается, что в случае $m>l+1$ эти критерии уже не равносильны.

А. Ф. Филиппов

**4587. Изгиб однородно нагруженных закрепленных ромбообразных плоских плит. Хасэгава Ока** (On the deflections of uniformly loaded clamped rhombic flat plates. Hasegawa Misao, Oka Masami), Симанэ дайгаку ронсю (сидзэн кагаку), Bull. Shimane Univ. (Natur. Sci.), 1958, № 8, 13—16 (англ.)

Математическое исследование поставленной задачи приводит к решению следующего уравнения:

$$\frac{D}{\sin^3\alpha}\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-4\cos\alpha\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial y}+2(1+2\cos^2\alpha)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}-\right.$$

$$\left.-4\cos\alpha\frac{\partial^4 w}{\partial x\partial y^3}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right]=p, \qquad (1)$$

с граничными условиями

$$w=0,\ \frac{\partial w}{\partial n}=0, \qquad (2)$$

где $w$ — вертикальная компонента точек средней плоскости плит, $D$, $p$, $\alpha$ — определенные постоянные, зависящие от материала, геометрии плит и от нагрузки. Задача (1) — (2) решается методом Ритца для следующих углов между сторонами ромба: 45°, 55°, 60°, 70°, 75°, 90°.

М. А. Алексидзе

**4588. Об одном приближенном способе расчета гибких прямоугольных пластин. Алфутов Н. А.**, Научн. докл. высш. школы. Машиностр. и приборостр., 1959, № 1, 73—77

Излагается простой способ решения задачи об изгибе пластин с неподвижно закрепленными кромками, позволяющий по функции нормального прогиба, которая подбирается экспериментально (по крайней мере в первом приближении), приближенно определять две другие функции перемещений, экспериментальное определение которых затруднительно; при этом полученное решение удовлетворяет заданным граничным условиям геометрически. Изгиб пластинки с неподвижно закрепленными (шарнирно опертыми или защемленными) краями под действием поперечной нагрузки и при заданных граничных условиях описывается системой трех нелинейных уравнений в перемещениях. Задаваясь функцией нормального прогиба, решают с учетом граничных условий систему из двух упрощенных уравнений, полученных при некоторых дополнительных предположениях относительно размеров пластинки. Дальнейшее решение, состоящее в том, что найденные из упрощенной системы функции подставляют в третье уравнение системы нелинейных уравнений и интегрируют его по методу Бубнова—Галёркина, дается в трех вариантах. В качестве примера по изложенной схеме решается задача для шарнирно опертой прямоугольной пластины. Проводится сравнение с решением, полученным другим методом.

И. Ф. Шелихова

**4589. Об одном разностном способе исследования устойчивости и колебаний пластин. Фельдман М. Р.**, Айкакан ССР Гитутюннери Академиан тегекагир. Физико-математикакан гитутюннери серия, Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. н., 1959, **12**, № 3, 15—27 (рез. арм.)

В настоящей работе применен синтез методов конечных разностей и Бубнова — Галеркина для решения задач, связанных с исследованием прочности, устойчивости и колебаний пластин и оболочек, что позволяет сравнительно просто и с достаточной для практики точностью решать широкий класс задач, представляющих практический интерес. Описание метода дается на примере решения дифференциального уравнения $m$-го порядка. Для иллюстрации метода и получения представления о достигаемой степени точности рассмотрены задача о колебании и устойчивости свободно опертой квадратной пластины, а также задача об устойчивости прямоугольной пластины со ступенчатым изменением толщины сжатой ступенчатой нагрузкой. Приведены числовые примеры. И. Ф. Шелихова

**4590. Упрощенный способ интегрирования уравнения вихря в прогностических целях. Машкович С. А.,** Тр. Центр. ин-та прогнозов, 1959, вып. 86, 42—48

Численно решается определенное на поверхности сферы нелинейное уравнение

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} = -(\psi, \Delta\psi) - 2\omega \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} - \nu \Delta\psi, \qquad (1)$$

где $\psi$ — искомая функция, заданная при $t = 0$; независимые переменные — время $t$ и сферические координаты $\theta$ и $\lambda$; $\Delta$ — оператор Лапласа в переменных $\theta$ и $\lambda$; $(\psi, \Delta\psi)$ — якобиан между $\psi$ и $\Delta\psi$ по этим же переменным; $\omega$ и $\nu$ — постоянные. Требуется определить $\psi$ для $t > 0$ (дать прогноз $\psi$). Предлагается приближенное решение (1). Для этого уравнение (1) переписывается в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{f}\left[(\psi, B) + 2\omega \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \nu \Delta\psi + \frac{\partial B}{\partial t}\right] \equiv F, \qquad (2)$$

где $B = \Delta\psi + f\psi$, $f$ — постоянная. Здесь далее производная $\partial\psi/\partial t$ заменяется односторонней разностью $(\psi^{(k+1)\Delta t} - \psi^{k\Delta t})/\Delta t$, а правая часть (за исключением слагаемого $\partial B/\partial t$) записывается для момента $t = k\Delta t$, причем производные по $\theta$ и $\lambda$ заменяются соответствующими центральными разностями. Производная $\partial B/\partial t$ приближенно аппроксимируется односторонней разностью, относящейся к моментам $k\Delta t$ и $(k-1)\Delta t$: $(B^{k\Delta t} - B^{(k-1)\Delta t})/\Delta t$. При $k = 0$ эта разность может быть задана (в частности, принята равной нулю). Уравнение (2) интегрируется последовательными „шагами" по времени (метод Эйлера):

$$\varphi^{(k+1)\Delta t} = \psi^{k\Delta t} + \Delta t \cdot F^{k\Delta t}.$$

Использование (2) вместо (1) избавляет от необходимости на каждом шаге для определения $\partial\psi/\partial t$ решать уравнение Пуассона.

Далее проводится оценка погрешностей, возникающих как от использования принятого здесь упрощения, так и от замены дифференциального уравнения разностным. Для этого сопоставляется известное для одного частного случая начальных условий точное решение уравнения (1) с тем, что дает для этого же случая предполагаемое здесь численное решение, которое также может быть получено в аналитическом виде точно (сопоставление точных решений дифференциального и разностного уравнений). Приводится оценка погрешностей решения разностного уравнения при прогнозе на ограниченный срок (порядка одних суток) в зависимости от принятого шага $\Delta t$ и от характерного размера волн в начальном распределении функции $\psi$. Приводятся данные об успешности прогнозов на 24 и 48 час. по предлагаемой методике для нескольких реальных случаев. Расчеты проводились на БЭСМ. С. Л. Белоусов

**4591. Численное интегрирование системы первоначальных уравнений для бароклинной атмосферы в ограниченной области. Смагоринский** (On the numerical integration of the primitive equations of motion for baroclinic flow in a closed region. Smagorinsky J.), Monthly Weather Rev., 1958, 86, № 12, 457—466 (англ.).

Предлагается методика численного интегрирования системы уравнений гидродинамики для сжимаемой бароклинной жидкости на вращающейся Земле (уравнения движения Эйлера, уравнение неразрывности и уравнение притока энергии). Задача решается в сферических координатах для области, ограниченной двумя кругами широты, на которых задаются краевые условия. Используемая при численном решении сетка точек содержит два слоя по высоте. В них заданы начальные условия и в них же получается решение (двухуровенная модель атмосферы, в которой система уравнений для пространственной задачи заменяется системой из „плоских" уравнений, записанных для каждого из двух уровней).

Для системы уравнений гиперболического типа получается смешанная задача. Исследуются условия устойчивости численного решения. Возможная неустойчивость решения, связанная с тем, что уравнения, наряду с метеорологически значимыми явлениями, описывают также и мелкомасштабные процессы, прогноз которых требует недоступно детального задания начальных и краевых условий, устраняется специальным „отфильтровыванием" метеорологических шумов". Для этого накладываются на решение дополнительные условия (требование равенства нулю дивергенции осредненного по высоте движения). Кроме этой „физической" неустойчивости, может иметь место и „математическая" неустойчивость. Для ее устранения необходим соответствующий выбор соотношения разностных интервалов по времени и по координатам (известный критерий Куранта — Фридрихса — Леви), а также, как показано в реферируемой работе, необходима постановка некоторого дополнительного „вычислительного" краевого условия. Это условие непосредственно не следует из физической постановки задачи, а зависит от способа разностной аппроксимации дифференциальных уравнений. Необходимость постановки такого условия иллюстрируется на примере линеаризированной системы уравнений:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\gamma^2 \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = fv,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -fu - m^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$v = 0$ при $y = 0$ и $y = Y$; при $t = 0$ $u, v, \varphi$ заданы ($u, v$, $\varphi$ — искомые функции, $\gamma^2, f, m^2$ — постоянные). Если при переходе к разностным уравнениям заменить здесь производные центрированными разностями и далее из этих разностных уравнений построить одно разностное уравнение (исключив все функции, кроме $v$), то это уравнение будет связывать значения $v$ лишь в точках с номерами одинаковой четности. Вследствие этого два решения в точках с различной четностью оказываются несвязанными. Показано, что данный дефект устраняется, если на границе области поставить дополнительное условие для $\partial v/\partial y$, причем эта производная должна быть здесь аппроксимирована с помощью односторонних разностей. Это и будет достаточное условие „связанности" решений в двух вложенных системах точек. Оно получается из условия совпадения некоторых интегральных характеристик решений дифференциальных и соответствующих разностных уравнений.

Проводится обобщение этих результатов для нелинейных уравнений. Описана методика численного решения задачи, позволившая обеспечить устойчивость решения при прогнозе на срок до 50 дней. С. Л. Белоусов

**4592. Численные методы расчета высоты ветрового подпора уровня воды и приливов в мелководных морях. Фишер** (Ein numerisches Verfahren zur Errechnung von Windstau und Gezeiten in Randmeeren. Fischer Günter), Tellus, 1959, **11**, № 1, 60—76 (нем.; рез. англ.)

В плоской области с границей, повторяющей контуры Немецкого моря, решается система уравнений:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -gh\frac{\partial \zeta}{\partial x} + fV - rU + \tau_x, \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -gh\frac{\partial \zeta}{\partial y} - fU - rV + \tau_y, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) \quad (3)$$

Здесь искомыми функциями являются осредненные по глубине моря компоненты скорости $U$ и $V$, а также превышение уровня воды над равновесным состоянием $\zeta$. Независимые переменные — $x, y, t$; параметры $g, f$ и $r$ — положительные постоянные; $h(x, y)$ — глубина моря — заданная функция координат; $\tau_x(x, y)$ и $\tau_y(x, y)$ — заданные компоненты внешних сил (движущая сила ветра). Ставятся краевые условия: у берега нормальная составляющая скорости равна нулю; на открытой части бассейна заданы $\zeta$ или $U$ и $V$. Для численного решения задачи граница области интегрирования аппроксимируется ломаной линией и вводится квадратная сетка точек. Уравнения (1) — (3) заменяются соответствующими разностными уравнениями. При этом по $x$ и $y$ используются центрированные разности с шагом $2\Delta s$, а по $t$ — односторонние с шагом $\Delta t$, причем правые части (1) и (2) берутся в предыдущий момент $t$, а правая часть (3) — в последующий.

Проведено исследование устойчивости решения полученной системы разностных уравнений. Исследование проведено при $\tau_x = \tau_y = 0$, $h = \text{const}$ и для неограниченной области. В этом случае вектор, составленный из значений $U, V, \zeta$, в момент $t = n\Delta t$, получается из соответствующего вектора для $t = 0$ умножением на некоторую матрицу $G$ в степени $n$. Для устойчивости решения необходимо, чтобы $G^n$ было ограничено. Это условие может быть заменено условием, налагаемым на максимальное собственное значение $\lambda_{\max}$ матрицы $G$. Если задача ставится так, что необходимо дать прогноз $U, V, \zeta$ на некоторый ограниченный срок $t_0$, который подразделен на $n$ шагов $t_0 = n\Delta t$, то указанное условие имеет вид: $|\lambda_{\max}| \leqslant 1 + c\Delta t$, где $c$ — постоянная (Условие „математической" устойчивости решения). При $\Delta t \to 0$ ($n \to \infty$) решение разностного уравнения стремится к решению дифференциального уравнения. Если прогноз дается на неограниченный срок $t$, а интервал $\Delta t$ фиксирован, то решение устойчиво, если $|\lambda_{\max}| \leqslant 1$ („счетная" устойчивость решения). Определяя $\lambda_{\max}$, автор находит, что условие математической устойчивости в данной задаче приводит к известному критерию Куранта — Фридрихса — Леви для волнового уравнения $\sqrt{gh}\,\Delta t < \sqrt{2}\,\Delta s$.

Для вычислительной устойчивости необходимо, чтобы $\Delta t < r/f^2$. Если при разностной аппроксимации уравнения (3) значения правой части брать в предыдущий момент $t$, то условие математической устойчивости не будет выполнено ни при каком соотношении $\Delta t$ и $\Delta s$.

Приведенные критерии получены для однородных уравнений с постоянными коэффициентами и для неограниченной области. Поэтому в реальном случае решение может оказаться неустойчивым и при выполнении указанных критериев. Поэтому изыскиваются способы повышения устойчивости решения. В частности, показано, что $\lambda_{\max}$ может быть уменьшено, а следовательно, устойчивость решения может быть повышена, если на каждом шаге по времени ввести операцию „сглаживания" величин $U, V$ и $\zeta$ по формуле вида

$$U^{(t)}(x, y)_{\text{сгл}} = \alpha U^{(t)}(x, y) + \frac{1-\alpha}{4}[U^{(t)}(x+\Delta x, y) + U^{(t)}(x-\Delta x, y) + U^{(t)}(x, y+\Delta y) + U^{(t)}(x, y-\Delta y)].$$

Эта операция приводит к тому, что собственные значения новой матрицы $G$ отличаются от прежних множителем

$$\mu = \alpha + \frac{1-\alpha}{2}\{\cos k_1\Delta x + \cos k_2\Delta y\} < 1,$$

где $k_1$ и $k_2$ — волновые числа. Существенно то, что при $\Delta s \to 0$ сглаживание исчезает, так что введение этой операции, не вытекающей из постановки задачи, не препятствует стремлению разностного решения к точному при $\Delta s \to 0$.

Полученные результаты автор проверяет с помощью численных экспериментов. Для этого производится численное решение задачи в реальной ограниченной сетке точек и с реальными значениями параметров. Выясняется, что при $\alpha = 1$ (отсутствие сглаживания) решение неограниченно растет со временем (неустойчиво). При $\alpha = 1$ и при $\alpha = 7/8$ для $t \to \infty$ решения практически совпадают. Проверяется также зависимость решения от выбора интервалов $\Delta s$ и $\Delta t$. Качество получаемых разностных решений с различными $\alpha$, $\Delta s$ и $\Delta t$ изучается путем сопоставления этих решений с точным решением дифференциальных уравнений, полученным для одного специального случая. Даны результаты реальных расчетов высот ветрового подпора воды и распространения приливной волны в Немецком море. Выясняется, что качество решения (в смысле близости его к наблюдаемой картине) существенно зависит от точности аппроксимации береговой линии с помощью ломаной. Все расчеты проводились на машине БЕСК (BESK) в Стокгольме.

С. Л. Белоусов

**4593. Сходимость метода последовательных приближений в одной задаче нелинейной теории оболочек. Терегулов И. Г.**, Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 4, 168—177

Задача об изгибе полого сферического сегмента решается методом последозательных приближений. Для системы двух нелинейных уравнений, к которым приводит задача, доказываются существование решения и сходимость метода последовательных приближений. Система дифференциальных уравнений сводится к системе интегральных уравнений, при исследовании которой применены методы функционального анализа. Выводятся формулы оценки погрешности $n$-го приближения.

И. Ф. Шелихова

**4594. К приближенному решению интегральных уравнений Фредгольма. Гребенюк Д. Г.**, УзССР Фанлар Акад. ахбороти. Физ.-матем. фанлари сер., Изв. АН УзССР. Сер. физ.-матем. н., 1959, № 1, 63—68 (рез. узб.)

Рассматривается неоднородное интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds + f(x), \quad (1)$$

где ядро $K(x, s)$ и $f(x)$ считаются непрерывными соответственно в квадрате $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant s \leqslant b$ и на отрезке $[a, b]$. В работе автора (РЖМат, 1956, 40[3]) к решению уравнения (1) применялась теория Бернштейна наилучшего приближения функции через полиномы. Применение этого метода на практике затрудняется из-за определения множителей при неопределенных параметрах в обобщенном полиноме наилучшего приближения. В данной работе применяется метод Шнирельмана равномерных приближений и упомянутая трудность устраняется

тем, что в методе Шнирельмана указанные выше множители не обязательно должны образовывать на отрезке $[a, b]$ систему Чебышева. Приводятся числовые примеры. М. А. Алексидзе

**4595. Численное решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода.** Апаро (Sulla risoluzione numerica delle equazioni integrali di Volterra di seconda specie. Aparo Enzo), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1959, **26**, № 2, 183—188 (итал.)

Описывается метод численного решения уравнения Вольтерра

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{x_0}^{x} g[x, s, \varphi(s)]\, ds. \qquad (1)$$

Функции $f(x)$ и $g(x, s, t)$ соответственно в областях $x_0 \leqslant x \leqslant b$ и $x_0 \leqslant s \leqslant x \leqslant b$, $|t - f(x_0)| \leqslant c$ предполагаются непрерывными вместе со своими производными до четвертого порядка. Пусть $2n$ $(n \geqslant 2)$ значений $\varphi_i = \varphi(x_0 + ih)$ известны. Тогда, представив (1) в виде

$$\varphi(x) = f_{2n-2}(x) + \int_{x_{2n-2}}^{x} g[x, s, \varphi(s)]\, ds, \qquad (2)$$

$(f_{2n-2}(x) = f(x) + \int_{x_0}^{x_{2n-2}} g[x, s, \varphi(s)]\, ds$ вычисляется заменой интеграла приближенным выражением по формуле Симпсона $\varphi_{2n+1}$ и $\varphi_{2n+2}$ сначала находятся по „формулам предсказания" путем замены интеграла в (2) квадратурными суммами с двумя и тремя узлами, которые не включают значения функции $g(x, s, t)$ при $t$ равным $\varphi_{2n+1}$ и $\varphi_{2n+2}$, потом уточняются посредством замены этого интеграла квадратурными формулами с четырьмя и пятью узлами, включая „предсказанные" $\varphi_{2n+1}$ и $\varphi_{2n+2}$ соответственно. Подобно методу Рунге—Кутта, для $\varphi(x_0 + h)$ дается разложение по степеням $h$, которое может служить для вычисления первоначальных значений $\varphi(x)$. Когда $\varphi_1$ и $\varphi_2$ найдены, $\varphi_3$ и $\varphi_4$ вычисляются подобно вышеизложенному. Метод иллюстрируется примером. Л. А. Янович

**4596. О гауссовом методе наименьших квадратов.** Альтман (Über die Gaussche Methode der kleinsten Quadrate. Altman M.), Math. Nachr., 1958, **17**, № 1-2, 9—15 (нем.)

Устанавливается прямая связь широко известной геометрической интерпретации способа наименьших квадратов с классическим гауссовским методом решения систем линейных уравнений. Кроме того, для способа наименьших квадратов описывается получаемый из уравнений ошибок и имеющий простой геометрический смысл процесс последовательных приближений.

О. В. Шалаевский

**4597. Метод Ньютона и приближенное решение линейных систем алгебраических уравнений.** Бела (Metoda lui Newton şi rezolvarea aproximativă a sistemelor de ecuaţii algebrice liniare. Béla Jankó), Studii şi cercetări mat. Acad. RPR Fil. Cluj, 1957, **8**, № 1-2, 103—114 (рум.; рез. русск., франц.)

Решение линейной системы

$$Ax = b \qquad (1)$$

заменяется решением эквивалентной ей нелинейной системы

$$f^{(i)}(x_i; A_i) = \varphi(x_i)(x_i + A_i) = 0 \qquad (2)$$

или системы

$$F^{(i)}(x_1, x_2, \ldots, x_i, B_i) = \psi(x_i)(a_{i1}x_1 + \ldots + x_i + B_i) = 0, \qquad (3)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad A_i = \sum_k{}' a_{ik}x_k - b_i,$$

$$B_i = \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}x_k - b_i,$$

$\varphi$ и $\psi$ — функции простой структуры, не имеющие вещественных корней на конечном расстоянии. Для решения нелинейной системы применяется видоизмененный метод Ньютона. Выводятся условия, при которых производная оператора была бы легко обратимой матрицей, например, диагональной или треугольной. Так, системы (2) и (3) заменяются соответственно системами

$$P^{(i)}(x_i; A_i) \equiv \Phi(A_i; C_i) f^{(i)}(x_i, A_i) = 0,$$

$$p^{(i)}(x_1, x_2, \ldots, x_i; B_i) = \Psi(B_i, k_i) F^{(i)}(x_1, x_2, \ldots, x_i; B_i) = 0$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$, где функции $\Phi$ и $\Psi$ простой структуры, не имеющие конечных вещественных корней. Коэффициенты $c_i$ и $k_i$ выбираются соответственно так, чтобы $\left(\frac{\partial P^{(i)}}{\partial A_i}\right)_0 = 0$ — условие диагональности матрицы $P'(x_0)$; $\left(\frac{\partial P^{(i)}}{\partial B_i}\right)_0 = 0$ — условие, чтобы $P'(x_0)$ была треугольной. Сходимость методов следует из теорем Канторовича. Приводится пример, иллюстрирующий метод. В. Н. Кубановская

**4598. К расчету статически неопределимых систем. Об одном способе определения лишних неизвестных.** Чирков Я. Н., Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1958 (1959), № 197, 68—72

Для решения 3-, 5- и 7-членных систем линейных алгебраических уравнений часто используют так называемый метод поправок: решение представляется в виде суммы общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы. Автор предлагает при отыскании решений однородной системы задаваться малыми исходными значениями первых неизвестных, а при отыскании частного решения неоднородной системы задаваться значениями, по возможности близкими к искомым. В качестве иллюстрации приведен числовой пример решения системы пятичленных уравнений. В. К. Саульев

**4599. Релаксационные методы для линейных уравнений.** Шектер (Relaxation methods for linear equations. Schechter Samuel), Communs Pure and Appl. Math., 1959, **12**, № 2, 313—335 (англ.)

Островский (Ostrowski A. M., Rend. mat. appl., 1954, **14**, 140—163) для решения систем линейных алгебраических уравнений исследовал специальный итерационный метод — метод нижней и верхней релаксации. Автор обобщает результаты Островского, рассматривая групповые релаксационные методы. В. К. Саульев

**4600. Итеративное решение систем большого числа линейных уравнений.** Ланцош (Iterative solution of large-scale linear systems. Lanczos C.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1958, **6**, № 1, 91—109 (англ.)

Система линейных алгебраических уравнений

$$Ay = b, \qquad (1)$$

где $A$ — симметричная положительно определенная матрица, преобразуется путем деления обеих частей на некоторый численный множитель к виду

$$A_0 y = b_0, \qquad (2)$$

так, чтобы наибольшее собственное число $A_0$ было $< 1$ и близко к 1.

Для решения системы (2) применяется алгорифм, основанный на приближении функции $1/x$ в промежутке $(0, 1]$ полиномом. (Эта идея, по-видимому, впервые высказана референтом: Успехи матем. наук, 1950, **5**, № 3, 156—160). Путем некоторого преобразования полиномов Чебышева строятся полиномы $p_m(x)$, определяемые ре-

куррентным соотношением $p_{m+1}(x) = 2(1-2x)\,p_m(x) - p_{m-1}(x) + 4(m+2)^2$ и значениями $p_0(x) = 4$, $p_1(x) = 24 - 16x$. Для

$$2{,}56^2\,(m+2)^{-2} \leqslant x \leqslant 1 \qquad (3)$$

справедливо неравенство

$$\left| \frac{p_m(x)}{(m+2)^2} - \frac{1}{x} \right| < 0{,}05\,\frac{1}{x}\,.$$

Поэтому, если собственные числа $A_0$ лежат в промежутке (3), то разность между $\tilde{y} = (m+2)^{-2}\,p_m(A_0)b_0$ и решением $y$ уравнения (2) не превосходит по норме 5% от нормы $y$.

Рекомендуется провести указанную процедуру при $m = 25$ и вычислить невязку $r_1 = b_0 - A_0\tilde{y}$. В случае необходимости делается второй шаг итерации, т. е. решается аналогичная система для поправок. Если недостаточно трех шагов, за решение принимается линейная комбинация трех последовательных приближений, находимая методом наименьших квадратов.

Число $m$ выбирается равным 25 с тем, чтобы при отношении $\lambda_n/\lambda_1$ наибольшего собственного числа матрицы $A$ к наименьшему, не превосходящему 100, относительная погрешность приближенного равенства $\tilde{y} = y$ была не больше 5%.

Указывается видоизменение метода, делающее его пригодным для произвольных матриц $A$. М. К. Гавурин

**4601. Определение унитарных вращений плоскости, преобразующих общую матрицу к треугольному виду. Гивенс** (Computation of plane unitary rotations transforming a general matrix to triangular form. Givens Wallace), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1958, 6, № 1, 26—50 (англ.)

Рассматривается задача определения собственных чисел и векторов произвольной квадратной матрицы. Предлагаемый метод является обобщением методов, ранее предложенных автором (РЖМат, 1959, 2014).

Произвольная квадратная матрица $A$ с помощью цепочки унитарных вращений $R_{23}R_{24}\ldots R_{2n}R_{34}\ldots R_{n-1\,n} = R$ приводится к форме

$$S = \begin{pmatrix} * & * & \ldots & * & * \\ r_1 & * & \ldots & * & * \\ 0 & r_2 & \ldots & * & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & r_{n-1} & * \end{pmatrix}.$$

К матрице $S - \lambda E$ применяются унитарные вращения плоскостей, переводящие ее в эквивалентную $\lambda$-матрицу

$$S_\lambda^{(1)} = \begin{pmatrix} * & * & \ldots & * & a \\ \rho_1 & * & \ldots & * & 0 \\ 0 & \rho_2 & \ldots & * & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \rho_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

для которой характеристический полином легко вычисляется. При этом особо рассматривается случай, когда среди чисел $r_i$ есть нули.

Для определения собственных векторов от матрицы $S_\lambda^{(1)}$ осуществляется переход к матрице $T_\lambda = R'(S - \lambda E)R$. Приводятся рекуррентные формулы, позволяющие вычислять компоненты собственных векторов $A$.

Для работы в режиме с фиксированной запятой указывается нормировка матрицы, и даются рекомендации по выбору масштабных множителей. Приводится подсчет необходимого числа операций в зависимости от порядка матрицы $n$. В. Н. Кублановская

**4602. Диагонализация эрмитовых матриц. Фрёберг** (Diagonalization of Hermitian matrices. Fröberg Carl-Erik), Math. Tables and Other Aids Comput., 1958, 12 № 63, 219—220 (англ.)

Описывается техника диагонализации эрмитовых матриц методом Якоби, заключающемся в повторяющихся двумерных вращениях. Эта техника была испробована для $n \leqslant 15$ на электронной машине СМТЛ (SMTL) Лундского университета. М. К. Гавурин

**4603. О численном определении комплексных собственных чисел и форм действительной матрицы на электронно-счетной машине. Минаев А. Ф., Кадыров Х.**, УзССР Фанлар Акад. ахбороти, Изв. АН УзССР, Сер. физ.-матем. н., 1959, № 3, 23—34 (рез. узб.)

Показывается на примере системы материальных точек с голономными стационарными связями, что при значительном числе степеней свободы решение системы уравнений описывающих движение, требует очень сложных вычислений, затрудняющих отыскание решений. Для случая, когда требуется знать лишь небольшое число первых частот и форм колебаний, методом итераций определяется с применением матриц несколько первых собственных частот и соответствующих им собственных форм колебаний линейной упругой системы со многими степенями свободы. При этом для определения собственных значений используется свойство ортогональности собственных векторов матрицы $A$ к собственным векторам транспонированной матрицы. Далее показано, что уравнения движения упругой линейной системы можно получить и с помощью коэффициентов влияния. Приводится блок-схема программы вычисления частот и коэффициентов затухания по описанному методу на БЭСМ (для матрицы 26-го порядка). Программа составлена с применением только оперативной памяти, что позволяет максимально сократить машинное время и повысить надежность вычислений.

И. Ф. Шелихова

**4604. Замечание об определении высших собственных значений матриц методом итераций или методом Стодола. Феттис** (Note on the determination of higher modes of vibration by the Stodola or matrix-iteration method. Fettis Henry E.), J. Aero/Space Sci., 1959, 26, № 5, 317—318 (англ.)

Пусть $y_1, \ldots, y_k$ — полная система собственных векторов данной матрицы $A$, соответствующая собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, а $y = \sum_{k=1}^{n} a_k y_k$ — произвольный начальный вектор. Тогда, очевидно, $y^{(1)} = Ay = \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda_k y_k$. Если точное значение $\lambda_1$ известно, то итерация вектора $z = \lambda_1 y - y^{(1)} = \lambda_1 y - Ay \equiv By = \sum_{k=2}^{n} a_k(\lambda_1 - \lambda_k)\,y_k$ определит $\lambda_2$. Если, как это часто случается на практике, $\lambda_2$ известно только приближенно, автор предлагает вместо $B$ итерировать матрицу $B_k = A^k(\lambda_1 E - A)$. При этом величина $k$ оценивается практически легко. В. К. Саульев

**4605. Использование метода Лобачевского для алгебраического решения характеристических уравнений высших степеней. Зотов В. П.**, Сб. научн. тр. Куйбышевск. индустр. ин-та. Электротехника, 1958, вып. 7, 279—284

Корни характеристического уравнения системы дифференциальных уравнений компенсированного синхронного генератора определяются по методу Лобачевского. Преобразование коэффициентов характеристического уравнения по схеме Лобачевского проводится в общем виде с учетом порядков малости коэффициентов.

При выполнении преобразований производится пренебрежение величинами второго и выше порядка малости. Решение систем дифференциальных уравнений получается в удобной для анализа форме, позволяющей выявить влияние исходных параметров на протекание процесса.

К. Е. Чернин

**4606. О решении уравнений четвертой степени. Астуни** (Sulla risoluzione dell' equazione quartica. Astuni Enrico), Ricerca scient., 1955, 25, № 8, 2295—2312 (итал., рез. англ., нем., франц.)

**4607. Приближенное решение алгебраических уравнений высокой степени, которые не имеют или имеют один вещественный корень. Хаяси, Уо** (Hayashi S., Uo K.), Дэнки, гаккай дзасси, J. Inst. Electr. Engrs Japan, 1954, 74, № 11, 1375—1381, 1382 (японск.)

**4608. Квадратурные формулы типа формул Маркова. Аккерман Р. Б.**, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1959, 53, 5—15

Рассматриваются квадратурные формулы с весом $p(x)$ типа формул Маркова, приспособленные для различных частных случаев. Для формул, использующих оба конца промежутка интегрирования, приведены абсциссы и коэффициенты для промежутка интегрирования $[-1,1]$ при $p(x)\equiv 1$, $n=1,2,\ldots,8$ и для промежутка интегрирования $[0,1]$ при $p(x)=x$, $p(x)=x^2$, $n=1,2,3,4$. Для четных и нечетных функций, когда $p(x)\equiv 1$ и отрезок интегрирования $[0,1]$, приведены абсциссы и коэффициенты при $n=0,1,\ldots,8$ и $n=1,2,\ldots,8$ соответственно. Для формул, использующих один конец промежутка интегрирования, приведены абсциссы и коэффициенты для промежутка $(-1,1]$ при $p(x)\equiv 1$, для промежутка $[0,1)$ при $p(x)=x^{1/2}$, $p(x)=x^2$ (подынтегральная функция четная), $p(x)\equiv 1$ (подынтегральная функция нечетная) и $n=1,2,\ldots,5$. Абсциссы и коэффициенты во всех случаях приведены с восемью значащими цифрами. Рассматривается применение формул Маркова к вычислению двойных и тройных интегралов. Последнее иллюстрируется примерами, подтверждающими неплохую точность вычислений.

Н. П. Кеда

**4609. Вычисление неопределенного интеграла с малым числом значений интегрируемой функции. Крылов В. И., Филиппова М. А., Фролова М. Ф.**, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1959, 53, 283—301

Для вычисления неопределенного интеграла $y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ в равноотстоящих узлах $x_n=x_0+nh$ применяются квадратурные формулы вида:

$$y_{n+1}=y_n+\int_{x_n}^{x_n+h} f(t)\,dt\approx y_n+A_0 f(\alpha)+\sum_{i=1}^{\alpha}A_i f(\alpha+p_i h)+\ldots+L_0 f(\lambda)+\sum_{i=1}^{l}L_i f(\lambda+t_i h), \qquad (1)$$

в которых узлы берутся сходственными группами $\alpha+p_i h$, $\beta+q_i h,\ldots,\lambda+t_i h$, где $x_n\leqslant\alpha<\beta<\ldots<\lambda<x_n+h$, $p_i, q_i,\ldots,t_i$ — целые числа. Если $m$ — число основных узлов $\alpha,\beta,\ldots\lambda$, $N+1$ — число всех узлов, то при любых $p_i, q_i,\ldots t_i$ можно так выбрать $\alpha,\beta,\ldots\lambda$, что формула (1) будет точной для всех полиномов степени $m+N$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы формула (1) была интерполяционной и полином, имеющий своими корнями все ее узлы, был ортогонален любому полиному степени меньше $m$ на $[x_n, x_n+h]$. Построить формулу (1), точную для всех полиномов степени $m+N+1$, невозможно. Дается представление остатка $R(f)$ формулы (1) для функций, обладающих производными достаточно высокого порядка. Рассмотрены случаи одного, двух и трех значений функции $f$ на шаг и для них при некоторых расположениях сходственных узлов построены расчетные формулы. Численные значения узлов и коэффициентов полученных формул приводятся в работе с десятью знаками после запятой. Формулы вида (1) выгодно применять в том случае, когда $f$ будет функцией сложного вида и при вычислениях необходимо заботиться о получении нужной точности с возможно малой затратой труда на нахождение значений $f$.

В. В. Лугин

**4610. Приложение «кривой плотника» к формулам Симпсона. Брун** (An application of a «Carpenter's curve» to Simpson formulas. Brun Viggo), Nord. mat. tidskr., 1959, 7, № 1, 20—24 (англ.)

Пусть мы имеем многоугольник, например четырехугольник, и по точке $M$ на каждой из его сторон. Через эти точки требуется провести замкнутую кривую так, чтобы стороны четырехугольника касались кривой в точках $M$. Определение этой кривой автор строит так: сперва удаляются углы четырехугольника, в результате получим восьмиугольник, на новых сторонах которого берутся новые четыре точки $N$ — точки касания этих сторон указанной кривой. Продолжая этот процесс, мы придем к шестнадцатиугольнику и т. д. Границу этих многоугольников автор и называет „кривой плотника". Обобщая это понятие, автор вводит понятие „поверхности плотника" как границы многогранников. Эти названия вполне естественны, так как способ, которым пользуется автор, напоминает способ, который применяет плотник при обтесывании углов деревянной доски, бруса: обычно он начинает с обрезания углов. В работе дается вывод формулы Симпсона для трех и четырех неравноотстоящих ординат с применением кривой плотника.

К. В. Лащенов

**4611. О мультипликативном методе выделения особенностей в численном интегрировании. Лащенов К. В.**, Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, 183, 151—177

Для приближенного вычисления интеграла $\int_a^b \varphi(x)dx$, подынтегральная функция которого имеет особенности внутри отрезка интегрирования и допускает разложение на множители $\varphi(x)=w(x)f(x)$, где $w(x)$ — неотрицательная функция и содержит все особенности $\varphi(x)$, а $f(x)$ — достаточно гладкая, предлагается строить квадратурную формулу Гаусса

$$\int_a^b w(x)f(x)\,dx\approx\sum_{k=1}^{n}A_k f(x_k) \qquad (1)$$

с весовой функцией $w(x)$. Подробно рассмотрена формула (1), когда $w(x)=(1-x^2)^p|x|^q$ $(p,q>-1)$, $a=-1$, $b=1$. Для весовой функции $w(x)=-\ln|x|$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$ даются численные значения $x_k$ и $A_k$ при $n=1(1)6$. Применение и точность изложенного метода иллюстрируется на примерах.

Мультипликативное выделение особенностей рассматривалось в некоторых работах раньше (см. например, РЖМат, 1956, 1679).

Л. А. Янович

**4612. О вычислении кратных интегралов. Солодов В. М.**, Докл. АН СССР, 1959, 127, № 4, 753—756

Выводятся приближенные формулы, во многих случаях удобные для вычисления кратных интегралов, для функций $f(x_1,\ldots,x_s)$, которые предполагаются периодическими с периодом, равным единице по каждой из переменных, и разлагающимися в абсолютно сходящийся ряд Фурье. При некоторых дополнительных предположениях относительно функций указанного класса и их производных получены несколько оценок типа

$$\left|\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)dx_1 \ldots dx_s - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(M_n)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(s-1)\sigma}{\sqrt{N}} + \frac{CA}{N^{\alpha}}.$$

Показано, что обычный метод равномерных сеток при приближенном вычислении интегралов от функций, имеющих ограниченные частные производные порядка $p \geqslant 1$, дает погрешность $O(N^{-p/s})$ и что, следовательно, квадратурная формула в работе Сюй Ли-чжи и Линь Лунвэя (РЖМат, 1959, 4240) при $p \geqslant 4$ уступает по точности оценкам, получающимся с помощью метода равномерных сеток. Отмечается, что для получения квадратурных формул в настоящей работе применены методы, разработанные Н. М. Коробовым (РЖМат, 1958, 6206), и существенно использованы результаты Чэн Минь-дэ и Чэнь Юн-хэ (РЖМат, 1958, 247). И. Ф. Шелихова

**4613. Формулы для обратного «соприкасающегося» интерполирования в комплексной плоскости. Солзер** (Formulas for inverse osculatory interpolation in the complex plane. Salzer Herbert E.), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1957, **59**, № 4, 233—238 (англ.)

В предыдущей статье автора (РЖМат, 1957, 6698) получены формулы $n$-точечной обратной „соприкасающейся" интерполяции для нахождения $x = x_0 + ph$ из $f(x)$ при помощи $f_k \equiv f(x_k)$ и $f'_k \equiv f'(x_k)$, где $x_k = x_0 + kh$, $k$ меняется в пределах от $-[(n-1)/2]$ до $[n/2]$ с шагом $h$, при помощи обращения формулы Эрмита для „соприкасающейся" интерполяции.

Указывается, что эти формулы справедливы также для аналитических функций, где $x$ заменяется через комплексную переменную $z = z_0 + Ph$, причем $z_k \equiv z_0 + kh$ берутся на любой линии $z$-плоскости с шагом $h$, где $h$ — соответствующим образом подобранное комплексное число. Во многих случаях для аналитических функций, заданных вместе с производными на декартовой сетке с шагом $h$ точность обратного „соприкасающегося" интерполирования можно значительно увеличить, если $z_k$ выбрать на достаточно мелкой сетке. В статье приводятся усовершенствованные формулы обратной „соприкасающейся" интерполяции для различных случаев расположения узлов интерполяции на декартовой сетке в комплексной области. Приводятся схемы расположения узлов для случаев $n$-точечных формул при $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Указывается, что такие формулы полезны при составлении таблиц в комплексной области для

$$\log\Gamma(z),\ J_0(z),\ J_1(z) = -J'_0(z),\ (z),\ Y_0(z),\ Y_1(z) = -Y'_0(z),$$

интеграла вероятностей $\int_0^z e^{-u^2} du$, составления таблиц решений некоторых важных дифференциальных уравнений и т. п. К. А. Карпов

**4614. Формулы прямого и обратного гиперкасательного интерполирования. Солзер** (Formulae for hyperosculatory interpolation, direct and inverse. Salzer Herbert E.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1959, **12**, № 1, 100—110 (англ.)

Из интерполяционной формулы Эрмита, использующей значения функции и ее двух первых производных в $n$ равноотстоящих точках, выведена формула „гиперкасательного" интерполирования функции в точке $x_0 + ph$. Формула проста в употреблении и имеет вид:

$$f(x_0 + ph) \approx \frac{\sum (\alpha_i f_i + h\beta_i f'_i + h^2 \gamma_i f''_i)}{\sum \alpha_i},$$

где

$$\alpha_i = \frac{a_i}{(p-i)^3} + \frac{b_i}{(p-i)^2} + \frac{c_i}{p-i},$$

$$\beta_i = \frac{a_i}{(p-i)^2} + \frac{b_i}{p-i},$$

$$\gamma_i = \frac{a_i}{2(p-i)}.$$

Коэффициенты $a_i$, $b_i$ и $c_i$ не зависят от $p$ и значений функции. Их точные значения для $n = 2(1)7$ приведены в работе. Там же приведены формулы обратного интерполирования, использующие значения функции и ее двух производных, для $n = 2(1)5$. К. Е. Чернин

**4615. Некоторые схемы для вычисления многочленов с вещественными коэффициентами. Пан В. Я.**, Докл. АН СССР, 1959, **127**, № 2, 266—269

Предлагается несколько способов вычисления многочлена $P_n(x)$ степени $n \geqslant 5$, требующих $\approx n/2$ операций умножения и $\approx n$ операций сложения. Эти операции производятся над аргументом $x$ и некоторыми заранее вычисленными параметрами (не зависящими от $x$), являющимися функциями только от коэффициентов $P_n(x)$. По утверждению автора, описанные методы в отношении числа арифметических операций являются самыми экономичными (особенно при многократном вычислении данного многочлена) из всех известных. При $n < 4$ самой экономичной является схема Горнера. В. К. Саульев

**4616. Ортогональные полиномы с произвольными степенями. Попов А. А.**, Инженерный сб., 1958, **26**, 280—284

Выводятся явные выражения ортогональных функций, получающиеся при ортогонализации последовательности

$$x^a,\ x^b,\ x^c,\ x^d, \ldots$$

для произвольных $a, b, c, d, \ldots$, лишь бы

$$a, b, c, d, \ldots \neq -\frac{1}{2}, -1,$$
$$a+b,\ a+c,\ a+d, \ldots \neq -1,$$
$$b+c,\ b+d, \ldots \neq -1,$$
$$c+d, \ldots \neq -1.$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Рассматриваются также некоторые частные случаи указанных функций. К. В. Лащенов

**4617. К решению задач строительной механики на электронных вычислительных машинах. Резников Р. А.**, Строит. механ. и расчет сооруж., 1959, № 4, 22—28

Описана универсальная программа для расчета стержневых систем на электронной вычислительной машине М-2. Универсальность программы заключается в отсутствии ограничений 1) на структуру конструкции и характера нагрузок и 2) на число узлов, неизвестных и пр. Отмечается, что при помощи подобной программы были произведены расчеты на машине М-2 ряда практических задач, в частности, рассчитана главная эстакада Братской ГЭС. В. К. Саульев

**4618. О законности конечноразностных операций. Плесси** (Concerning the validity of finite difference operations. Plessis N. du), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 2, 208—214 (англ.)

Сначала устанавливается следующая теорема. Пусть $t$ означает положительное вещественное переменное и пусть $A(h)$ — система всех функций $\varphi(t)$, определенных в $[0, h]$, таких что, если

$$\varphi(t) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r t^r, \quad \text{то} \quad \sum_0^{\infty} |a_r| h^r < \infty,$$

где $a_r$ — комплексные числа. Тогда $A(h)$ есть комплексное банахово пространство с нормой

$$\| \varphi \| = \sum_0^\infty | a_r | h^r.$$

Исходя из последовательности $\{u_n\}$ любых чисел, удовлетворяющих неравенству

$$| \Delta^r u_0 | < Kh^r, \quad 0 < h < 1, \qquad (1)$$

где $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$, при помощи соотношения $f(t^r) = \Delta^r u_0$ строится непрерывный линейный функционал $f$ и доказывается, что: 1) $\Delta^n u_r = f[(1+t)^r t^n]$; 2) $u(z) = f[(1+t)^z]$ есть аналитическая функция $z$ в комплексной плоскости; 3) если $(\varphi_n(t))$ есть последовательность функций, аналитических в $| t | \leqslant r$, где $r > h$ и $\varphi_n(t)$ сходится к $\varphi(t)$ равномерно в $| t | \leqslant r$, то $\| \varphi_n - \varphi \| \to 0$ при $n \to \infty$.

Эти результаты применяются к интерполяционным формулам Ньютона и Эверетта, к численному интегрированию по формулам трапеций и Симсона и к формуле суммирования Эйлера — Маклорена. В. К. Саульев

**4619. О приближенном решении одного вида разностных уравнений. Хаджимуллаев Ф. С.**, УзССР Фанлар Акад. ахбороти, Изв. АН УзССР. Сер. физ.-матем. н., 1959, № 3, 18—22 (рез. узб.)

Для разностного уравнения вида $F(x+h) - F(x) = \varphi(x)$, где $F(x)$ — неизвестная функция, $h$ — заданное постоянное, положительное число, $\varphi(x)$ — известная функция, определенная на $[0, 1]$, излагается приближенный способ решения в классе дважды дифференцируемых функций на $[0, 1+h]$, согласно которому приближенное решение определяется с точностью до произвольной периодической с периодом $h$ функции с погрешностью $\Delta_n(x)$:

$$| \Delta_n(x) | \leqslant \frac{3N}{2h\sqrt{n}} [ | x - h | + h].$$

И. Ф. Шелихова

**4620. Расчет прогиба балок с помощью матриц (трансформации векторов). Поснер** (Berechnung der Stabbiegung mit Matrizen (Vektortransformation). Poßner Lothar), Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau, 1957, 3, № 1, 43—51 (нем.)

Состояние изогнутой балки в точке $x$ характеризуется четырехмерным вектором-столбцом $y$ с компонентами $\{y(x), y'(x), y''(x), y'''(x)\}$ ($y(x)$ — прогиб балки в точке $x$). Для участка свободного от нагрузок имеет место соотношение $y = \mathfrak{A} C$, где $\mathfrak{A}$ — некоторая квадратная матрица, а $C$ — начальный вектор-столбец с компонентами $\{C_4, C_3, C_2, C_1\}$. Для призматического участка балки, при выборе начала координат в начале участка

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{6} \\ 0 & 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y''(0) \\ y'''(0) \end{bmatrix}.$$

В точках приложения сосредоточенных сил, а также в точках изменения сечения балки записываются условия сопряжения, которые сводятся к трансформации вектора $y$ при переходе через данную точку, с помощью некоторой матрицы. Указывается способ вычисления начального вектора при помощи линий влияния. Ход расчета прогибов балки сведен в блок-схему. Метод иллюстрирован четырьмя числовыми примерами. Библ. 13 назв. К. Р. Коваленко

**4621. Расчет наименьшего характеристического числа уравнения Пайерлса методом Монте-Карло. Владимиров В. С., Соболь И. М.**, Вычисл. математика, сб. 3, 1958, 130—137

Методом случайных блужданий вычисляются характеристические числа $\lambda_k^{(N)}$ уравнения Пайерлса

$$n(P) = \lambda \int_G \alpha(P') h(P') \frac{\exp\{[-|P-P'| \int_0^1 \alpha[tP+(1-t)P']dt}{4\pi | P - P' |^2} \times$$

$$\times n(P')dP' \equiv \lambda K_n, \qquad (1)$$

где $G$ — конечная область, а функции $\alpha(P')$ и $h(P')$ предполагаются положительными и кусочно-непрерывными в области $G$. Наименьшее характеристическое число $\lambda_1$ есть предел последовательности чисел $\lambda_k^{(N)} = (\varphi_{k-1}, \psi)/(\varphi_k, \psi)$, где $\varphi_k = K^k \varphi_0$ — к-я итерация функции $\varphi_0, \varphi(P)$ и $\psi(P)$ — произвольные положительные кусочно-непрерывные в $G$ функции, а $(\varphi, \psi)$, — их скалярное произведение с весом $\alpha h$. Положительные числа $(\varphi_k, \psi)$, $k = 1, 2, \ldots$, вычисляются следующим образом. Строится в области $G$ случайное блуждание фиктивной частицы по точкам $P_0, P_1, \ldots, P_k$ с условной плотностью вероятности перехода $P_{k-1} \to P_k$, равной:

$$f(P_{k-1}, P_k) = \frac{\alpha(P_k) \exp\{-|P_k - P_{k-1}| \int_0^1 \alpha[tP_k + (1-t)P_{k-1}]dt\}}{4\pi | P_k - P_{k-1} |^2 z(P_{k-1}, \omega_{k-1})}, \qquad (2)$$

где $z(P, \omega) = 1 - \exp[-\int_0^d \alpha(P + t\omega)dt]$, $\omega$ — единичный вектор, определяющий направление в пространстве $R$, и равный $\omega_{k-1} = (P_k - P_{k-1})/|P_k - P_{k-1}|$, а $d$ — диаметр области $G$. В сферических координатах функция распределения вероятностей, соответствующая плотности $f(P_{k-1}, P)$, характеризуется равномерным распределением $d\omega/4\pi$ по направлению $\omega$ и распределением Ф по расстоянию $r$ вдоль луча $P_{k-1} + r\omega$, так что для случайных величин $\omega_{k-1}$ и $r_{k-1}$ новое положение частицы определяется формулой $P_k = P_{k-1} + r_{k-1}\omega_{k-1}$. Теперь можно построить случайные величины

$$M_k = \frac{h(P_0)\alpha(P_0)\psi(P_0)}{f(P_0)} \varphi_0(P_k) \prod_{i=1}^{k} h(P_i) z(P_{i-1}, \omega_{i-1}),$$

$$k = 1, 2, \ldots,$$

для которых математическое ожидание $E(M_k) = (\varphi_k, \psi)$. Таким образом, $(\varphi_k, \psi)$ вычисляется как среднее арифметическое $(\varphi_k, \psi) = 1/N_S \left( \sum_{s=1}^{N} M_k^{(s)} \right)$ для достаточно большого числа $N$ случайных блужданий. Оценка статистической погрешности дает $N \sim \lambda_1^{-k} \lambda_2^{2k} H^k (1 - e^{-Ad})^k$. При числе испытаний порядка нескольких тысяч метод дает пятипроцентную точность в определении наименьшего характеристического числа $\lambda_1$. Изложенный метод иллюстрируется тремя примерами: для однородной сферы радиуса 1, для шарового слоя с радиусами сфер 5/3 и 1 и для сферы радиуса 5/3 с внутренним цилиндром, центр которого совпадает с центром сферы, и объем равен объему внутренней сферы во втором примере (высота 1,646, радиус 0,90). Вычисления для первого примера производились вручную, при помощи таблицы случайных чисел Типпета (Tippett L. H. C., Random sampling numbers. Tracts for computers. London, XV, 1927), а для второго и третьего примера — на машине „Стрела" — при помощи „псевдослучайных" чисел, вычисляемых на той же машине по специальной подпрограмме по методу, который описан в работе И. М. Соболя

(РЖМат, 1960, 2379). Авторы отмечают, что изложенный метод может быть использован для оценки критических значений несферических реакторов, когда применение классических методов численного анализа затруднительно. Приведенные примеры носят методический характер.
В. Я. Евфанов

**4622. Итерация для операций квадратного корня. Мюрберг** (Iteration von Quadratwurzeloperationen. Myrberg P. J. Suomalais. tiedeakattoimituks., 1958, Sar. AI, № 259, 16S.) (нем.)

Исследуется сходимость бесконечного выражения

$$(p) = \pm\sqrt{p \pm \sqrt{p \pm \sqrt{p \pm \cdots}}},$$

где $p$ — вещественное положительное число. Исследование проводится методом итерации некоторых простейших полиномов.
К. Е. Чернин

**4623. Аппроксимация кривой последовательностью прямолинейных отрезков. Гонсалес-Ибеас** (Transformación de una curva en una sucesión de tramos rectos. González Ibeas J.), An. Real soc. esp. fís. y quim., 1959, **A55**, № 1-2, 13—24 (исп.; рез. англ.)

Исследуется вопрос о линейной аппроксимации функции на отрезке $[a, b]$. Требуется при эт м, чтобы величины

$$\max_{a<x<b} |\Delta y|, \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b \Delta y\,dx, \quad \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b (\Delta y)^2\,dx}$$

и $\int_a^b |\Delta y|\,dx$, где $\Delta y$ — разность между заданной функцией и линейной аппроксимацией, были по возможности меньшими. Заданная кривая заменяется параболой. Показывается, что наиболее выгодным является случай, когда прямолинейный отрезок, заменяющий график функции, проходит по середине между секущей, соединяющей концы параболы, и параллельной ей касательной. Это соответствует случаю, когда $\max_{a<x<b} |\Delta y|$ принимает наименьшее значение.
Э. Апарисио

**4624. Графическое решение биквадратных уравнений. Митягина В. А.,** Изв. Воронежск. гос. пед. ин-та, 1959, 27, 199—202

Для более прочного и сознательного усвоения программного материала предлагается знакомить учащихся с графическим методом решения биквадратных уравнений. Исследуются всевозможные случаи, встречающиеся при решении биквадратных уравнений, и простейший прием графического решения, позволяющий геометрически интерпретировать такое исследование. По мнению автора, изложенный в статье материал может быть успешно использован и для внеклассной работы с учащимися.
И. Ф. Шелихова

**4625 К. Численные и графические методы. Коллац** (Numerische und graphische Methoden. Collatz L. Handbuch der Physik. Bd. 2. Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer, 1955, S. 349—470) (нем.)

На 122 страницах приведено сжатое изложение основных разделов численного анализа. В частности, рассмотрены следующие вопросы. Вычисления с округленными числами, логарифмическая линейка, номограммы, сглаживание. Решение алгебраических уравнений методом итераций, методы Ньютона, схема Горнера, методы Лобачевского, решение линейных систем методом Гаусса, Банахевича, Холесского, итераций. Исчисление конечных разностей, интерполяция, численное интегрирование, сингулярные интегралы и тригонометрическая интерполяция. Решение начальных задач для обыкновенных и с частными производными дифференциальных уравнений, метод Рунге—Кутта, методы интерполяции и экстраполяции, погрешности, устойчивость. Решение краевых задач и задач на собственные значения при помощи рядов, методом возмущений, итераций, Ритца, сеток. Интегральные и функциональные уравнения.
W. E. Milne

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 1, 71.

**4626 К. Современные вычислительные методы** (Modern computing methods. Notes Appl. Sci. Nat. Phys. Lab. 1957, № 16, 129 pp., ill.) (англ.)

Курс лекций, прочитанных сотрудниками математического отделения Национальной физической лаборатории (Англия) инженерам. В книгу включены важнейшие численные методы анализа, необходимые при разработке различных инженерных проблем.

Излагаются: 1) численные методы решения линейных уравнений и вычисления матриц, пригодные для настольных вычислительных машин; 2) методы решения аналогичных задач на быстродействующих вычислительных машинах; 3) численные методы решения алгебраических уравнений; 4) вопросы вычисления собственных значений матриц; 5) конечные разности, интерполяционные формулы, численное дифференцирование и интегрирование; 6) численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений; 7) дальнейшие численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (метод разложения в ряд Тейлора, метод Рунге—Кутта и т. д.); 8) метод характеристик для решения квазилинейных гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка; 9) методы решения эллиптических и параболических уравнений второго порядка; 10) релаксационные методы; 11) основные методы составления математических таблиц, 12) рациональные методы вычисления различных интегралов, рядов, сумм и т. п.

В книге имеются три добавления. В добавлении 1 приводятся библиографические сведения с краткими рефератами о 128 важнейших работах по численным методам (в основном на английском языке), систематизированные по различным разделам математики. Добавление 2 посвящено описанию и работе быстродействующей вычислительной машины ДЭЮКЕ (DEUCE), установленной в математическом отделе Национальной физической лаборатории. Приводятся также программы для этой машины. Добавление 3 посвящено описанию механического дифференциального анализатора и решению различных математических задач на нем. Кроме литературных ссылок, приведенных в добавлении 1, в конце всех глав и добавлений 2 и 3 в свою очередь приводятся библиографические сведения. Приведены числовые примеры.
К. А. Карпов

## ТАБЛИЦЫ

**4627. О таблицах натуральных значений тригонометрических функций. Ларченко Е. Г.,** Тр. Ин-та физ. и матем. АН БССР, 1959, вып. 3, 250—256

Отмечается особое значение правильного использования таблиц натуральных значений тригонометрических функций в связи с внедрением в инженерную практику вычислительных машин. Доказываются три правила, позволяющие значительно повысить точность определения дирекционного угла при геодезических вычислениях по таблицам без увеличения числа знаков в таблицах. Даются предложения об улучшении таблиц и приводится таблица характеристик точности натуральных зна-

чений тригонометрических функций пятизначных таблиц. Рассматриваются приемы, делающие возможным применение пятизначных таблиц там, где обычно применялись шестизначные, что повышает производительность труда при проведении расчетов на клавишных автоматических вычислительных машинах приблизительно на 15—20%. И. Ф. Шелихова

**4628. Приближение функции Вейерштрасса $\mathfrak{S}$ в эквиангармоническом случае для действительного аргумента и таблицы для этой функции.** Саутард (Approximation and table of the Weierstrass $\mathfrak{S}$ function in the equianharmonic case for real argument. Southard Thomas H.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1957, **11**, № 58, 99—100 (англ.)

В известной книге Е. Янке и Ф. Эмде (Таблицы функций с формулами и кривыми, Гостехиздат, 1949 г., стр. 197) приводятся таблицы функции Вейерштрасса с четырьмя десятичными знаками. В эквиангармоническом случае функция Вейерштрасса $\mathfrak{S}(u; g_2, g_3)$ принимает вид $\mathfrak{S}(u; 0, 1)$. Так как эта функция ведет себя в окрестности начала так же, как и функция $1/u^2$, то автор берет для табулирования функцию

$$f(u; 0, 1) \equiv \mathfrak{S}(u; 0, 1) - 1/u^2.$$

Вследствие симметрии берется интервал $0 < u \leqslant \omega_2$, причем для действительного полупериода $\omega_2$ функции Вейерштрасса $\mathfrak{S}$ берется значение $\omega_2 \approx 1{,}52995$. В указанном интервале функция $f$ заменяется многочленом $f(u; 0, 1) \approx C_3u^4 + C_6 10^{10} + C_8u^{16} + C_{12}u^{22} + C_{15}u^{28}$, полученным из соответствующего ряда Маклорена.

Такое приближение обеспечивает получение значений функции $\mathfrak{S}$ с семью значащими цифрами. В статье приводится таблица значений функции $f(u; 0, 1)$ с семью десятичными знаками для $u = 0, 0(0, 1)1, 55$. Приводятся также значения модифицированных вторых центральных разностей, необходимые для интерполирования по формуле Эверетта со вторыми модифицированными разностями. Разности были модифицированы по методу спуска (throwback) от четвертых разностей с константой, равной —0,18393. К. А. Карпов

**4629. Таблицы для быстрого приближенного вычисления некоторых несобственных интегралов, содержащих бесселевы функции.** Лонгман (Tables for the rapid and accurate numerical evaluation of certain infinite integrals involving Bessel functions. Longman I. M.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1957, **11**, № 59, 166—180 (англ.)

В своей предыдущей статье (РЖМат, 1957, 3518) автор предложил новый метод приближенного вычисления интегралов $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ($a = \text{const}$, $f(x)$ — колеблющаяся функция в окрестности нуля), основанный на преобразовании Эйлера для медленно сходящихся знакопеременных рядов. Здесь автор, применяя указанный метод, получает таблицы для вычисления интегралов вида

$$\int_0^\infty J_0(x)\, g(x)\, dx, \tag{1}$$

$$\int_0^\infty J_1(x)\, h(x)\, dx, \tag{2}$$

где $J_0$ и $J_1$ — функции Бесселя, а $g(x)$ и $h(x)$ являются непрерывными функциями, стремящимися к постоянному пределу или к нулю при $x \to \infty$.

Метод состоит в замене интеграла (1) через интеграл

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} J_0(x)\, g(x)\, dx \quad (i = 1, 2, \ldots, 20), \tag{3}$$

где $x_0$ есть нуль, а $x_i$ есть $i$-й нуль функции $J_0(x)$. К полученным первым двадцати членам медленно сходящегося ряда с знакопеременными членами применяется преобразование Эйлера. Аналогично вычисляются интегралы вида (2). Каждый из интегралов (3) вычисляется по квадратной формуле Гаусса с числом делений $n=16$.

Приводятся две таблицы. Таблица 1 содержит значения $x$ и $J_0(x)$ с десятью десятичными знаками. Значения $J_0(x)$ проинтерполированы по таблицам Гарвардского университета (Tables of the Bessel functions of the first kind of orders zero and one, Harvard, Univ. Press. Cambridge, Mass., 1947) при помощи четырехчленной формулы Тейлора. Таблица 2 содержит аналогичные значения для $J_1(x)$. Точность таблиц составляет несколько единиц последнего десятичного знака. Приводится метод контроля вычислений и пример (В качестве примера вычисляется интеграл $\int_0^\infty J_0(x)\,dx = 1$, взятый отчасти из-за того, что автор исправляет попутно ошибку, имеющуюся в известной книге Ватсона по бесселевым функциям). К. А. Карпов

**4630. Интегралы**

$$E_p(x) = (p!)^{-1} \int_0^\infty \varepsilon^p (1 + x\varepsilon^3)^{-1} e^{-\varepsilon}\, d\varepsilon$$

**и**

$$F_p(x) = (p!)^{-1} \int_0^\infty \varepsilon^p (1 + x\varepsilon^3)^{-2} e^{-\varepsilon} d\varepsilon$$

**и их табулирование.** [Дингл, Арндт, Рой (The integrals

$$E_p(x) = (p!)^{-1} \int_0^\infty \varepsilon^p (1 + x\varepsilon^3)^{-1} e^{-\varepsilon} d\varepsilon$$

and

$$F_p(x) = (p!)^{-1} \int_0^\infty \varepsilon^p (1 + x\varepsilon^3)^{-2} e^{-\varepsilon} d\varepsilon$$

and their tabulation. Dingle R. B., [Arndt Doreen, Roy S. K.), Appl. Scient. Res., 1957, **B6**, № 4, 245 — 252 (англ.)

При исследовании некоторых свойств полупроводников встречаются интегралы типа $E_p(x)$ и $F_p(x)$ целых и полуцелых порядков $p$. Статья посвящена исследованию некоторых свойств этих интегралов и их табулированию. Устанавливаются следующие их свойства:

$$p(p-1)(p-2)\, xE_p + E_{p-3} = 1,$$

$$p(p-1)(p-2)\, xF_p + F_{p-3} = E_{p-3},$$

$$F_p = \frac{1}{3}[(p+1)E_{p+1} - (p-2)E_p], \quad p > -1,$$

$$E_p' = -(p+1)(p+2)(p+3)F_{p+3} =$$

$$= \frac{1}{3} x^{-1}(p+1)(E_{p+1} - E_p).$$

Для табулирования функции $E_p$ используется разложение

$$\overline{E}_p(y) = \frac{1}{p(p-1)(p-2)}\left[1 - \frac{y^3}{(p-3)(p-4)(p-5)} + \right.$$

$$\left. + \frac{y^6}{(p-3)\ldots(p-8)} - \ldots\right] - \frac{\pi y^{p-2} e^y}{3(p!)\sin \pi p} \times$$

$$\times \left\{1 + 2e^{-3/2y} \cos\left[\frac{1}{2}\sqrt{3}\, y + \frac{2}{3}\pi(p+1)\right]\right\},$$

если $p$ является нецелым числом, и аналогичные разложения, если $p$ является целым числом и для $F_p$. При составлении таблиц эти разложения берутся для малых значений $y$ ($y \leqslant 10^{1/3}$). Таблицы составлены для порядков $p=0\,(0{,}5)\,6{,}5$ при $x=0\,(0{,}002)\,0{,}01$; $x=0{,}02\,(0{,}02)0{,}1$; $x=0{,}1\,(0{,}1)\,1$; $x=1\,(0{,}2)\,2$; $x=2\,(0{,}5)\,5$; $x=5\,(1)\,10$; $x=10\,(2)\,20$.

К. А. Карпов

**4631. Упрощенное вычисление интегральной показательной функции. Миллер, Херст** (Simplified calculation of the exponential integral. Miller James, Hurst R. P.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1958, 12, № 63, 187—193 (англ.)

Излагается простой метод вычисления интегральной показательной функции для достаточно широкой области изменения аргумента ($0{,}2 \leqslant x \leqslant 80$), основанный на разложении функции

$$g(x) = -e^x Ei(-x)$$

в ряд Тейлора. Приводится шестнадцатизначная таблица функций

$$e^{-x} Ei(x), \quad Ei(x), \quad -e^x Ei(-x), \quad -Ei(-x)$$

для $x = 0{,}20\,(0{,}05)\,5\,(0{,}1)\,10\,(0{,}2)\,20\,(0{,}5)\,50\,(1)\,80$.

К. В. Лащенов

**4632. Таблицы для расчета оболочек в виде эллиптического параболоида над прямоугольным основанием. Климов** (Tafeln zur Berechnung des flachen elliptischen Paraboloids über rechteckigem Grundriß. Klimov Boris), Beton-und Stahlbetonbau, 1959, 54, № 1, 9—14 (нем.)

Оболочка приближенно рассматривается как мембрана; уравнения для расчета нормального и поперечных усилий заменяются соответствующими разностными уравнениями с разбиением исходной прямоугольной области на 64 клетки. Для решения полученных уравнений даны небольшие таблицы с 3—4 значащими цифрами.

В. А. Залгаллер

**4633 К. Новые числовые таблицы для функций, наиболее часто встречающихся в анализе. Флавьен** (Nouvelles tables numériques pour les fonctions usuelles de l'analyse. Flavien L. Paris, Gauthier-Villars, 1958, 63 p.) (франц.)

Книга предназначена для учащихся подготовительных классов высших учебных заведений. В ней содержатся таблицы наиболее часто встречающихся функций математики, а именно: 1) квадратов, кубов, обратных величин, обратных величин для квадратов и кубов, квадратных и кубических корней для целых чисел от 1 до 1 000; 2) десятичных логарифмов для целых чисел от 1 до 1000; 3) натуральных логарифмов для целых чисел от 1 до 1000; 4) функции $10^x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; 5) пятизначных тригонометрических функций в градусном измерении в пределах от 0° до 90° и в измерении градами для чисел от 1 до 100 (град — одна сотая часть прямого угла); 6) функций $\arcsin x$ и $\operatorname{arc\,tg} x$ с пятью десятичными знаками $0 \leqslant x \leqslant 100$; 7) таблицы перевода чисел, заданных в градусах и в градах, в радианное измерение и наоборот, 8) таблица замечательных чисел, логарифмов и т. п.

К. А. Карпов

**4634 К. Таблицы для решения кубических уравнений. Солзер, Ричардс, Арсем** (Table for the solution of cubic equations. Salzer Herberi E., Richards Charles H., Arsham Isabelle. New York—Toronto—London, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1958, xv, 161 pp.) (англ.)

Кубическое уравнение $ax^3+bx^2+cx+d=0$ при помощи замены переменной $x=y-b/3a$ приводится к виду

$$a'y^3+b'y+c'=0, \qquad (1)$$

где $a'=a$, $b'=c-b^2/3a$, $c'=d-bc/3a+2b^3/27a^2$. Корни уравнения (1) имеют вид $(-c'/b')\,f_1(\theta)$, $(-c'/b')\,f_2(\theta)$ и $(-c'/b')\,f_3(\theta)$, где $\theta=a'/c'^2/b'^3$ и

$$f_1(\theta)=\frac{[1+\sqrt{1+(4/27\,\theta)}\,]^{1/3}+[1-\sqrt{1+(4/27\,\theta)}\,]^{1/3}}{(2\,\theta)^{1/3}},$$

$$f_2(\theta)=-\frac{f_1(\theta)}{2}+\sqrt{\frac{f_1(\theta)^2}{4}-\frac{1}{\theta f_1(\theta)}},$$

$$f_3(\theta)=-\frac{f_1(\theta)}{2}-\sqrt{\frac{(f_1(\theta))^2}{4}-\frac{1}{\theta f_1(\theta)}}.$$

Для $-4/27<\theta<0$ все корни действительны; для $\theta>0$ или $\theta<-4/27$ один корень является действительным, а два других — комплексными. Для $\theta=0$ при $a'=0$ имеется только один корень $c'/b'$, а при $c'=0$ существуют три корня: $0$, $\pm\sqrt{-b'/a'}$.

Для $\theta=-4/27$ существуют два корня $3c'/b'$ и $-3c'/2b'$. В книге приводятся таблицы функций $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$ и $f_3(\theta)$ для $1/\theta=-0{,}001\,(-0{,}001)-1$, $\theta=-1\times(0{,}001)\,1$, $1/\theta=1\,(-0{,}001)\,0{,}001$ с семью десятичными знаками (функции $f_2(\theta)$ и $f_3(\theta)$ для $\theta=-0{,}148(0{,}001)-0{,}001$ вычислены с семью значащими цифрами). Погрешность составляет половину единицы последнего знака. Приводятся также значения первых и вторых разностей $\Delta$ и $\Delta^2$. Таблицы составлены так, что почти всегда достаточно пользоваться линейной интерполяцией по формуле

$$u(t)=u(t_0)+P\Delta, \qquad (2)$$

где через $u(t)$ обозначены $f_i(\theta)$, $i=1, 2, 3$, а через $t\equiv t_0+Ph$ обозначены значения $\theta$ или $1/\theta$, заключенные между $t_0$ и $t_0+h$, $h$ — шаг, равный 0,001 для $\theta$ и $-0{,}001$ для $1/\theta$.

Погрешность при этом не превышает $\Delta^2/8$. Для получения большей точности рекомендуется пользоваться квадратичной интерполяцией по формуле (2) с добавлением члена $[P(P-1)/2]\,\Delta^2$. В этом случае погрешность не превышает $\Delta^3/16$. Линейная и квадратичная интерполяции всегда достаточны для получения необходимой точности, исключая случай, когда $\Delta^3>16$. В этом случае нужно пользоваться интерполяционной формулой Ньютона.

Упоминаются некоторые существующие таблицы для решения кубических уравнений (в частности, книга Шумягского Б. М. „Таблицы для решения кубических уравнений методом основ". Гостехиздат, М. — Л., 1950).

К. А. Карпов

**4635 К. Таблицы интегралов проводимости $J_n(x)=\int_0^x \frac{e^z z^n dz}{(e^z-1)^2}$. Роджерс, Пауэлл** (Tables of transport integrals. $J_n(x)\equiv\int_0^x \frac{e^z z^n dz}{(e^z-1)^2}$. Rogers William M., Powell Robert L. Nat. Bur. Standards Circ., 1958, 595, 46 pp., ill.) (англ.)

При исследовании различных свойств твердого тела (электропроводимость, теплопроводность и т. п.) встречаются интегралы вида $J_n(x)$, где $x=\theta/T$, причем величина $\theta$, называемая характеристической температурой твердого тела, является переменной, $T$ — абсолютная температура. В начале книги подробно излагаются физи-

[illegible]

$$[illegible] \left\{ \frac{1}{[illegible]} - \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{B_s (2s-1) x^{2s}}{(2s)!\,(n+2s-1)} \right\},$$

где $B_s$ — числа Бернулли.

Предельные значения $J_n(x)$ вычисляются по формулам

$$\lim J_n(x) = n\,\zeta(n); \quad \zeta(n) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^n}, \quad \lim_{x \to 0} J_n(x) = \frac{x^{n-1}}{n-1}.$$

Таблицы составлены с шестью значащими цифрами с [illegible]. Погрешность не превышает одной двух единиц шестой значащей цифры (для значений $J_n(x)$ от $J_{12}(x)$ до $J_{17}(x)$ в пределах от $x=9$ до $x=11$ погрешность может достигнуть до пяти единиц шестой значащей цифры). В таблицах 3—5 (таблицы 1—2 являются вспомогательными) приведены значения $J_n(x)$ и $J_n(x)/x^{n-1}$ для $2 \leqslant n \leqslant 10$, в таблицах 6—8 приведены значения $J_n(x)$ для $8 \leqslant n \leqslant 17$. Таблицы 9 и 10 (для функции $\zeta(n)$ и чисел $B_s$), являющиеся вспомогательными, взяты из других источников. Таблицы вычислялись на быстродействующей вычислительной машине ИБМ-650.

К. А. Карпов

---

**См. также:** 4203, 4207.

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

*Редактор Д. Ю. Панов*

[illegible]

1. Начало заполнения; 000xxxx. Адрес, в которой должна быть записана первая команда, дается в десятичной форме (xxxx). Программа ввода пересчитывает его и записывает в счетчике в качестве начального адреса. Все следующие команды размещаются в очередных ячейках накопителя.

2. Модификатор/000xxxx. Он задает в десятичном коде число, на которое надо увеличить адрес команды, прежде чем этот адрес запишется в накопитель.

3. Команды с десятичными адресами. Этот ключевой код состоит из нулей, поэтому отдельно не пробивается. В этом случае программа ввода переносит команду в накопитель и увеличивает содержимое счетчика на 1.

4. Гекса-десятичные числа, 00000xx. Два последних числа задают в десятичной форме (наибольшее число 63) то количество слов (чисел или команд), которое следует перенести в сумматор без изменения. Это касается преимущественно константы переадресации, масштабных коэффициентов и т. п. Большое количество чисел также вводится этой программой в накопитель.

5. Гекса-десятичная программа. Следующие xxx слов — чисел или команд — переносятся в накопитель, начиная с ячейки *yyyy*, без изменений. Те и другие данные должны быть в гекса-десятичной форме. Этот ключевой код применяется чаще всего для быстрого ввода большой программы. Пробивку программы в гекса-десятичной форме производит сама машина по специальной программе. Этот способ чрезвычайно сокращает время при выполнении машиной длинных подпрограмм.

6. Останов и переход. 000xxxx. Заданные десятичные адреса пересчитываются и вставляются в команду перехода (передачи управления). Команда перехода выполняется при включении пусковой кнопки или тумблера «не блокировать».

**7. Исполнение команды** $+00a$xxxx. $a$ — **какое-либо** буквенное обозначение команды (операции), xxxx —

десятичный адрес. После пересчета команда записывается, затем сумматор может быть установлен вручную и команда выполняется при нажатии на пусковую кнопку. Этот ключ используется для ввода отдельных данных и изменения уже записанной программы.

Правильность работы машины проверяется тест-программой. Так как в сбоях повинен в первую очередь магнитный барабан, то проверяется прежде всего перепись содержимого каждой ячейки во все остальные по всем возможным путям. Широко применяется контрольное суммирование для проверки записи программы в накопитель. Легко осуществить и непосредственное считывание команд в порядке следования. В машине применяются всевозможные подпрограммы, хранящиеся на перфолентах. Так называемое оптимальное программирование сокращает время обращения к накопителю, хотя как показывает приведенный в статье большой и подробный пример, можно обойтись и без особого программирования, если выигрыш времени по сравнению с работой программиста незначителен. В заключение статьи рассмотрены структурные программы задачи из области дифференциальных уравнений с частными производными, составленные по отдельным участкам, и приведены подробные программы вычислений и окончательные результаты, сведенные в таблицу.

А. Ф. Смирнов

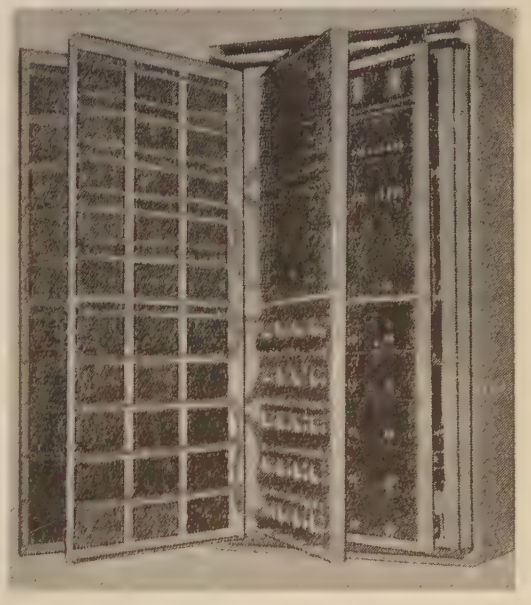
**4637. Основные операции вычислительной машины ГАММА. Дюверже** (Opérations principales GAMMA. Duverger Lucien), Automatisme, 1957, **2**, № 10, 387—389 (франц.)

Рассматриваются основные операции электронной цифровой вычислительной машины ГАММА французской фирмы «Булль». Описываются операции: очищения всего запоминающего устройства или его части, введения постоянных, передачи данных между основным и оперативным запоминающими устройствами, — а также арифметические операции сложения, вычитания, «короткого» умножения, полного умножения и операция сравнения.

А. В. Шилейко

**4638. Выставка электронных вычислительных машин. II** (Electronic Computer Exhibition. II.), Engineer, 1958, **206**, № 5367, 874—877 (англ.)

Вторая часть статьи (часть I см. РЖМат, 1960, 2385), посвященной описанию экспонатов выставки электронных вычислительных машин, проходившей в Лондоне с 28 ноября по 5 декабря 1958 г. Объединение фирм «Elliott—Automation Group» представило универсальную цифровую вычислительную машину «Эллиотт 802 Компьютер» (Elliott 802 Compudesk), выполненную на транзисторах и ферритовых сердечниках, машину «Панэллиотт 609» (Panelliott 609), предназначенную для работы в составе систем автоматического управления, и быстродействующее устройство для чтения перфоленты, работающее со скоростью 1000 цифр в 1 сек. Чтение данных с 5-, 7- и 8-позиционной перфоленты осуществляется в устройстве фотоэлектрическим способом. В читающей головке используются фототранзисторы типа OCP71 и источники света типа «Perspex». Протяжка ленты осуществляется с помощью двух роликов, из которых верхний, ведущий, укреплен на валу двигателя, а нижний, прижимной, может перемещаться с помощью электромагнита. Лента проходит также между двумя плоскими пластинами, осуществляющими ее рабочее напряжение. Величина давления между пластинами управляется электромагнитом. Питание устройства осуществляется от сети 240 *в* 50 *гц* и от двух вспомогательных источников: 12 *в* 3 *а* постоянного или переменного тока для источников света и около 20 *в* для фототранзисторов. Фирма «Creed and Co.» представила перфоратор перфоленты, быстродействующее печатающее устройство и контрольник перфолент. Перфоратор смонтирован в шумоподавляющем металлическом корпусе размером 950×450×1050 *мм* и работает со скоростью 3000 слов в 1 мин. Пуансоны перфоратора приводятся в движение кулачковым валом, причем сцепление каждого пуансона с приводом осуществляется с помощью электромагнита. Для протяжки лента зажимается между двумя рамками, управляемыми двумя электромагнитами и приводимыми в возвратно-поступательное движение от кулачкового вала. Печатающее устройство работает со скоростью 100 цифр в 1 сек. Печатаемые знаки формируются с помощью укрепленной на печатающей головке матрицы из 25 игл (5×5). Среди экспонатов фирмы «IBM United Kingdom» были представлены два дополнительных блока к машине ИБМ-650: блок запоминающего устройства на ферритовых сердечниках ИБМ-653 и блок запоминающего устройства на магнитной ленте ИБМ-727. Фирма «Mullard Equipment» представила ряд вспомогательных устройств к системам для обработки данных. Аналого-цифровой преобразователь типа L281 выполняет преобразование в цифровую форму значений электрического напряжения от 0 до 10 *в* менее чем за 1 мсек. При выдаче данных в последовательной форме частота следования импульсов составляет примерно 12 *кгц*. Выдача данных в параллельной форме осуществляется по внешним запрашивающим сигналам. Преобразователь выполнен полностью на транзисторах с использованием печатного монтажа. Устройство для программного управления промышленными объектами основаны на логических элементах, выполняющих операции И и ИЛИ. Каждый элемент имеет 6 входов и 6 выходов и выполняется на транзисторах, что повышает надежность по сравнению с переключательными системами на электромеханических реле. На входах элементов потребляется небольшая мощность, требуемая для управления транзистором, а выходы рассчитаны на индуктивную нагрузку, мощностью до 36 *вт*, или чисто активную нагрузку, мощностью до 50 *вт*. В качестве примера использования этих переключательных элементов приводится устройство для обеспечения безопасности работы атомного реактора (см. фото), выполненное в виде «книги», на «страницах» которой размещаются элементы. Автоматический электронный координатный станок с кнопочным



управлением обеспечивает точность установки инструмента относительно плоской заготовки в 0,025 *мм* при максимальном перемещении на 150 *мм* и в 0,05 *мм* при перемещении в пределах всего стола размером 500×750 *мм*. Фирма выпускает магнитострикционные линии задержки на 4,5 мсек. при полосе пропускаемых частот в 250 *кгц* и на 1 мсек. при полосе в 1 *мгц*. Линии имеют температурный коэффициент в $5 \cdot 10^{-6}$ на 1°С. Установка величины задержки производится перемещением чувствительных элементов. Перемещение одного элемента позволяет изменять задержку в пределах 100 мксек. В числе других экспонатов фирмы отмечаются специальные типы транзисторов для вычислительных машин и запоминающие устройства на ферритовых сердечниках. Фирма «Leo Computers, Ltd», представила электронную универсальную цифровую вычислительную машину, предназначаемую для инженерных расчетов и конторских работ. А. В. Шилейко

**4639. Автоматическое программирование для электронных вычислительных машин. Тюринг** (Automatische Programmierung für elektronische Rechenanlagen. Thüring B.), Elektron. Rundschau, 1957, **11**, № 6, 171—173 (нем.; рез. англ., франц.)

**4640. Новая недорогая электронная вычислительная машина** (New, low-cost computer), Automat. and Automatic Equipm. News, 1958, **4**, № 3, 824 (англ.)

Кратко описана электронная вычислительная машина типа «Берроуз Ф-2000» (Burroughs F2000) (см. фото). Она выполнена на базе счетной машины типа «Берроуз-Сенсиматик» (Burroughs Sensimatic), к которой добавлено электронно-механическое устройство. Сохранены все особенности и рабочие характеристики машины «Берроуз-Сенсиматик». Машина Ф-2000 имеет 18 ячеек памяти для размещения исходных данных и результатов и механический селектор. В каждом из взаимозаменяемых блоков селектора могут быть заданы четыре и более программы. Для введения программы в селектор используются три клавиши.

Отмечается высокая степень надежности и простота в управлении. Машина предназначена для деловых фирм, банков и государственных учреждений. Приведена фотография общего вида машины. В. Л. Евтеев

**4641. Новая электронная вычислительная машина на кристаллических триодах** (Neuer Elektronenrechner mit Transistoren), VDI-Nachr., 1958, **12**, № 20, 3 (нем.)

Сообщается о новой электронной вычислительной машине ИБМ-7070, выполненной полностью на кристаллических триодах (РЖМат, 1960, 958). Г. М. Грязнов

**4642. Эффективность запоминающего устройства. Джоким** (Memory efficiency. Joachim Gertrud S.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1959, **6**, № 2, 172—175 (англ.)

Рассматриваются статистические данные загрузки запоминающего устройства на примере универсальной двухадресной цифровой вычислительной машины УНИВАК-1103, имеющей тактовую частоту 500 *кгц*. Для определения эффективности запоминающего устройства анализировались 10 библиотечных программ, из которых 5 с фиксированной запятой, а 5 с плавающей. Все 31 исследуемая команда были разделены на быстрые, занимающие до 30 тактовых периода, средние—менее 100 тактовых периодов и медленные—более 100 тактовых периодов.

Для всех 2933 выполненных команд среднее время использования запоминающего устройства составляло около 33% общего машинного времени. Медленные команды, загружающие 45% машинного времени, занимают запоминающее устройство в течение 12% активного времени запоминающего устройства или 4% всего машинного времени. Для средних команд эти цифры составляют 21%, 12% и 4%, а для быстрых команд—34%, 76% и 25%.

Для каждой отдельной команды активное время запоминающего устройства занимало 18—45% общего машинного времени. Эти цифры показывают, что в течение значительного времени в процессе работы машины запоминающее устройство может быть использовано в целях, отличных от производства операций, например для ввода и вывода. О. В. Бачин

**4643. Запоминающие устройства на магнитных сердечниках с управлением от полупроводниковых триодов. Года, Джонстон, Марковиц, Розенберг, Стюарт-Вильямс** (All transistor magnetic core memories. Goda Ben T., Johnston William Robert, Markowitz Seymour, Rosenberg Milton, Stuart-Williams Raymond), Nonlinear Magnetics and Magnetic Amplifiers. (Conf., 1958, Los Angeles, Calif.). S. l., Amer. Inst. Electr. Engrs, 1958, 222—233 (англ.)

Разбираются вопросы повышения быстродействия магнитных матричных запоминающих устройств. Современное состояние вычислительной техники позволяет строить запоминающие устройства на 80—100 чисел с циклом обращения 2—3 мксек, работающие по принципу линейной выборки, запоминающие устройства емкостью до 1024 чисел с циклом обращения 4 мксек. и емкостью свыше 1024 чисел с циклом обращения 6—8 мксек., работающие по принципу совпадения токов.

Рассматриваются три класса временных ограничений в запоминающем устройстве:

1. Время, необходимое для выбора сердечника и распространения сигналов. В этот период включаются как времена нарастания сигналов, задержка в дешифраторах, так и временные задержки, возникающие при перемещении сигналов в матрице. В настоящее время удалось снизить этот интервал до 1,5 мксек. и вряд ли в ближайшие годы его удастся сократить вдвое.

2. Время на перемагничивание сердечников. Сердечники с внешним диаметром 1,27 *мм* перемагничиваются в основном за 1,5 мксек., что позволяет получить цикл в 4 мксек. в малых по объему устройствах. Специальные сердечники в схемах с прямой выборкой перемагничиваются при считывании за 0,5 мксек. при записи за 1 мксек., что позволяет при перекрытии токов в очень малых запоминающих устройствах получать цикл обращения 2 мксек.

3. Нагрев сердечников при повышении частоты работы служит серьезным препятствием к повышению быстродействия запоминающих устройств. Поэтому для уменьшения цикла обращения следует уменьшать размеры сердечника и матриц, использовать специальные схемы запоминающих устройств и улучшать термические свойства магнитных материалов. В настоящее время применяются следующие ферритовые сердечники размером 1,27×0,76×0,38 *мм*.

Для работы по принципу совпадения токов получены сердечники, требующие полного тока 500 *ма*, дающие сигнал «1» 65 *мв*, разрушенный «0»—9 *мв*. Этот сердечник перемагничивается за 1 мксек. при воздействующих импульсах, имеющих фронты 0,2 мксек., при длительности 1,5 мксек. Сердечники для систем с линейной выборкой требуют для считывания 400 *ма*, для записи 200 *ма*. Они имеют сигнал «1» 75 *мв* длительностью 0,5 мксек., а сигнал «0» 15 *мв*. Для него нужен импульс считывания с фронтами 0,1 мксек. и длительностью 0,4 мксек. Для запоминающих устройств большого объема имеются сердечники, требующие полный ток 350 *ма*. Сигнал «1» 50 *мв*, «0» 4÷5 *мв*.

Рассматриваются требования к полупроводниковым триодам для управления запоминающим устройством и переключающие устройства с насыщенными триодами и фиксирующими диодами. Проводится сравнение между запоминающими устройствами с линейной выборкой и работающими по принципу совпадения токов.

**4644. Цифровое запоминающее устройство на перфоленте. Тейс** (Digital storage on punched tape. Theis M. E.), Trans. Soc. Instrum. Technol., 1958, **10**, № 4, 178—182 (англ.)

**4645. Надежность элементов в вычислительной машине Манчестерского университета. Робинсон** (Component reliability in the computing machine at Manchester University. Robinson A. A.), Automat. Digital Comput., London, 1954, 252—256. Discuss., 256—257 (англ.)

**4646. Симпозиум по электронным моделирующим устройствам. Вычислительные машины Дерво и Беркли; решение на них задачи о колебаниях в подъемных установках. Схафферс** (Symposium over elektronische analogon machines. De rekenmachines van Derveaux en Berkeley; toepassing op trillingsverschijnselen bij ophaalinstallaties. Schaffers W. J.), Ingenieur (Nederl.), 1957, **69**, №47, 0122—0126 (гол.; рез. англ.)

Моделирующее устройство «Джин», изготовленное в лабораториях Дерво (Париж), содержит 30 усилителей постоянного тока с коэффициентом усиления $5 \cdot 10^5$; из них шесть входят в блок сумматоров, 12—в блок перемены знаков, 12—в блок интеграторов. Сумматор допускает сложение 9 различных временных функций. Постоянная времени интегрирования 1 сек. ($R=2$ *мгом*, $C=0{,}5$ *мкф*). Имеется 40 потенциометров по 50 *ком*; из них на 32 устанавливаются коэффициенты, на 8—начальные данные. Отдельным комплектом поставляются нелинейные блоки: 2 умножителя и 2 функциональных генератора, выполненные на следящих системах. Потребление питания 1 *квт*. Дрейф нулей усилителей 1 *мв/мин*, точность решающих сопротивлений и емкостей 0,1%, ошибка умножителей и функциональных генераторов 1% от результата. Условия задачи набираются на штеккерной доске, на индикаторной доске размещены два вольтметра и измерительный мост с гальванометром для установки потенциометров.

Моделирующее устройство ЭАСЕ (EASE—Electronic Analog Simulating Equipment, Беркли, Калифорния) содержит 20 усилителей постоянного тока с коэффициентом усиления $1{,}2 \cdot 10^4$, десять ±100-вольтовых батарей для установки начальных данных, 2 электронных 4-квадрантных умножителя по амплитудно-временному импульсному принципу, 2 диодных функциональных генератора. Потребление питания 2 *квт*. Дрейф нулей усилителей 3 *мв/мин*, точность решающих сопротивлений и емкостей 1%, умножители и функциональные генераторы более гибки, чем у «Джина», но точность их работы меньше: 2% от результата.

Рассмотрено решение на машинах задачи о поперечных колебаниях шахтной клети и продольных колебаниях подъемного механизма, обусловленных эластичностью кабеля. А. Д. Закревский

**4647. Симпозиум по электронным моделирующим устройствам. Электронное моделирующее устройство Королевской лаборатории в Дельфте. Его применение к проблемам управления. Янссен** (Symposium over elektronische analogon machines. De simulator van het Koninklijke/Shell-Laboratorium, Delft. Toepassingen op regelproblemen. Janssen J. M. L.), Ingenieur (Nederl.), 1957, **69**, № 32, 0.83—0.87 (гол.; рез. англ.)

Описывается моделирующее устройство для систем управления, разработанное и построенное Королевской лабораторией в Дельфте. Приводятся два применения устройства: 1) для исследования действий гистерезиса в системах управления; 2) для изучения регулирования температуры в печах. Из резюме автора

**4648. Симпозиум по электронным моделирующим устройствам. Электронное моделирующее устройство кафедры аэронавтики Технологического университета в Дельфте. Эвер** (Symposium over elektronische analogon machines. De analogon rekenmachine van de sub-afdeling der vliegtuigbouwkunde der technische hogeschool te Delft. Oever M. J. van den), Ingenieur (Nederl.), 1958, **70**, № 10, 029—033 (гол.; рез. англ.)

Дается описание указанной в заголовке машины. Она является машиной не повторяющей решение, сконструированной для работы в истинном масштабе времени. Коэффициенты уравнения вводятся в машину методом текущего измерения. Машина имеет контрольную цепь, при помощи которой можно найти решения нелинейных уравнений методом последовательного их вычисления шаг за шагом. Из резюме автора

**4649. Анализ и синтез линейных систем автоматического управления с применением моделирующих устройств. Батаков А. М. В сб.:** Автоматич. управление и вычислительная техника, М. Машгиз, 1958, 438—463

В настоящей статье делается попытка исследования некоторых свойств, в рамках корреляционной теории, класса нестационарных случайных процессов на выходе линейных систем с переменными параметрами. Полученные результаты позволяют разработать достаточно простые методы экспериментального определения корреляционных функций этих процессов на моделирующих устройствах, а следовательно, методы практического анализа точности линейных систем автоматического управления при случайных воздействиях. Вначале рассматривается случай входного случайного процесса в виде «белого» шума, а затем дается обобщение на определенные классы стационарных и нестационарных случайных процессов.

Рассматриваются оптимальная задача синтеза линейных систем с переменными параметрами при стационарных случайных возмущениях и вопросы определения линейных переменных систем по заданной импульсной переходной функции. В. П. Парамонов

**4650. Электронные моделирующие устройства. Де-Бок, Нёйтс, Де-Баккер** (Elektronische analoge rekenmachines. De Bock A., Nuyts F., De Backer W.), Techn. tijdschr. U. I. Lv., 1959, 87, № 1, 11—18 (флам.; рез. франц.)

Статья общего характера.

**4651. Моделирующие устройства. Часть 2. Хэр, Уиллисон** (Analogue computers. Part 2. Hare R. E., Willisom W. E.), Instrum. Practice, 1958, **12**, № 12, 1295—1303 (англ.)

Обзорная статья. Часть 1 см. РЖМат, 1959, 9555. Рассматриваются различные элементы устройств.

**4652. Моделирующие устройства. Часть 3. Хэр, Уиллисон** (Analogue computers. Part 3. Hare R. E., Willison W. E.), Instrum. Practice, 1959, **13**, № 1, 48—51 (англ.)

Раздел обзорной статьи (РЖМат, 1959, 9555; реф. 4651), посвященной применению моделирующих устройств для решения различных задач. Рассматривается применение моделирующих устройств для решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и систем обыкновенных дифференциальных уравнений, для нахождения передаточной функции системы авторегулирования. Приведены блок-схемы моделирующих устройств для решения перечисленных задач. Отмечены возможности использования моделирующих устройств в качестве регулятора системы авторегулирования, для решения уравнений в частных производных, в частности уравнений Лапласа, Пуассона, уравнений теории поля, задач из ядерной физики. В качестве экономической задачи, решаемой на моделирующих устройствах, отмечена задача о стабилизации капитала.

Примечание референта. В п. 5. 1. начальное условие $\frac{d^2x}{dt^2}=0$ для уравнения (1) излишне.

В. А. Михайлов

**4653. Применение электронных моделирующих устройств для решения дифференциальных уравнений. Бевц** (Primena električnih analognih sklopova u rešavanju diferencijalnih jednačina. Bevc Vladislav), Elektrotehn. vesn., 1958, **12**, № 9-10, 292—295 (сербо-хорв.; рез. нем., англ., франц.)

Статья общего характера.

**4654. Возможности метода моделирования посредством электролитических ванн и тенденции его развития. Малавар** (La méthode d'analogie rhéoélectrique, ses possibilités et ses tendances. Malavard L.), Onde électr., 1956, **36**, № 355, 829—837; № 357, 1046—1052 (франц.; рез. англ.)

Продолжение и окончание статьи (РЖМат, 1960, 1020). См. также РЖМат, 1960, 2436.

**4655. Опыты по расчету водопроводной сети при помощи электрического моделирующего устройства. Бек, Фридерикс** (Erfahtungen mit dem elektrischen Anologierechner für die Wasserrohrnetz-Berechnung. Beck Karl, Friederichs Karl-Heinz), Gas- und Wasserfach, 1958, **99**, №44, 1125—1130. Diskuss., 1131 (нем.)

**4656. Применение моделирующих устройств к проблемам электропередачи. Бандьопадхьяй** (Analogue computer applied to electric transmission problems. Bandyopadhyay N. K.), Indian Constr. News, 1958, **7**, № 4, 73—76 (англ.)

**4657. Цифровая вычислительная машина «Метровик-950»** (The Metrowick 950 digital computer), Brit. Commuus and Electronics, 1957, **4**, № 5, 273—274 (англ.)

**4658. Быстродействующая электронная вычислительная машина АН СССР (БЭСМ). Мельников** (The high-speed electronic computer of the USSR Academy of Sciences (BESM). Melnikov V. A.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1956, **B103**, Suppl. № 2, 280—286. Discuss., 287—288 (англ.)

**4659. Математический центр разрабатывает новые вычислительные машины. Велдхёйс** (Mathematisch centrum ontwikkelt nieuwe rekenmachine. Veldhuis L.), Bedrijf en techn., 1957, **12**, № 283, Electronica, 123, 125 (гол.)

**4660. Бухгалтерская вычислительная машина РС-65 фирмы «Машин отоматик модерн»** (La machine de cemptabilité R. S. 65 des «Machines Automatiques Modernes»), Rev. mécanogr., 1957, **11**, № 121, 320—322 (франц.)

**4661. Использование логарифмической линейки. Хант** (Use of the slide rule. Hunt Herschel), Instrum. and Automat., 1958, **31**, № 11, 1817—1818 (англ.)

Популярная статья.

**4662. Представление событий в нервных сетях и конечных автоматах. Клини** (Represention of events in nerve nets and finite automata. Kleene S. C.), Ann. Math. Studies, 1956, № 34, 3—4 (англ.)

**4663. Опыты автоматического перевода на электронной вычислительной машине БЭСМ. Зеленкевич Г. П., Королев Л. Н., Разумовский С. Н.,** Природа, 1956, № 8, 81—85

**4664. Московская вычислительная машина переводит с английского языка на русский. Стейгер** (Moscow computer translates from English to Russian. Steiger A. J.), Office, 1957, **45**, № 3, 148, 150, 152, 155—156 (англ.)

Краткое изложение содержания статьи Г. П. Зеленкевич, Л. Н. Королёва и С. Н. Разумовского (реф. 4663).

**4665 К. Электронные вычислительные машины. Китов А. И., Криницкий Н. А.,** М., АН СССР, 1958, 131 стр., илл., 1 р. 90 к.

Популярная книга об устройстве электронных вычислительных машин, программировании и различных применениях электронных вычислительных машин.

**4666 К. Программирование для электронной цифровой вычислительной машины. Уилкс** (The preparation of progams for an electronic digital computer. 2nd ed. Wilkes Maurice Vincent et al. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1957, 252 pp., ill., 7.50 doll.), Publishers' Weekly, 1958, **173**, № 8, 94 (англ.).

**4667 К. Заметки об аналого-цифровых преобразователях. Саскайнд** (Notes on analog-digital conversion techniques, 2nd ed. Ed. Susskind Alfred K. S. l., Technol. Press; New York, John Wiley and Sons. Inc., London, Chapman and Hall, Ltd., 1958, x, 410pp., ill.) (англ.)

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

**4668. Выбор оптимального коэффициента усиления в системе регулирования по принципу самоустанавливающейся программы. Перельман И. И.,** Автоматика и телемеханика, 1959, **20**, № 2, 184—191.

Дается методика определения оптимального, с точки зрения уменьшения среднеквадратической ошибки регулирования, коэффициента усиления в системе регулирования с самоустанавливающейся программой при задании на ее входе циклического возмущающего воздействия, заданного статически. Дается приложение разрабатываемой методики к решению задачи стабилизации толщины готового продукта тонколистовых непрерывных станов горячей прокатки. В. П. Парамонов

**4669. Об устранении влияния запаздывания на динамику нелинейных импульсных автоматических систем. Цыпкин Я. З.** Докл. АН СССР, 1959, **124**, № 4, 812—814

Показывается, что устранение влияния запаздывания в нелинейных импульсных системах может быть обеспечено путем введения экстраполирующего звена и нелинейного дискретного фильтра. В. П. Парамонов

**4670. Фотограмметрия и электронные вычисления на службе дорожного проектирования. Каспер** (Photogrammetrie und elektronisches Rechnen im Dienste der Straßenprojektierung. Kasper Hugo), Strasse und Verkehr, 1958, **44**, № 10, 431—445 (нем.)
См. РЖАстр, 1959, 5915.

**4671. Фотограмметрия и электронные вычисления на службе дорожного проектирования. Каспер** (Photogrammetrie und elektronisches Rechnen im Dienste der Straßenprojektierung. Kasper Hugo), Strasse und Verkehr, 1958, **44**, № 11, 479—495 (нем.)

Окончание статьи (начало см. реф. 4670), в которой рассматривается применение вычислительных машин при расчетах, связанных с проектированием уличных магистралей (в первой части рассматривались вопросы фотограмметрии). Отмечается, что с помощью вычислительных машин с памятью на перфокартах очень удобно рассчитывать поперечные профили улиц. Машина дает возможность обрабатывать большое количество вариантов по выбору оптимального направления трассы. Скорость расчета поперечных профилей на машине «Бендикс» в 30 раз больше скорости расчета на специальных устройствах механического типа, применявшихся до сих пор. Время расчета одного профиля занимает около 15 сек. Программирование задачи никаких трудностей не представляет. Отмечается применение машин для подобных задач в ряде стран. Библ. 57 назв. Д. А. Поспелов

**4672. Применение электронных вычислительных машин в рентгеноструктурном анализе. Гиллис** (An application of electronic computing to X-ray crystallography. Gillis J.), Acta crystallogr., 1958, **11**, № 12, 833—834 (англ.)

**4673. Использование вычислительной машины ЕДСАК II для прямого определения кристаллических структур. Кокран, Мак-Айвер** (The use of Edsac II for the direct determination of crystal structures. Cochran W., McIver E. J.), Acta crystallogr., 1958, **11**, № 12, 892 (англ.)

**4674. Кристаллографические расчеты на электронной цифровой вычислительной машине СИЛЛИАК. Фриман** (Crystallographic calculationson the SILLIAC electronic digital computer. Freeman H. C.), Austral. J. Chem., 1958, **11**, № 2, 99—103 (англ.)

**4675. Математическое рассмотрение проблемы звездной эволюции в связи с применением автоматической цифровой вычислительной машины. Хазелгров, Хойл** (A mathematical discussion of the problem of stellar evolution, with reference to the use of an automatic digital computer. Haselgrove C. B., Hoyle F.), Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1956, **116**, № 5, 515—526 (англ.)
См. РЖАстр, 1958, 523.

**4676. Применение вычислительной машины в управлении ректификацией. Энгел** (Computing-control applied to a fractionating column. Engel Howard L.), Control Engng, 1957, **4**, № 9, 144—147 (англ.)

**4677. Применение электронных вычислительных машин в американской науке. Генцш** (Anwendung elektronischer Rechenmaschinen in der amerikanischen wirtschaft. Genzsch Erwin O.), Ind.-Anz., 1956, **78**, № 3, 38 (нем.)

**4678. Расчет нагрева электрических кабелей, проложенных в бетонных блоках, на электроинтеграторе ЭИ-12. Вишневский К. П.,** В сб.: Механиз. инж.-техн. расчетов при проектир. сооруж. М., Госстройиздат, 1959, 93—112

**4679. Статические расчеты многоэтажных и многопролетных рам на электронной цифровой машине. Тарнопольский Б. Л.** В сб.: Механиз. инж.-техн. расчетов при проектир. сооруж. М., Госстройиздат, 1959, 57—74

**4680. Использование электронных вычислительных машин в маркшейдерском деле. II. Хейлль** (Der Einsatz elektronischer Rechengeräte im Markscheidewesen. II. Ein Beitrag aus dem Braunkohlenbergbau. Heyll Helmut), MTW-Mitt., 1958, **5**, № 6, 340—347 (нем.)
Часть I см. РЖМат, 1960, 1017.

**4681. Рентгеноструктурные расчеты на универсальной вычислительной машине «Стрела». Левин А. А., Порай-Кошиц М. А.,** Кристаллография, 1959, № 4, № 2, 157—162

**4682. Расчет давления сети трубопровода при помощи цифровых вычислительных машин. Рандольф** (Druckrohrnetzberechnung mit Hilfe von Ziffern-Rechenmaschinen. Randolf R.), Wasserwirtsch.—Wassertechn., 1958, **8**, № 12, 566—567 (нем.)

**4683. Использование современных вычислительных машин в структурном анализе. Элдридж** (Use of modern computers in structural analysis. by Ray W. Clough. Discussion. Eldridge Winfield H.), J. Struct. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 1958, **84**, № 7, Part 1, 1857—39 (англ.)

**4684. Новые методы исследования гражданского инженерного дела при помощи электронных вычислительных машин. Паскаль** (Méthodes nouvelles d'études de génie civil, utilisation des calculateurs électroniques. Pascal Raoul), Construction (France), 1958, **13**, № 3, 65—70; № 4, 105—108, XII; № 6, 172—178 (франц.; рез. англ.)

**4685 К. Проектирование и расчет следящих систем и систем регулирования. Ч. I. Честнат Г., Майер Р. В.,** Перев. с англ. М.-Л., Госэнергоиздат, 1959, 487 стр., илл., 16 р.

---

См. также: 4376.

# АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ


А

Аббасов Н. Т. 4436 Д
Абдинова А. Б. 4140
Авдеев Н. Я. 3952 К
Агранович З. С. 3972
Азимов М. 3994 К
Айзенберг Л.А. 3944
Айзенштат А. Я. 3829
Аккерман Р. Б. 4608
Алексеев А. С. 4098
Алфутов Н. А. 4588
Аманов Т. И. 4048
Аояма 4336
Аравийская Е. Н. 3942
Араи 3777
Арнольд В. И. 3702
Артемов Г. А. 4584
Архангельская А. А. 3870
Атанасян В. А. 4511

Б

Бадалян Г. В. 3945
Базылев В. Т. 4420
Бакельман И. Я. 4014, 4017, 4065
Бараненков Г. С. 4184 К
Баранцев Р. Г. 4041
Барбашин Е. А. 3987, 4147
Батков А. М. 4377, 4649
Белов Н. В. 3804—3806
Беляев Б. И. 4391
Березанский Ю. М. 4256
Березина Л. Я. 4494
Березовский А. А. 4149
Берман Г. Н. 3686 К
Боголюбов Н. Н. 4215, 4228
Болгов М. И. 3995 К
Болотин А. С. 3964
Большев Л. Н. 4303
Боровский Ю. Е. 4411 Д
Бредис А. А. 4377
Бугров Я. С. 4047
Булдырев В. С. 4097

В

Важевский Т. 3983
Ван Лянь 3970
Ван Чжэ-сянь 3814
Васильева А. Б. 3992
Ведешкина Л. А. 4139
Вейль А. 3751, 3752, 3756, 4445, 4474
Векилов Ш. И. 4148
Векслер А. И. 4294 Д
Вентцель Т. Д. 4036
Виденский В. С. 3916, 3917
Виноград Р. Э. 3984, 3997 Д
Винокуров В. Р. 4136
Вишик М. И. 4015
Вишневский К. П. 4678
Владимиров В. С. 4228, 4621
Волков Д. М. 4012
Волошина М. С. 4055
Вольперт А. І. 4049

Г

Нәбибзадә Ә. Ш. (Габиб-заде А. Ш.) 4143, 4144
Гавеля С. П. 4053
Гаврилов Л. И. 4101
Ганин М. П. 4054
Гвоздев Ю. В. 4442 Д
Гельфанд И. М. 4290 К
Гельчинский Б. Я. 4099
Гиллерт Г. 4402
Глускин Л. М. 3833
Гольцов Н. А. 4571
Гонин Е. Г. 3790 К
Гордевский Д. З. 4427 К
Гординг Л. 4057
Граев М. И. 4292 П
Гребенюк Д. Г. 4594
Григолюк Э. И. 4080
ГуаньЧжао-чжи 3650
Гурарий В. П. 4242
Гуревич Г. Б. 3857
Гусаров Л. А. 4006
Гусси Г. 3993
Гутман А. 4069
Гюннинен Э. М. 4097

Д

Давиденко Д. Ф. 4576, 4577
Дезин А. А. 4255
Демидович Б. П. 4184 К
Демидович М. К. 4431
Денчев Р. 4027
Дёринг 3755
Дідик В. Ю. 3684
Долгинов А. З. 4263
Драпкин А. Б. 4052
Дуболарь В. К. 3964

Е

Емеличев В. А. 3823
Ерохин В. Д. 3923
Еругин А. Н. 3973
Еругин Н. П. 3965
Есенин-Вольпин А.С. 3710
Ефименко В. А. 4184 К
Ефимов А. В. 3905
Ефимов Н. В. 4236

Ж

Жаутыков О. А. 4093
Житомирский Я. И. 4003

З

Заботин Я. И. 3816
Зайцев И Л. 3706 К
Зарецкий К. А. 3834, 3835
Захаров В. К. 4019
Зеленкевич Г. П. 4663
Зотов В. П. 4605
Зуховицкий С. И. 4274

И

Измайлов В. Д. 4508
Ильин А. М. 4016
Ильин В. А. 3651
Исаханов Р. С. 4146
Исида М. 4396
Искендеров Ш. А. 4028, 4029
Итакура 4122
Ито М. 4120, 4487
Ито С. 4395

К

Кабанов Н. Н. 4560 Д
Кабулов В. К. 4151
Каваками К. 4392
Кавасэ Т. 4400
Кадец М. И. 4231
Кадыров Х. 4603
Казанцева Г. Е. 4115
Казьмин Ю. А. 4259
Кальмар Л. 3866
Капилевич М. Б. 4042
Картрайт М. Л. 3978
Каценеленбаум Б. З. 4117
Кільчевський М. О. 4100
Киселев А. А. 3732
Кито 3996 К
Китов А. И. 4665 К
Кобаяси Х. 4394
Кобринский Н. 3662 К
Коган С. М. 4184 К
Кондратьев А. С. 4068
Конти Р. 3977
Кораньи А. 3940
Кордемский Б. А. 3709 К
Королев Л. Н. 4663
Коронкевич О. І. 4318
Красильщикова Е. А. 4152
Кошелев А. И. 4011
Красносельский М.А. 4272
Крейн С. Г. 4272
Кремянский В. И. 3657
Криницкий Н. А. 4665 К
Крумінг П. Д. 3838
Кручксвич Г. И. 4520
Крылов В. И. 4609
Кубота 3753
Кудрявцев Н. В. 4112
Кузнецов Н. Н. 4082
Кшижанский М. 4035

Л

Лаврик А. Ф. 3737
Лаврук Б. Р. 4050, 4051
Лазарев В. Г. 3870
Ладыженская О. А. 4038
Ландо Ю. К. 4141, 4145
Лаптев Б. Л. 4532 Д
Лаптев Г. Ф. 4526, 4527
Ларченко Е. Г. 4627
Латышева К. Я. 3961
Лащенов К. В. 4611
Лебедев В. И. 4578, 4579
Левин А. А. 4681
Левитан Б. М. 4061
Леонтьев А. Ф. 3921
Лесохин М. М. 3828
Либер А. Е. 4498
Либерман Л. Х. 4147
Ливчак Я. Б. 3811
Линейкин П. С. 4090
Литвинов Н. Н. 3696, 3697
Ловатер А. Дж. 3930, 3931
Лоу Чжи-юань 4557
Лунц Г. Л. 4184 К
Ляпунов А. А. 3653

М

Магнарадзе Л. Г. 4153
Майер Р. В. 4635
Макаров Г. И. 4097
Малышев А. В. 3739
Мамедбейли Г. Д. 3685 К
Манабэ 4339

Марченко В. М. 4111
Марьин П. П. 4118
Матвеев П. С., 4377, 4379
Матвеев Р. Ф. 4317
Маховиков В. І. 4022
Машкович С. А. 4590
Мейер Р. В. 4685 К
Мейман Н. Н. 3935
Мельник И. М. 3932
Мередов М. 3947
Месис А. В. 3933
Мигиренко Г. С. 4108
Мидзутани Х. 4337
Микусинский Я. 4291 К
Мильман Д. П. 4268
Минаев А. Ф. 4603
Минлос Р. А. 4290 К
Минорский В. П. 3705 К
Миранда М. 3998
Митягина В. А. 4624
Михнев М. М. 4441 Д
Мозжерова Н. И. 4021
Мойсил Г. 3874
Молокович Ю. М. 4091, 4092
Молотков И. А. 4097
Муйжнек Г. 4412

Н

Надь Б. 3940
Накаи 4443
Несмеянов А. Н. 3647
Нечипорук Э. И. 3862
Николеску М. 3941
Никольский А. А. 4079
Нисимура К. 4337
Новоселов В. С. 4066

О

Обрешков Н. 3763
Огиевецкий И. И. 4190
Огурцов А. И. 3985
Одзи М. 3988
Ока М 4399
Олейник О. А. 4007, 4024
Онуфриева Л.А. 3732

П

Пан В. Я. 4615
Панайоти Б. Н. 4002
Панич О. И. 3999
Панкратов С. А. 3956
Парасюк О. С. 4215, 4283, 4315
Пекелис В. М. 3662 К
Пензов Ю. Е. 4525
Перельман И. И. 4668
Петрашень Г. И. 4094
Петрина Д. Я. 4283
Петропавловская Р.В. 3821
Пименов Р. И. 3727
Плотников В. И. 3899
Поваров Г. Н. 3863, 3864, 3867, 3868
Поенару В. 3993
Полак Л. С. 3680
Поляцкий В. Т. 4261
Попов А. А. 4616
Порай-Кошиц М. А. 4681
Порпер Ф. О. 4034
Поршнева Е. Ф. 4184 К
Потапов М. К. 3911
Притвиц Н. А. 4084
Протасов В. И. 4046
Прохоров Ю. В. 4301
Пятецкий Шапиро И. И. 3954 Д

Р

Радов Е. А. 4415
Разумовский С. Н. 4663
Расулов М. Л. 4009
Резников Р. А. 4617
Резницкая К. Г. 4058
Реморов П. Н. 3771, 3772
Ривкинд М. Я. 4419
Рогинский В. Н. (Рогіньский В. М.) 3868—3870
Розенфельд Б. А. 4434
Ростовцев Н. А. 3950
Рутман М. А. 4008
Руубель А. 4437
Рыль-Нардзевский К. 4288

С

Сабинин Л. В. 4531 Д
Сакаи Н. 4398
Сакино 4393
Сакума Т. 4392
Самарский А. А. 4570
Сансоне Г. 3977
Саргсян И. С. 4064
Сасаки 4338
Сато М. 4397
Севастьянов Б. А. 4313
Семянистый В. П. 4492, 4493
Серпинский В. 3708 К
Сибирский К. С. 3975
Сикорский Р. 4291 К
Сіліч З. О. 3948
Сираждинов С. Х. 3736, 4302
Ситников К. А. 4388
Скуридин Г. А. 4095
Слугин С. Н. 4276
Смирнов М. М. 4044
Соболев В. И. 4280
Соболев С. Л. 3653
Соболь И. М. 4621
Солодов А. В. 4376
Солодов В. М. 4612
Солодовников В. В. 4377
Соломяк М. З. 4293 Д
Старченко Л. П. 3761
Стефанова Л. Б. 4258
Стечкин С. Б. 4236
Суворов Г. Д. 3949
Сунчелеев Р. Я. 4107
Сычева Е. П. 4184 К
Сюй Ли-чжи 4167
Сюй Чунь-фан 3670

Т

Тага 4335
Тагами С. 4396
Тадзака С. 4394
Такакура 4335
Такидзава 4545
Таланцев А. Д. 3872, 3873
Тарнопольский Б. Л. 4679
Тархова Т. Н. 3805, 3806
Тацуняк П. И. 4283
Теодореску Н. 3963
Терегулов И. Г. 4593
Терещенко М. І. 3967
Тзян Ху-шен 3991
Тиман М. 4168
Тихонов А. Н. 4570
Тозони О. В. 3926
Топорова В. А. 4067
Топтыгин И. Н. 4263
Трайнин Я. Л. 4424
Траутман А. 4540
Тумаркин С. А. 3966
Тянь Фан-цзэн 3649

У

Уваров В. Б. 4200
Уёмов А. И. 3656
Узаков Ю. К. 4150
Уо 4607
Ура Т. 3976
У Чжун-хай 4045
У Яо-хуа 4135 Д

Ф

Фавар Ж. 3981
Фаге М. К. 4252
Фаст Г., 4559
Федоров Ф. И. 4282
Фельдман М. Р. 4589
Филатов А. Н. 4088
Филиппова М. А. 4609
Фояш Ч. 3993
Фролов С. В. 4184 К
Фролова М. Ф. 4609
Фудзии 3672

Х

Хаджимуллаев Ф. С. 4619
Хаимовичи М. 4013
Хаскин А. М. 4428, 4438
Хаскинд М. Д. 4089
Хатипов А. Э.-А. 4530 К
Хаяси С. 4335, 4607
Хираока А. 4401
Хуан Чжэн-чжун 4515
Хэ Бо-хэ 3844

Ц

Цыпкин Я. З. 4669

Ч

Чайкина З. С. 4068
Чакалов Л. Н. 3928
Чандиров Г. И. 4039
Чахленкова Т. Г. 4435 Д
Чен Цзянь-гун 3920
Честнат Г. 4685 К
Чечик В. А. 3955
Чжан Ши-сюнь 4137
Чжэн Дэн 3671
Чирков Я. Н. 4598
Чуриков Ф. С. 4077

Ш

Шапиро З. Я. 4290 К
Шеваллей 4549
Шельдяева М. Н. 4030
Шенгелия Г. 4116
Шиманов С. Н. 3989
Шор Л. А. 4569 Д
Шостак Р. Я. 4184 К
Штраус А. В. 4254

Щ

Щепетев А. Н. 4104
Щербаков Б. А. 3975

Э

Эйдельман С. Д. 4034, 4059, 4060
Эшби У. Р. 3655

Ю

Юань Чжао-дин 4582

Я

Ямадзаки 3754
Яненко Н. Н. 4020, 4063
Янпольский А. Р. 4184 К
Ясиро Р. 4401

---

A

Abdel-Malek M. 4354
Abdel-Messih Moheb Aziz 4217
Abel W. R. 4555, 4556
Ackermann W. 3730 K
Ackoff R. L. 4320
Acton F. S. 4404 K
Adelman I. G. 4359
Afriat S. N. 4307
Agnew R. P. 4193
Aigner A. 3776
Albrecht F. 3974
Alkire G. 3695
Al-Salam W. A. 4201
Altman M. 4596
Amerio L. 4138
Amitsur S. A. 3854
Andrushkiw J. 4296
Angelitch T. P. 3795
Aoyama H. 4336
Aparo E. 4595
Arens R. 4243
Arf C. 4486
Arndt D. 4630
Arrow K. J. 4355
Arsham I. 4634 K
Asano A. 4286
Aseltine J. A. 4220 K
Astuni E. 4606
Atiyah M. F. 4458
Aumann R. J. 4350
Auslander L. 4546

Awano T. 4286
Aymerich G. 4083

B

Bakos T. 4568
Balcerzyk S. 3808
Balsimelli P. 4478
Bandyopadhyay N.K. 4656
Banerjee K. S. 4356
Barrett J. F. 4219
Bass J. 4309—4311
Basu D. 4330
Battaglia A. 3773
Beach E. F. 4375 K
Bear H. S. 4244
Beck K. 4655
Behrbohm H. 4155
Béla J. 4597
Bellman R. 4072, 4157
Beneš V. E. 4380
Benneton G. 4170
Berg I. 3741
Berman M. 4387
Bers L. 4018
Bertram J. E. 4073
Bertrandias F. 3742
Bertrandias J. P. 4312
Beth E. W. 3729 K
Bevc V. 4653
Biermann K.-R. 3683
Billiet A. 4351
Birkhoff G. 4581
Bishara S. 4454
Blackett D. W. 4550
Blackman J. 4210
Blankfield J. 4124
Blaschke W. 4407, 4501
Blom G. 4340 K
Blumenthal L. M. 4555, 4556
Boas R. P. 3915
Bold B. 3701
Bompiani E. 3960, 4500
Boncler T. 3779
Bononcini V. 4183 K
Borş C. I. 4110
Boseck H. 3848
Boyadjiev G. 3990
Bradistilov G. 3990
Braier A. 3979
Branson H. 4385
Brauer R. 3750
Brauner H. 4483
Braunschweiger C. C. 4278, 4279
Browder F. E. 4229
Bruins E. M. 3658
Brun V. 3764, 4610
Buchner P. 4161
Buhr J. de 4418
Buschman R. G. 4211
Buquet A. 4447

C

Campbell R. 4198
Cartan H. 4223, 4265
Cartier P. 3817, 3820
Cattaneo C. 4176 K
Cesari L. 4154
Chakraborty S. K. 4105
Chang S. S. L. 4378
Chang Shih-hsun 4137
Chemnitius F. 4186 K
Chen Y. W. 4062
Cheney W. 4250
Cherubino S. 3803, 4358
Chew V. (Ed.) 4403 K
Ciesielski Z. 4232
Clifford A. H. 3827
Clough M. A. 3700
Clunie J. 3927
Coales J. F. 4076, 4219
Cochran W. G. 4341 K 4673
Cogan E. J. 3721
Cohen I. S. 3846, 3851
Cohen P. J. 4240
Cole J. D. 4085
Colerus E. 4175 K
Collatz L. 4625 K
Cooley W. W. 3698
Corben H. C. 4535
Corduneanu C. 3957
Cornell F. G. 4344 K
Cossar J. 4174
Costinescu O. 4497
Coulson C. A. 4132
Cox G. 4341 K
Coxeter H. S. M. 3813
Creangă I. 4482, 4489
Crow E. L. 4298
Császár A. 3901
Cuesta N. 3722
Curzio M. 3810

D

Dandeü Y. 4227
Danicic I. 3734
Darwin J. H. 4305
Davis M. D. 3714
Davison B. 3652
De Backer W. 4650
De Bock A. 4650
Dedecker P. 4410 K
Delachet A. 4440 K
Delaunay B. N. 3765
Denis-Papin M. 4214 K
Denjoy A. 3687 K, 3688 K
Deskins W. E. 3812
Dieudonné J. 4230, 4266
Dijkstra E. W. 3778
Dinghas A. 3943
Dingle H. 3681
Dingle R. B. 4630
Divinsky N. 3856
Doležal V. 4070
Douglas J. Jr, 4583
Drăgilă P. 4490
Dubreil P. 3677, 3839
Dubreil-Jacotin M. L. 4087
Durix 3794
Duverger L. 4637

E

Eells J. Jr, 4548
Eggleston H. G. 3894
Ehlich H. 3745
Eichler M. 3757
Eldridge W. H. 4683
Endl K. 3918
Engel H. L. 4676
Engelmann F. 4285
Engl W. 4103
Erdös P. 3735
Erickson K. E. 3876
Eriksson H. A. S. 4287

F

Facciotti G. 4450, 4461
Faure R. 4214 K
Fava F. 4430
Fempl S. 4197
Fenna D. 3762
Fessel A. 3690
Fett G. H. 4075
Fettis H. E. 4604
Finch P. D. 4368
Finlay A. H. 4421
Fischer G. 4592
Fisk P. R. 4353
Fisz M. 4297
Flavien L. 4633 K
Fleishman B. A. 4032
Florian A. 4564
Forsythe G. E. 3703
Forte B. 4416
Fortet R. 4334
Fortini R. 4408 K
Fourès-Bruhat Y. 4123
Fox C. 4213
Frajese A. 3666
Fraser D. A. S. 4342 K
Freeman H. C. 4674
Friederichs K.-H. 4655
Fröberg C.-E. 3780, 4602

G

Gaddum J. W. 3796
Galafassi V. E. 4459
Gallarati D. 4470, 4472
Gamkrelidze R. V. 4074
Geeslin R. H. 4127
Genzsch E. O. 4677
Germansky B. 4202
Gessford J. 4374
Ghika A. 3842
Giese J. H. 4580
Gilbert E. N. 4321
Gillis J. 4672
Gilmore P. C. 3712
Giqueaux M. 3664 K
Givens W. 4601
Goda B. T. 4643
Godeaux L. 4451, 4453, 4457, 4460, 4462, 4464
Goes G. 3907—3909
Goldman A. J. 3802
Goldstein A. A. 4250
Golubew W. A. 3775
González Ibeas J. 4623
Good I. J. 4323
Greenspan D. 4040
Grenander U. 4390
Greub W. 4253
Gross W. 3801
Grothendieck A. 3818, 3819
Guderley G. 4043
Guérindon J. 3850
Guggenheimer H. 4473
Gürsey F. 3843
Gutiérrez Rivero H. 4426

H

Haar A. 3689 K
Hadwiger H. 4562, 4565
Hahn S. G. 4586
Haimovici A. 4505, 4506
Haimovici M. 4528
Hall M. Jr, 3781
Hanssmann F. 4345
Hare R. E. 4651, 4652
Hare R. R. Jr, 4364
Harris B. 4365, 4367
Harrop R. 3717
Hasegawa M. 4587
Haselgrove C. B. 4675
Hauptschein A. 4365, 4367
Hausrath A. H. 4114
Hayashi Chihiro 3980
Hayashi Chikio 4335
Hayes C. A. Jr, 3898
Hazelwood R. N. 4405
Helm H. A. 4212
Herlestam T. 4192
Hersch J. 3934
Herz C. S. 4246
Hessenberg G. 3707 K
Hewitt E. 3912
Heyll H. 4680
Hille E. 4004, 4005
Hlawka E. 3758
Hoffman K. 3946
Holloway J. L. Jr, 4319
Holzer L. 3787
Hooley Ch. 3738
Ho Peh-hor 3844
Horton R. 3693
Hosemann R. 4425
Hoyle F. 4675
Huard P. 3669
Hunt H. 4661
Hurst R. P. 4631
Hurwicz L. 4355
Husser F. F. 3668
Hwang Cheng-chung 4515
Hyers D. H. 3694

I

Iablonskii S. B. 3728 K
Ichijo Y. 4516
Igusa J. 4449
Iséki K. 3904

J

Jacob M. 4188
Jadraque M. V. 4158
Jankovic Z. 4156
Jánossy L. 4295
Janssen J. M. L. 4647
Jarník V. 3759
Jaroslow B. N. 4384
Jaśkowski S. 3691
Jenkins J. A. 3939
Joachim G. S. 4642
Johansen L. 4348
Johnston W. R. 4643
Juncosa M. L. 4366
Justice H. K. 4177 K

K

Kac M. 4308
Kahane J.-P. 3906, 4249
Kalaba R. 4072, 4366
Kalish D. 3723
Kalman R. E. 4073
Kamat A. R. 4299
Kampen N. G. 3971
Kaplan W. 3986
Kapur J. N. 4078, 4125
Karp S. N. 4121
Kasper H. 4670, 4671
Katznelson Y. 3906
Kaufmann A. 4214 K
Kelisky R. P. 3783, 3784
Kempthorne O. 4381
Kennedy P. B. 3896
Kesten H. 4306
Kimura N. 3840
Kleene S. C. 4662
Klimov B. 4632
Kolibiarová B. 3825
Kolmogorov A. 4326 K
Komar A. 4539
Koníček O. 4142
Koosis P. 3922
Koppe H. 4128
Koppenfels W. von 3953 K
Korous J. 3661 K
Kostant B. 4503
Kreer J. B. 4075
Kreiss H.-O. 4463
Krishna Iyer P. V. 4314
Kron G. 3877—3893
Krull W. H. 3845
Kruskal J. B. 4350

Kuho T. 3929
Kudo A. 4331
Kuipers L. 3936
Kule L. 4216
Künneth H. 4558
Kunze R. A. 4245
Kurita M. 4509
Kurzweil J. 3760, 4273
Kůst J. 3699

L

Lagerstrom P. A. 4085
Lampariello G. 4119
Lamprecht E. 3748, 3749
Lanczos C. 4600
Langebartel R. G. 4389
Lass H. 4185 K
Laugwitz D. 4563
Leeuw K. de 3715
Lefebvre P. 3832, 3837
Legendre R. 4081
Lehmer E. 3731
Lekkerkerker C. G. 3766, 3767, 3786
Lelong-Ferrand J. 4519, 4547
Leopoldt H.-W. 3770
Lesemann K. J. 4636
LeVeque W. J. 3788K
Lind G. 4373
Lingenberg R. 4480
Lint J. H. 3746
Lions J.-L. 4000
Longman I. M. 4629
Longo C. 4481
Lorch E. R. 4563
Lorenzen P. 3726
Lucke W. H. 4207
Łuszczki Z. 4205
Lyche R. T. 4179 K
Lyra G. 4502

M

MacDuffee C. C. 4533
Mack S. F. 4023
McIver E. J. 4673
McKean H. P., Jr, 4033
Mackey G. W. 4267
McLachlan D., Jr, 3807
McLeod J. B. 4025
MacRobert T. M. 4204
McVittie G. C. 4124
Maisano F. 4467
Malavard L. 4654
Malliavin P. 4247, 4248
Manara C. F. 4444
Marcus F. 4488
Marcus M. 3802
Marcus S. 3902
Mařík J. 4281
Markowitz S. 4643
Marmion A. 4496
Martin G. 3789 K
Maruyama T. 4414
Matschinski M. 4567
Matsumoto K. 3724
Mayer-Kalkschmidt J. 4191, 4195
Mayr J. 3660
Melèse J. 4363
Melnikov V. A. 4658
Mendelson E. 3711
Merat P. 4541
Méric J. 4307
Met V. 4071
Mihalescu C. 4406
Mikusiński J. 4205
Miller J. 4631
Mills H. D. 4372
Milne-Thomson L. M. 4109
Minc H. 3841
Mineo C. 4413
Mirodan R. 4514
Míšek B. 4566
Mishra R. S. 4518
el Mohandis M. G. S. 4126
Montague R. 3723
Montel P. 4166, 4552
Moore E. F. 3715
Moreau J. 4440 K
Mordell L. J. 3768
Morris A. O. 3800
Morrison D. 4573
Moses H. E. 4260
Motzkin T. S. 3914
Mrówka S. 4269
Muracchini L. 4429
Murre J. P. 4477
Myrberg P. J. 4172, 4622

N

Nagano T. 4538
Natanson I. P. 4182 K
Natucci A. 4160
Nehari Z. 3925
Neugebauer O. 3673
Nicolescu M. 4178 K
Nordskog A. W. 4381
Nuyts F. 4650

O

Oever M. J. 4648
Ohnishi M. 3724
Oka M. 4587
Oktaba W. 4332
Olkin I. 4329
Olubummo A. 4241
Orey S. 3719, 3720
d'Orgeval B. 4456, 4469
Ostrowski A. 3793
Oudart A. 3664 K

P

Padmavally K. 3903
Pagni M. 4037
Paker M. A. 4347
Papy G. 4510
Parisot G. 4349
Parízek B. 3826
Parsons P A. 4382
Pascal R. 4684
Paszkowski S. 3913
Pawelski W. 3962
Peák I. 3830
Pearson E. S. 3682
Peck L. G. 4405
Pederson R. N. 4056
Peixoto M. M. 3982
Pełczyński A. 4234
Petersen G. 4189
Petiau G. 4130, 4131
Phelps R. R. 4235
Phillips R. S. 4251
Pidek-Łopuszańska H. 3704 K
Pierce R. S. 3859
Pietrzykowski T. 4574
Pignataro S. 3769
Pipes L. A. 4171, 4181 K
Piron J. 4346
Plessis N. du 4618
Pollák G. 3831
Pollard H. 4210
Porcu L. 4448
Poßner L. 4620
Postnikov A. G. 3740
Poveda Ramos G. 3785
Powell R. L. 4635 K
Power G. 3951
Powers J. E. 3959
Prasad Chaudhuri N. 3836
Pyle H. R. 4504

Q

Quastler H. 4322, 4384

R

Radecki J. 4164
Radosavljević L. B. 3969
Raimi R. A. 4225
Rajagopal A. K. 4199
Randolf R. 4682
Rao B. R. 4328
Rapcsák A. 4524
Rapoport A. 4383
Rédei L. 3831, 3849
Redheffer R. M. 4180K
Rees D. 3855
Rehbock F. 4439
Rehwald W. 4206 K
Revuz A. 3858
Rheinboldt W. 4253
Richards C. H. 4634 K
Ridder J. 3724, 3725
Rieger L. 3875
Riello G. 4360
Rimer D. 3692
Rionero M. 4446
Rivett B. H. P. 4345
Robinson A. A. 4645
Robinson P. D. 4132, 4133
Rogers W. M. 4635 K
Rolewicz S. 4226, 4270
Ronan H. R., Jr 3871
Rooney P. G. 4208
Roquette P. 3847
Rose A. 3713, 3716
Rosenberg M. 4643
Rosenlicht M. 3815, 4475
Roumieu C. 4209
Roy K. 3860
Roy S. K. 4630
Runnenburg J. T. 4306
Rüssmann H. 4196

S

Sakellariou N. 4484, 4485
Sakino S. 4393
Salkover M. 4177 K
Salzer H. E. 4613, 4614, 4634 K
Şandor Ş. 3958
Sanford V. 3675
Sankaranarayanan G. 4304
Sarolea L. 4128
Sasaki T. 4338
Satake I. 4264, 4265
Sato I. 4522
Scafati M. 4425
Sce M. 4554
Schaffers W. J. 4646
Schechter S. 4599
Schinzel A. 3774
Schmidt H. 4134
Schober H. 4386
Schoenfeld R. L. 4387
Schouten J. A. 4551
Schurrer A. 4165
Schutte H. J. 3792
Schwartz L. S. 4365, 4367
Schwarz S. 3826
Segre B. 4491
Seidenberg A. 4187, 4468
Serre J.-P. 4476
Shakuntala N. S. 4314
Shannon C. E. 3715
Shapiro N. 3715
Sherman S. 4361
Shisha O. 3938
Sierpinski W. 3774, 3782
Signorini A. 4106
Sikkema P. C. 3937
Sikorski R. 3897, 3968
Silverman R. J. 4237, 4277
Singer I. 4224, 4238, 4275
Škarić S. 4536
Slebodziński W. 3704 K
Sluis A. 4203
Smagorinsky J. 4591
Smith E. S. 4177 K
Soble A. B. 3900
Sokolnikoff I. S. 4180 K
Sorace O. 4499
Southard T. H. 4628
Srb J. 4507
Stallmann F. 3924, 3953 K
Steiger A. J. 4664
Stein E. M. 4239
Steinhaus H. 3659, 4561
Stewartson K. 4086
Stoka M. I. 4517
Stoller D. S. 4362
Stoller L. 4573
Strubecker K. 3667
Stuani L. 3663 K
Stuart-Williams R. 4643
Susskind A. K. Ed 4667 K
Svoboda K. 4512
Swan A. W. 4369
Swierczkowski S. 3861
Szász O. 3919
Szász P. 4432, 4433
Szendrei J. 3853
Szidarovsky J. 4572
Szökefalvi-Nagy B. (szerk.) 3689 K

T

Taft E. J. 3852
Taga Y. 4335
Tagamlicki Y. 3798
Takakura S. 4335
Takasu T. 4529
Takesaki M. 4262
Takizawa S. 4513, 4542—4544
Talacko J. 4300
Tallini G. 4465, 4466
Tamássy L. 4417, 4495
Tamura T. 3822
Tarján R. 3679
Tatarkiewicz K. 4162
Taubenheim J. 4333
Tavernier J. 4129
Taylor A. E. 4289 K
Tenca L. 3799
Theil H. 4352
Theis M. E. 4644
Thüring B. 4639
Tibiletti C. 4452
Tietz H. 4409 K
Tillmann H 4271
Titchmarsh. E. C. 4026
Todor L. I. 4102
Toman K. 4422

Torio Baladron F. 4159
Torres Noguera J. 3791
Trempont J. 4479
Tsuji N. 4521
Tuan San Fu 4260
Turán P. 3747, 4173
Turpin M. 4010
Turquette A. R. 3718

U

Uchiyama S. 3743
Uhlmann A. 4284
Urbanik K. 3704 K, 4205

V

Vallée Poussin C.-J. de la 3744
Vaněk J. 4096
Varga O. 4523
Varga R. S. 4581
Veldhuis L. 4659
Veldkamp G. R. 3936
Ventura E. 4370
Vietoris L. 3733
Vigassy L. 4423 K
Vinogradov A. M. 3765
Vivier M. 3797
Volk W. 4343 K
Volterra V. 3678
Vučković V. 4194

W

Walsh J. L. 3914
Walter W. 4031
Walter W. G. 3654
Wan Zhe-xian 3814
Warfield J. N. 3865
Wasow W. 4585
Waterman D. 3895
Weber E. 4221 K, 4222 K
Weiss G. 4239
Wever F. 4316
Wheeler D. J. 4575
Whitin T. M. 4371
Whitney H. 3910
Whittle P. 4327 K
Wiegandt R. 3824
Wielandt H. 3809
Wigner E. 4537
Wilkes M. 4666 K
Williams W. E. 4121
Willison W. E. 4651, 4652
Wing G. M. 4072
Wissner A. 3674
Wloka J. 4205
Wold H. 4327 K
Wolf F. 4257
Wolfson K. G. 4233
Wright E. M. 4163
Wunsch G. 4218

Y

Yamabe H. 4001
Yano K. 4538
Yeardley N. 3919
Yen Ti 4277
Yu Yi-yuan 4113

Z

Zaddach A. 4553
Zariski O. 3846
Zeuli T. 4534
Zieleźny Z. 4205
Ziggelaar A. 3676
Zobel A. 4471
Zuckerman H. S. 3912

---

Технический редактор *Г. А. Шевченко*